

Mathematics of Poker

Bill Chen, Jerrod Ankenman

Математика покера

Блок №1

(главы 1 - 9)

Перевод: OlegK

Вычитка: Sun_Tczy

Оглавление

Часть I: Введение

Глава 1. Решения в условиях неопределенности: Вероятность и математическое ожидание	3
Глава 2. Предсказываем будущее: Дисперсия и выборки	15
Глава 3. Учимся использовать информацию: Оценка параметров и теорема Байеса	29

Часть II: Эксплуатация оппонентов

Глава 4. Играем по шансам: Прямые и потенциальные шансы банка	46
Глава 5. Гадаем на картах: Чтение рук и стратегий	62
Глава 6. Майнинг и вы: Онлайн покер	77
Глава 7. Играем правильно, Часть I: Игра с открытыми картами	82
Глава 8. Играем правильно, Часть II: Рука против диапазона	100
Глава 9. Подстройки и баланс: Диапазон против диапазона	113

Глава 1

Решения в условиях неопределенности: вероятность и математическое ожидание

Сколько игроков, столько и причин играть в покер. Кто-то садится за стол из-за возможности почувствовать себя частью закрытого сообщества, кто-то ради удовольствия или чтобы доказать свое превосходство. Многие играют ради духа соперничества, в то время как некоторые берут в руки карты, чтобы утолить свою жажду азарта или отвлечься от проблем.

Но кроме всех личных и зачастую труднообъяснимых факторов, некоторых людей стимулирует и неигровая мотивация. Например, победитель главного турнира World Series of Poker почти наверняка получит гору спонсорских предложений, контрактов и прочих бонусов, помимо многомиллионного приза за первое место.

Естественно, это далеко не все причины. Некоторые, например, пускаются во все тяжкие после одной проигранной раздачи - и как бы мы к этому не относились, мы обязаны рассматривать такие вещи как один из факторов, который удерживает игроков за столами. Даже если оценивать исключительно денежный аспект поражения, мы столкнемся с проблемой нелинейной ценности денег. Так, для большинства людей выигрыш пяти миллионов долларов гораздо более предпочтителен, чем 50% шанс выиграть десять миллионов. Все дело в том, что пять миллионов - это сумма, способная изменить жизнь, и **предельная полезность** еще пяти миллионов оказывается значительно меньше.

Примечание от переводчика: Предельная полезность (из экономической теории) - это полезность, которую человек получает от использования ещё одной дополнительной единицы блага. Другими словами, предельная полезность — это увеличение общей полезности при потреблении одной дополнительной единицы блага.

В более общем виде все эти факторы изучаются в рамках раздела экономики, называемого теорией полезности. Эта наука пытается дать количественную оценку предпочтениям и мотивам людей, чтобы впоследствии напрямую сравнивать материальные и нематериальные блага. Играя в покер, мы тоже стремимся максимизировать для себя полезность, но, вообще говоря, это утверждение верно для любого занятия. Однако использование теории полезности для изучения игры не представляется возможным, поскольку каждому человеку свойственны уникальные кривые субъективной полезности, так что всесторонний анализ покера займет бесконечно долгое время.

Поэтому в этой книге мы не будем рассматривать полезность как таковую, а заменим ее количеством выигранных денег за столом. В четвертой главе, когда мы будем рассматривать теорию ведения банкролла, мы раскроем такие понятия

как **риск банкротства**, **критерий Келли** и **премия за риск**. Все эти показатели призваны измерять риск и относятся преимущественно к факторам, не связанным непосредственно с игрой в карты. В книге, если не указано обратное, мы будем предполагать, что все игроки имеют необходимый банкролл, и что их единственная цель за столом - максимизация прибыли, так что они будут стараться принимать лучшие решения в каждой ситуации.

Максимизация выигранных в покере денег подразумевает максимизацию **математического ожидания** каждого решения. Но прежде чем мы рассмотрим это основополагающее понятие, стоит немного поговорить о теории вероятности, которая и стоит за идеей математического ожидания. Следующие разделы были написаны с использованием книги Ричарда Эпштейна «Теория Азартных Игр и Статистической Логике» (Richard Epstein, *The Theory of Gambling and Statistical Logic*), отличного пособия по теории вероятностей и ее применению в азартных играх.

Вероятность

Большинство решений за покерным столом принимаются в ситуациях, где конечный результат еще не определен. Когда дилер сдает карты, мы ничего не знаем о конкретных картах своих оппонентов. Однако это не значит, что у нас вообще нет никакой информации. Так, правила игры в покер вполне четко ограничивают круг возможных рук - например, у игрока могут оказаться червовые Валет Десять, но никак не изумрудные Царь Клешня. Состав колоды известен до начала раздачи, и это дает нам первоначальное представление о руках наших оппонентов.

Представьте себе раздачу из Холдема. Как часто у нас окажутся два туза? Если вы уже знаете ответ, то подумайте о том, что за ним стоит. Если нам сдадут миллион подобных рук, что тогда? А десять миллионов? Как часто у нас окажутся тузы? Со временем отношение количества пар тузов к остальным рукам сойдется на одной цифре. Это и есть определение **вероятности**. Собственно говоря, вероятность - это ключевой элемент в процессе принятия решений в покере, поскольку она дает нам математический аппарат, посредством которого мы можем оценить шанс наступления недетерминированных событий.

Если на промежутке в «n» событий в рамках эксперимента (например, сдача руки в Холдеме) некое событие «x» случается n_0 раз, то говорят, что вероятность (обозначается через «p») наступления события «x» составляет:

$$p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} \quad (1.1)$$

Вероятность того, что в отдельной взятой руке в Холдеме у нас окажутся тузы, составляет $1/221$. Конечно, мы могли бы это определить по-другому, сыграв пару

миллиардов раздач и посчитав количество тузов. По понятным причинам мы этого делать не будем. Мы применим более продуктивный подход и разобьем эту задачу на несколько простых составляющих. Для начала, ответим на вопрос: какова вероятность того, что одна из наших карт окажется тузом? Можно пойти дальше и задаться вопросом: какова вероятность, что одна из наших карт будет тузом пик?

На последний вопрос ответить будет весьма просто. Сделаем следующие допущения:

- В колоде находятся 52 карты
- Все карты равновероятны

Тогда вероятность того, что нам достанется именно туз пик (одна карта в колоде) составит $\frac{1}{52}$. Каков же шанс того, что одна из наших карт окажется любым из четырех тузов в колоде? Очевидно, что эта вероятность складывается из вероятностей выхода туза пик, ИЛИ туза червей, ИЛИ туза бубей, ИЛИ туза крестей. Поскольку все карты в колоде равновероятны, а тузов всего четыре, то искомая вероятность составляет:

$$p(A) = (4) \left(\frac{1}{52} \right)$$

$$p(A) = \left(\frac{1}{13} \right)$$

Мы можем складывать эти вероятности, потому что мы рассматриваем **взаимоисключающие события**. Проще говоря, ни одна карта не может оказаться одновременно и тузом пик, и тузом червей.

Независимые события

С другой стороны, некоторые события не являются взаимоисключающими. Вот два события:

1. Вышедшая карта - червовая
2. Вышедшая карта - туз

Если мы попытаемся посчитать вероятность того, что наша карта будет червой ИЛИ тузом, то придем к следующему выводу. В колоде 52 карты, из них 13 червовые, значит вероятность первого события составляет $\frac{1}{4}$. Вероятность того, что у нас будет туз, как и раньше, равна $\frac{1}{13}$. Однако теперь мы не можем просто сложить эти две цифры - вполне возможно, что наша карта окажется червовым тузом.

Существуют два типа связи между событиями. В первом случае они (события) не имеют никакого взаимного влияния. Например, текущее значение индекса NASDAQ и выпавшее число на игральном костяке в одном из казино Монте-Карло действительно никак не связаны между собой. Ни одно из этих событий никак не может повлиять на другое. Если вероятность одновременного наступления обоих событий равна произведению вероятностей наступления каждого из них в отдельности, то такие события называются **независимыми**.

В нашем случае, вероятность того, что сдаваемая карта окажется червовым тузом составляет $(\frac{1}{13}) (\frac{1}{4})$ или $\frac{1}{52}$. По понятным причинам, факт того, что карта окажется червовой, никак не связан с тем, что она же будет и тузом - все масти в колоде обладают абсолютно одинаковым набором карт.

Независимые события не являются взаимоисключающими кроме случая, когда вероятность наступления одного из событий равна 0. В колоде лежат тринадцать червовых карт и четыре туза. Но если мы просто сложим эти вероятности, то дважды посчитаем червового туза. Так что на самом деле, следует считать, что в колоде тринадцать червовых карт и три туза. В теории вероятностей, чтобы посчитать вероятность наступления хотя бы одного из двух не взаимоисключающих событий А и В, необходимо из суммы вероятностей наступления события А и события В вычесть вероятность их совместного наступления. Так что шанс того, что нам сдадут либо туза, либо червовую карту составляет: $\frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52}$. Итого $\frac{4}{13}$. Эта формула применяется как для зависимых, так и для независимых событий.

Зависимые события

Как вы уже наверное поняли, существуют и зависимые события - то есть те, которые каким-то образом влияют друг на друга. Например, футбольный вратарь 3% раз возьмет все пенальти в серии, а его команда 60% раз выиграет матч в серии пенальти. Но вероятность победы команды вратаря, если он не пропустит ни одного мяча, конечно же, не будет равна произведению 60% и 3%. Напротив, она будет очень близка к 3%, поскольку команда почти всегда выигрывает матч, если у вратаря получится отбить все пенальти. Такие события и называются **зависимыми**. Мы также можем рассматривать **условную вероятность** события А - это шанс наступления события А, **если** произошло событие В. Вероятность одновременного наступления зависимых событий А и В равна произведению вероятности события А на условную вероятность события В (если произошло событие А). События будут считаться независимыми, если условная вероятность события А (если произошло событие В) в точности равно вероятности наступления только события А.

Подытожим все вышесказанное в математической форме:

$p(A \cup B)$ = Вероятность наступления А или В

$p(A \cap B)$ = Вероятность одновременного наступления А и В

$p(A|B)$ = Условная вероятность события А, если событие В уже произошло

Знаки $\cup$ и $\cap$ заимствованы из теории множеств, они означают «единство» и «пересечение» соответственно. Хотя, конечно, проще называть их «или» и «и». Символ $|$ обозначает «условие». Таким образом, эти формулы можно читать следующим образом:

$p(A \cup B)$ = “вероятность А или В”

$p(A \cap B)$ = “вероятность А и В”

$p(A|B)$ = “вероятность А при В ”

Для взаимоисключающих событий:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad (1.2)$$

Для независимых событий:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \quad (1.3)$$

Для любых событий:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (1.4)$$

Для зависимых событий:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A) \quad (1.5)$$

Уравнение 1.2 является лишь частным случаем уравнения 1.4 для взаимоисключающих событий, когда $p(A \cap B) = 0$. А уравнение 1.3 - частный случай уравнения 1.5, поскольку для независимых событий $p(B|A) = p(B)$. Также, если $p(B|A) = p(B)$, то $p(A|B) = p(A)$.

Теперь давайте вернемся к нашему изначальному вопросу - как часто мы получим пару тузов? Здесь мы рассматриваем два события:

А: Первая карта туз

В: Вторая карта туз

$p(A) = 1/13$, и $p(B) = 1/13$. Однако это два зависимых события, поскольку если наступает событие А (первая карта оказывается тузом), то событие В становится менее вероятным, так как в колоде остается всего три туза. Так что $p(B|A)$ будет

выражать шанс того, что вторая карта будет тузом при условии, что один туз уже есть у нас на руках. В колоде останется три туза и 51 карта, таким образом, $p(B|A) = 3/51$, или $1/17$.

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A)$$

$$p(A \cap B) = (1/13)(1/17)$$

$$p(A \cap B) = 1/221$$

Вероятностям присущи еще несколько простых свойств. Во-первых, вероятность любого события не может быть меньше нуля или больше единицы. Как можно было понять из нашего определения вероятности, «n» событий никогда не могут привести к числу исходов большему, чем «n». И естественно, то же самое относится и к числам меньше нуля (ни одно событие не может произойти -1 раз). Вероятность события, которое точно произойдет, равна единице. Вероятность противоположного исхода (то есть шанс того, что событие не произойдет) равна единице минус вероятность наступления события.

Снова обобщим сказанное в нескольких простых формулах:

$p(\bar{A})$ = Вероятность, что событие A не произойдет

C = событие точно произойдет

I = событие невозможно

Тогда получим:

$$0 \leq p(A) \leq 1 \text{ для любого события } A \quad (1.6)$$

$$p(C) = 1 \quad (1.7)$$

$$p(I) = 0 \quad (1.8)$$

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1 \quad (1.9)$$

Уравнение 1.9 можно представить в следующем виде:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) \quad (1.10)$$

Используя эти простые правила можно решить множество задач по теории вероятностей.

Некоторые области применения теории вероятностей достаточно элементарны. Например, мы хотим узнать, как часто на игральных костях выпадет пара шестерок. Эту задачу можно решить с помощью уравнения 1.3, поскольку бросок каждого из кубиков является независимым событием. Пусть «p(A)» будет вероятностью выпадения шестерки на одной из костей, а «p(B)» - вероятность шестерки на другой. Тогда:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

$$p(A \cap B) = (1/6)(1/6)$$

$$p(A \cap B) = 1/36$$

Также, используя уравнение 1.2, мы можем определить, как часто у какого-то игрока могут оказаться тузы, короли или дамы на префлопе в Холдеме:

$$p(AA) = 1/221$$

$$p(KK) = 1/221$$

$$p(QQ) = 1/221$$

$$p(\{AA, KK, QQ\}) = p(AA) + p(KK) + p(QQ) = 3/221$$

Перейдем к более сложным задачам. Например, как часто одномастная рука попадет во флэш на флопе?

Если у нас на руках находятся две одномастные карты, то в колоде остается всего 11 карт той же масти. Все три карты на флопе должны быть одинаковой масти, таким образом, у нас есть три зависимых события: А - первая карта на флопе нужной масти, В - вторая карта на флопе нужной масти (если событие А наступило), С - третья карта на флопе нужной масти (при условии наступления А и В).

$$p(A) = 11/50 \quad \text{(две одномастные карты уже находятся на руках)}$$

$$p(B|A) = 10/49 \quad \text{(одна карта на флопе, три исключены из колоды)}$$

$$p(C|(A \cap B)) = 9/48 \quad \text{(две карты на флопе, четыре исключены из колоды)}$$

Подставим эти данные в уравнение 1.5:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A)$$

$$p(A \cap B) = (1/50)(10/49)$$

$$p(A \cap B) = 11/245$$

Пусть $D = (A \cap B)$, тогда мы снова можем использовать уравнение 1.5:

$$p(D \cap C) = p(D)p(C|D)$$

$$p(A \cap B \cap C) = p(A \cap B)p(C|(A \cap B))$$

$$p(A \cap B \cap C) = (11/245)(9/48)$$

$$p(A \cap B \cap C) = 33/3920, \text{ или немногим менее } 1\%.$$

Мы можем применить эти правила фактически к любой ситуации, и далее в книге мы будем использовать полученные здесь уравнения для расчета вероятностей отдельных событий.

Распределение вероятностей

Хотя вероятности отдельных событий, безусловно, важны, зачастую их оказывается недостаточно для полного анализа ситуации. Во многих случаях также важно рассматривать множество вероятностей в совокупности. Чтобы описать возможные исходы какого-либо события, а также соответствующие им вероятности, мы можем использовать так называемое **распределение вероятностей**.

Представьте себе подбрасывание монетки. У этого события всего два возможных исхода - они равновероятны и исключают друг друга, так что вероятность наступления любого из них равна $\frac{1}{2}$. Мы можем представить распределение вероятностей для подбрасывания монетки путем сопоставления каждого из исходов с его вероятностью (Орел, $\frac{1}{2}$ и Решка, $\frac{1}{2}$).

Пусть C - распределение вероятностей результата подбрасывания монетки, тогда мы можем составить следующее выражение:

$$C = \{(\text{Орел}, \frac{1}{2}), (\text{Решка}, \frac{1}{2})\}$$

Точно так же можно выразить распределение вероятностей для шестигранной игральной кости:

$$D = \{(1, \frac{1}{6}), (2, \frac{1}{6}), (3, \frac{1}{6}), (4, \frac{1}{6}), (5, \frac{1}{6}), (6, \frac{1}{6})\}$$

Мы можем составить дискретное распределение вероятности для любого события путем полного перечисления всех взаимоисключающих событий и их соответствующих вероятностей.

Примечание от переводчика: Здесь «дискретное» значит, что мы имеем дело с конечным числом исходов, которые можно выразить путем простого перечисления в реальных числах.

Это также значит, что мы можем описать различные распределения для одного и того же события. Например, для броска кости мы можем составить второе распределение, но уже для случая, когда на кубике выпадает четное или нечетное число:

$$D' = \{(\text{Четное}, \frac{1}{2}), (\text{Нечетное}, \frac{1}{2})\}$$

В покере мы почти всегда думаем о том, что может оказаться у нашего оппонента на руках. Но весьма редко мы можем сузить круг возможных комбинаций до одной руки. Вместо этого мы создаем распределение для возможных карт оппонента, которое отражает его предполагаемые руки и вероятность того, что они у него окажутся. В начале раздачи распределение вероятностей для руки

каждого из игроков абсолютно одинаково. Но как только делаются первые ставки, и на стол выкладываются новые карты, мы можем использовать полученную информацию, а также знание наших собственных карт, чтобы оценить вероятность каждой из рук в диапазоне оппонентов.

Иногда мы можем привязать численное значение к каждому элементу распределения. Представьте себе, что друг предлагает вам подкинуть монетку. Победитель получит \$10 от проигравшего. Результат подкидывания монетки описывается распределением вероятностей, выведенным нами выше:

$$C = \{(\text{Орел}, 1/2), (\text{Решка}, 1/2)\}$$

Поскольку мы знаем, что это честная монетка, то абсолютно не важно, кто выбирает сторону. Так что мы можем составить второе распределение, но уже для результата ставки:

$$C' = \{(\text{Победа}, 1/2), (\text{Проигрыш}, 1/2)\}$$

Мы можем пойти дальше и подставить численные значения для каждого из исходов. Если мы выигрываем, наш друг заплатит нам \$10. Если мы проигрываем - платим ему \$10. Так что у нас получится следующее распределение:

$$B = \{(+\$10, 1/2), (-\$10, 1/2)\}$$

Когда в распределении присутствуют численные значения для каждого из событий, мы можем найти **математическое ожидание (МО)** этого распределения - для этого нужно каждый результат умножить на соответствующую ему вероятность, а затем сложить полученные значения. В тексте книги мы будем использовать обозначение $\langle X \rangle$, его следует читать как «математическое ожидание события X». Для нашего примера МО будет равно:

$$\langle B \rangle = (1/2)(+\$10) + (1/2)(-\$10)$$

$$\langle B \rangle = \$5 + (-\$5)$$

$$\langle B \rangle = 0$$

Мы надеемся, что такой ответ интуитивно понятен - если мы подкидываем монетку и ставим каждый раз одну и ту же сумму, то наши проигрыши будут равны нашим выигрышам. Так что в среднем мы не получим никакой прибыли. К слову сказать, математическое ожидание для отказа от предложения друга кинуть монетку также равно нулю.

Для распределения «P», где каждый из «n» исходов имеет значение « x_i » и вероятность « p_i », математическое ожидание $\langle P \rangle$ равно:

$$\langle P \rangle = \sum_{i=1}^n p_i x_i \tag{1.11}$$

Примечание от переводчика: Если вы не знакомы с математическим языком, знак $\sum$ означает сумму некоторых слагаемых, обозначенных буквенными индексами. В нашем случае - сумму всех слагаемых с индексом i от 1 и до некоего « n ».

В основе любой выигрышной стратегии в покере или любом другом виде азартных игр лежит идея максимизации математического ожидания. В этом примере ваш друг предлагает честную ставку - в среднем вы не будете ни выигрывать, ни проигрывать больше, чем в случае если бы вы отказались от такой игры.

Теперь представим, что наш друг предлагает нам несколько иную ставку. Он подкинет с нами монетку, и если мы выиграем, то он заплатит \$11, но если выиграет он, то нам придется заплатить всего \$10. И снова математическое ожидание отказа от игры равно 0, в то время как ожидание от самой игры отлично от нуля, поскольку вы можете выиграть больше, чем вам придется заплатить в случае проигрыша. Ваше математическое ожидание от этой новой ставки « B_n » равно:

$$\begin{aligned} \langle B_n \rangle &= \left(\frac{1}{2}\right)(+\$11) + \left(\frac{1}{2}\right)(-\$10) \\ \langle B_n \rangle &= \$0.50 \end{aligned}$$

Получается, что в среднем вы будете выигрывать по 50 центов за одно подкидывание. Конечно же, это не гарантированный выигрыш. Более того, вы никогда не сможете выиграть именно 50 центов за одно подбрасывание монетки. Математическое ожидание существует лишь в виде предельного значения.

Давайте рассмотрим еще один пример. Скажем, ваш друг снова передумал и предлагает новую игру. Вы кидаете пару игральные кости один раз, и если выпадет пара шестерок, то он заплатит вам \$30. Если результат окажется иным, то вы, в свою очередь, будете должны ему \$1. Рассчитаем наше математическое ожидание:

$$\begin{aligned} \langle B_d \rangle &= (+\$30)\left(\frac{1}{36}\right) + (-\$1)\left(\frac{35}{36}\right) \\ \langle B_d \rangle &= \$\frac{30}{36} - \$\frac{35}{36} \\ \langle B_d \rangle &= \$-\frac{5}{36} \quad \text{или около 14 центов.} \end{aligned}$$

Для вас такая игра будет убыточной - в среднем вы проиграете 14 центов за каждый кон. Теперь вам не стоит принимать это предложение, поскольку математическое ожидание отказа равно 0. Скажите своему другу, что вам больше понравилась затея с монетками. Кстати, именно разобранную выше ставку предлагают за столами по игре в кости все казино мира.

Очень важная черта математического ожидания заключается в том, что оно **аддитивно**. Проще говоря, математическое ожидание шести ставок, сделанных подряд, равно сумме сделанных ставок. Большинство азартных игр, как и большинство жизненных ситуаций, работают именно по этому принципу. Нам постоянно предлагается кидать монетку, бросать кости и т.п. Какие-то игры для нас обладают положительным ожиданием, какие-то нет. Иногда рассматриваемое событие будет зависеть вовсе не от монетки, а от договора страхования или доходности облигации. Бесплатные напитки и неугасающие огни Лас Вегаса финансируются миллионами незаметных подкидываний монеток, в каждом из которых казино имеет преимущество. А опытный игрок в покер использует свойство аддитивности каждый раз стараясь делать ставки с положительным математическим ожиданием.

Используя распределение вероятностей в покере, мы часто будем опускать конкретные вероятности для каждой из рук. Когда мы так делаем, это означает, что относительные вероятности для каждой из рук принимаются как если бы карты были только что сданы. К примеру, очень тайтовый игрок сделал рейз, и мы по своему горькому опыту знаем, что он так делает только с сильнейшими руками из следующего распределения:

Примечание переводчика: Фактически, авторы здесь говорят о понятии «диапазона». А распределение с конкретными вероятностями для каждой из руки можно будет назвать «взвешенным диапазоном» - термином, впервые использованном Филом Гальфондом в одной из своих статей.

$$H = \{AA, KK, QQ, AKs, AKo\}$$

Отсутствие вероятности каждой из рук здесь просто означает, что мы считаем относительные вероятности неизменными с момента сдачи карт. Мы также будем использовать обозначение $\langle X \rangle$ для ситуаций, когда мы имеем дело с несколькими распределениями одновременно. Скажем, мы рассматриваем раздачу, в которой у игроков А и В оказываются руки из следующих распределений:

$$A = \{AA, KK, QQ, JJ, AKo, AKs\}$$

$$B = \{AA, KK, QQ\}$$

В таком случае мы будем использовать следующие обозначения:

- $\langle A, B \rangle$: ожидание от розыгрыша распределения А против В
- $\langle A, AA|B \rangle$: ожидание от розыгрыша распределения А против руки АА из распределения В
- $\langle AA|A, AA|B \rangle$: ожидание от розыгрыша руки АА из А против АА из В
- $\langle A, B \rangle = p(AA) \langle A, AA|B \rangle + p(KK) \langle A, KK|B \rangle + p(QQ) \langle A, QQ|B \rangle \dots$ и так далее

Также мы можем совершать простейшие арифметические операции с элементами распределения. Например, если мы умножим все значения исходов на константу, то математическое ожидание нового распределения будет равно ожиданию для старого распределения, умноженному на эту константу. Если же мы прибавим какое-то число к значению каждого исхода, то математическое ожидание, полученное для такого распределения, будет равно МО для исходного распределения плюс это число.

Также стоит уделить пару строк одному из способов выражения вероятности - оддсам (шансам). Оддсы - это отношение вероятности того, что событие не наступит к вероятности того, что оно случится. Оддсы могут выражаться в любом удобном виде и часто записываются как "7 к 5," "3 к 2," и так далее. Например, мы можем говорить об относительной ценности какой-то руки в следующем ключе: «Эта рука фаворит 7 к 3», что следует понимать как: «У этой руки 70% шанс на победу».

Оддсы несколько более сложны в использовании (по сравнению с простыми вероятностями), поскольку их не так легко умножать на исходы событий, чтобы получить математическое ожидание. Однако «настоящие» игроки зачастую используют именно оддсы, поскольку на основании таких соотношений и рассчитываются их выигрыши.

Нужно запомнить

- Вероятность события есть отношение количества тех наблюдений, при которых рассматриваемое событие наступило, к общему количеству наблюдений на бесконечно большой дистанции.
- Распределение вероятностей представляет собой перечень всех возможных взаимоисключающих исходов некоего события, соотнесенных с соответствующими вероятностями.
- Математическое ожидание для распределения вероятностей с численными значениями представляет собой сумму произведений исходов и их вероятностей.
- Математическое ожидание аддитивно.
- Математический подход к покеру в большинстве случаев предполагает максимизацию математического ожидания.

Глава 2

Предсказываем будущее: дисперсия и выборки

Распределения вероятностей с численными значениями обладают двумя параметрами, которые почти полностью описывают поведение случайной величины. Первый из них, математическое ожидание, мы уже рассмотрели в предыдущей главе. Второй называется *дисперсией* и показывает меру разброса случайной величины, то есть ее возможное отклонение от математического ожидания. Если говорить более простым языком, то математическое ожидание говорит нам о том, сколько мы выиграем в среднем, а дисперсия - как далеко от ожидания могут оказаться наши результаты.

Вычисляя дисперсию, мы фактически определяем диапазон возможных результатов после многократного повторения какого-то события. Во многих сферах важно оценивать отклонения от математического ожидания как в положительную, так и в отрицательную стороны - например, на многих производствах существует диапазон допустимых параметров продукта, отклонение от которых (положительное или отрицательное) является крайне нежелательным. Однако в покере дисперсия понимается весьма односторонне - многие игроки редко думают о том, что могут выигрывать больше, чем предсказывает математическое ожидание. Более того, под словом «дисперсия» в большинстве случаев подразумевается исключительно период невезения (или попросту даунсвинг).

Эта точка зрения имеет право на существование, особенно если мы говорим о профессиональных игроках, однако в то же время она учит игнорировать результаты сверх ожидания и, как следствие, прививает мысль о том, что положительные результаты лучше отражают распределение вероятностей для конкретного события.

Одна из основных задач статистики - находить вероятность определенного исхода при заранее заданных условиях (и наоборот - определять условия при уже известном результате). В покере эти две задачи ничуть не теряют своей значимости.

Мы будем называть весь диапазон элементов (значений) с заранее заданными свойствами *генеральной совокупностью*, а диапазон рассматриваемых значений - *выборкой*. В покере мы зачастую не сможем оценить все элементы генеральной совокупности, поэтому основным нашим объектом будут являться отдельные выборки.

Примечание от переводчика: В жизни мы весьма редко столкнемся со случаями, в которых генеральная совокупность заранее известна. Например, если мы изучаем жителей одного города, то в теории мы можем обладать исчерпывающим описанием для каждого элемента совокупности (каждого жителя города). Однако чаще всего генеральная совокупность нам будет неизвестна - скажем, мы никогда не будем иметь полной информации о генеральной совокупности «жители Земли» или «мужчины от 18 до 40».

Большинство курсов и учебников по статистике весьма неплохо объясняют основы вероятности, а также методы составления выборок, проверки гипотез, определения корреляции и так далее. В этой книге мы нередко будем прибегать к правилам и алгоритмам из теории вероятностей и статистики, поэтому ниже приводится краткий обзор некоторых тем, нашедших свое применение в покере (особенно при анализе результатов). Мы специально опустили достаточно большой объем информации, который не относится к предмету этой книги, так что для более подробного изучения рассматриваемых вопросов мы рекомендуем обратиться к соответствующим пособиям.

Весьма распространенный вопрос в покере звучит так: «Как часто я закончу сессию в плюс?». Мы можем перефразировать этот вопрос в следующем ключе: «Какова вероятность того, что в рассматриваемой выборке, сделанной из генеральной совокупности моих сессий, результат будет больше 0?». Наиболее простой ответ на этот вопрос звучит так: проанализируйте распределение ваших сессий в рассматриваемой игре и сложите вероятности для всех случаев, где конечный результат был больше 0.

К сожалению, получить такое распределение вероятностей невозможно - не важно, сколько у вас данных о прошлых раздачах, вы всегда будете иметь дело лишь с выборкой данных, но не с генеральной совокупностью. Но давайте представим, что вы каким-то образом знаете свое математическое ожидание в каждой раздаче и дисперсию в игре, а также сколько в среднем длится ваша игровая сессия. Тогда мы можем использовать статистические методы для того, чтобы оценить, как часто вы будете заканчивать сессию в плюс. Мы уже знаем, что такое математическое ожидание (которое также называется средним значением распределения), осталась только...

Дисперсия

Вторая составляющая наших вычислений - **дисперсия**, мера отклонения случайной величины от математического ожидания. Представьте себе два спора, в одном вы кидаете «честную монетку», в другом - кость, с выплатой 5 к 1 если выпадет шестерка. Обе эти игры обладают нулевым ожиданием, однако второй спор имеет более высокую дисперсию - $\frac{1}{6}$ раз вы получите \$5 (иными словами - на 5 единиц

больше МО), а оставшиеся $\frac{5}{6}$ раз вы заплатите \$1 (или на 1 единицу меньше МО). Чтобы рассчитать дисперсию, нам нужно возвести в квадрат разницу между математическим ожиданием и результатом, умножить на вероятность этого результата, а затем сложить все полученные значения.

Для распределения «Р», где каждый из «n» исходов имеет значение « x_i » и вероятность « p_i », дисперсия « V_p » равна:

$$V_p = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \langle P \rangle)^2 \quad (2.1)$$

Обратите внимание, что каждое слагаемое будет положительным, поэтому дисперсия всегда имеет положительное значение. В рассмотренном выше примере дисперсия при броске монетки равна:

$$V_C = (\frac{1}{2})(1-0)^2 + (\frac{1}{2})(-1-0)^2$$
$$V_C = 1$$

А для игральной кости:

$$V_D = (\frac{5}{6})(-1-0)^2 + (\frac{1}{6})(5-0)^2$$
$$V_D = 5$$

В покере лузовая игра будет обладать гораздо большей дисперсией, чем тайтовая, поскольку ее результаты будут иметь большое отклонение от среднего значения (вы будете выигрывать более крупные банки, однако ваши вероятные проигрыши также возрастут). Стилль игры также имеет влияние на дисперсию: тонкие вэлью-бетты и рейзы с полублефами могут увеличить вашу дисперсию, математическое ожидание или оба этих параметра одновременно. С другой стороны, маниакальная игра увеличивает дисперсию, но при этом уменьшает ожидание. А чрезмерно тайтовая игра уменьшает и ожидание, и дисперсию. В четвертой главе мы рассмотрим теорию ведения банкролла, риски при игре в покер, и изучим влияние дисперсии на ценность денег. Однако за исключением этой главы, мы не будем учитывать дисперсию при принятии решений за столом, поскольку дисперсия является для нас параметром, который лишь описывает ситуацию, а не диктует ход действий (в отличие от математического ожидания).

Дисперсия говорит нам об ожидаемом отклонении от среднего значения распределения (математического ожидания). Также как и математическое ожидание, дисперсия аддитивна. Так что если вы кинете кубик дважды, то ваша дисперсия за два броска составит не 5, как мы уже показали выше, а 10.

Из-за того, что дисперсия считается как квадрат отклонения результата от ожидания, мы не можем сравнивать дисперсию и математическое ожидание напрямую. Если мы хотим это сделать, то нам нужно взять квадратный корень из полученного значения дисперсии - этот параметр также называют **стандартным отклонением**. Для нашего примера с игральной костью стандартное отклонение

для одного броска составляет $\sqrt{5} \approx 2.23$. В большинстве случаев для обозначения стандартного отклонения используется греческий символ «сигма», а «сигма в квадрате» (σ^2) обозначает дисперсию.

$$\sigma = \sqrt{V} \quad (2.2)$$

$$\sigma^2 = V \quad (2.3)$$

Нормальное распределение

Представьте себе, что мы подбрасываем монетку. Результат подбрасывания монетки будет считаться **случайной величиной**. Давайте обозначим два возможных исхода этого события как 1 (орел) и 0 (решка). Таким образом, в результате подбрасывания монетки мы получим либо 1 (половину раз), либо 0 (другую половину раз). Если собрать воедино результаты множества подкидываний, мы получим сумму значений случайной величины, которая называется **выборкой**. Выборочное значение в нашем случае будет равно количеству выпавших орлов.

Теперь представьте себе, что мы подбросили монетку 100 раз. Математическое ожидание для количества выпавших орлов составит 50, то есть в каждом подкидывании математическое ожидание составляет 0.5.

Посчитаем дисперсию и стандартное отклонение для одного подкидывания:

$$\sigma^2 = (1/2)(1 - 1/2)^2 + (1/2)(0 - 1/2)^2$$

$$\sigma^2 = 1/4$$

$$\sigma = 1/2$$

Из предыдущей главы мы знаем, что дисперсия аддитивна. Так что дисперсия от 100 подбрасываний монетки составляет 25.

У нашей выборки есть стандартное отклонение, также как и у одного подкидывания. Однако в отличие от дисперсии, стандартное отклонение не обладает свойством аддитивности - существует специальное правило вычисления «сигмы» для выборки.

Для «N» событий дисперсия (и, как следствие, стандартное отклонение) будет равно:

$$\sigma_N^2 = N\sigma^2$$

$$\sigma_N = \sigma\sqrt{N} \quad (2.4)$$

Квадратный корень из числа событий в формуле стандартного отклонения очень важен, поскольку показывает, как изменяется отклонение при большом

количестве событий. Если мы подбросим монетку всего один раз, то стандартное отклонение составит $1/2$. Но после 100 таких же событий оно будет равно всего 5 (квадратный корень из 100, умноженный на $1/2$).

Распределение исходов случайного события в выборке - это распределение вероятностей, но его также называют **выборочным распределением**. Важной теорией в статистике является **Центральная Предельная Теорема**, по которой с увеличением размера выборки распределение ее значений сходится к специальному виду распределения вероятностей - **нормальному распределению**.

График нормального распределения имеет форму колокола, где пик кривой приходится на среднее значение (математическое ожидание), а концы асимптотически (это значит, что они могут быть бесконечно близки к нулю, но никогда не будут ему равны) приближаются к нулю при значениях «х», уходящих в плюс или минус бесконечность. Форма кривой зависит от стандартного отклонения генеральной совокупности. Площадь под кривой нормального распределения равна единице (как и для всех других распределений вероятности), а область под кривой на интервале $[x_1, x_2]$ (на рисунке обозначена как «А») равна вероятности того, что значение исхода некоего события попадет в интервал между x_1 и x_2 .

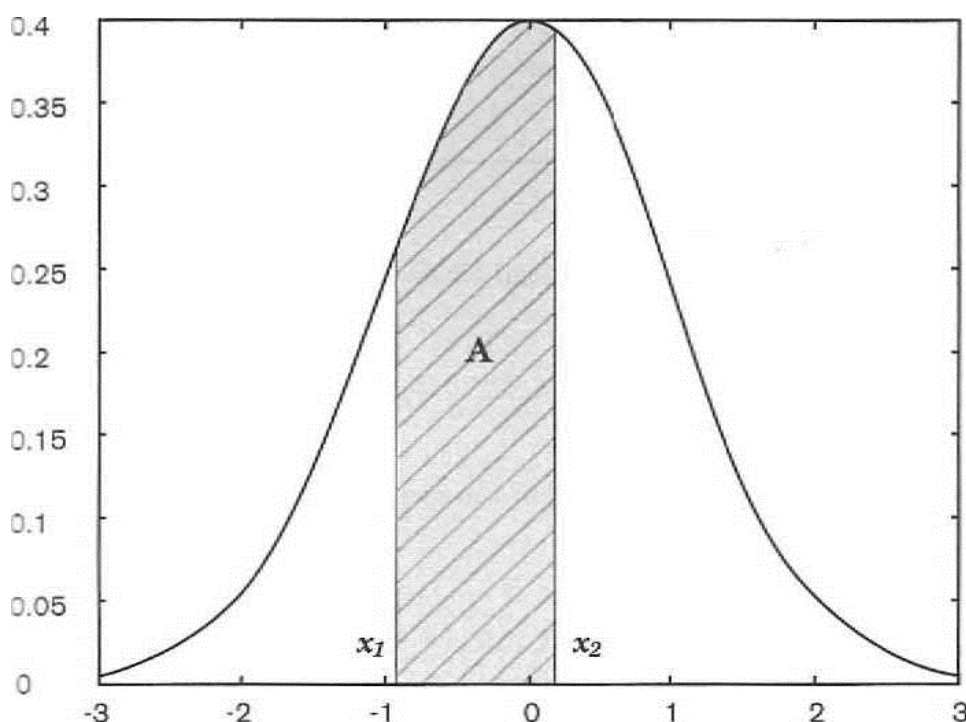


Рисунок 2.1. График нормального распределения

Если говорить чуть более простым языком, то Центральная Предельная Теорема гласит, что если мы возьмем некую генеральную совокупность и будем рассматривать множество больших выборок из нее (размер здесь зависит от типа

данных, которые мы анализируем), то результаты будут заключены в описанную выше куполообразную кривую с центром на математическом ожидании.

Уравнение функции нормального распределения со средним значением μ и стандартным отклонением σ выглядит так:

$$N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.5)$$

Площадь между двумя точками по оси X под кривой нормального распределения равна вероятности того, что некое значение из нашей выборки с соответствующим математическим ожиданием и дисперсией попадет в заданный этими точками промежуток. Нормальное распределение симметрично относительно среднего значения, так что половина ее общей площади находится слева, половина справа. Обычно площадь участков под кривой распределения считается с применением так называемой **z-оценки** (в русской литературе этот термин также называется «нормированием случайной величины»), где $z = (x - \mu)/\sigma$. Она показывает на какое количество «сигм» (стандартных отклонений) некий исход «x» находится от среднего значения распределения.

$$z = (x - \mu)/\sigma \quad (2.6)$$

Затем мы можем найти **интегральную функцию распределения** (также называется интеграл вероятности или функция Лапласа) для z-оценки, которая фактически представляет собой площадь области левее значения «x» под кривой распределения (при математическом ожидании равном 0 и стандартном отклонении 1). Эта функция называется $\Phi(x)$:

Пусть «z» - нормированная z-оценка величины «x», тогда интегральная функция распределения имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad (2.7)$$

Для того, чтобы найти площадь сектора между « x_1 » и « x_2 » нужно посчитать z-оценки « z_1 » и « z_2 » для « x_1 » и « x_2 » соответственно, найти функции распределения $\Phi(z_1)$ и $\Phi(z_2)$ и вычесть из первого значения второе.

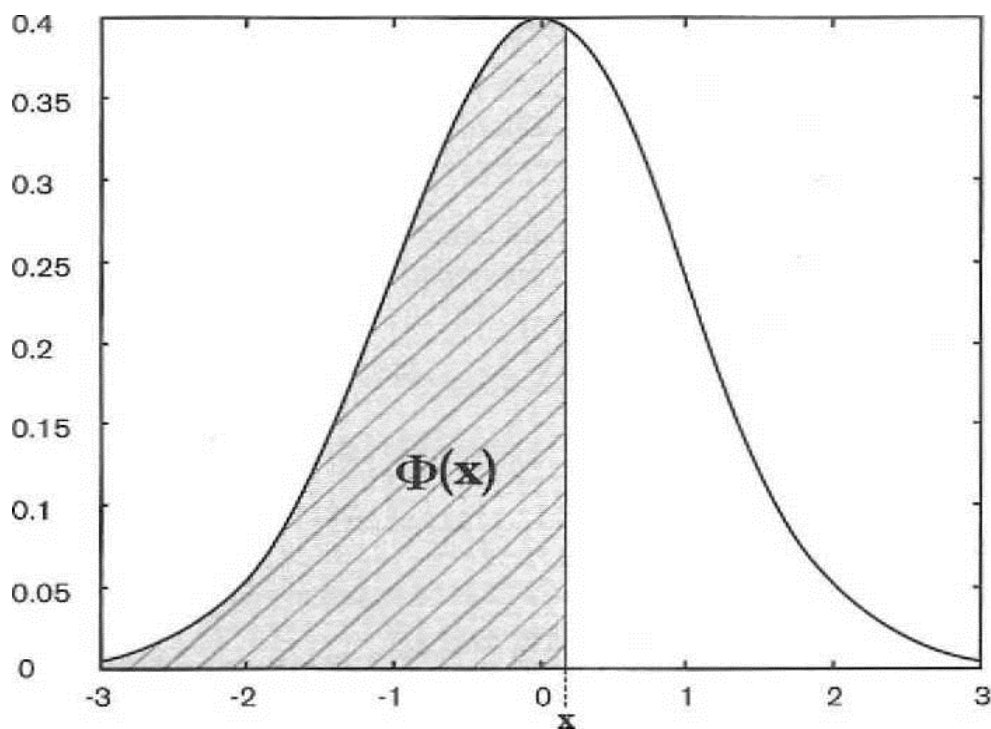


Рисунок 2.2. Интегральная функция распределения

Полученный результат фактически будет означать вероятность попадания заданной случайной величины, распределенной по нормальному закону (со средним значением μ и стандартным отклонением σ), в интервал от « x_1 » до « x_2 »:

$$p = \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.8)$$

Существуют специальные расчетные таблицы и программы для значений $\Phi(x)$, а некоторые конкретные значения этой функции хорошо известны всем, кто хоть раз сталкивался со статистикой. Так, площадь области в пределах одной сигмы (плюс\минус) от математического ожидания приблизительно равна 0.68; в пределах двух сигм - 0.955, а площадь области для трех сигм 0.997.

Это значит, что значение нормально распределенной случайной величины окажется:

- Между $(\mu - \sigma)$ и $(\mu + \sigma)$ 68% раз
- Между $(\mu - 2\sigma)$ и $(\mu + 2\sigma)$ 95.5% раз
- Между $(\mu - 3\sigma)$ и $(\mu + 3\sigma)$ 99.7% раз

Теперь самое время объяснить все вышесказанное на простом примере. Давайте немного изменим условия игры с броском игральной кости, которую мы обсуждали выше. Пусть мы будем выигрывать 6 единиц, если на кубике выпадет шестерка, и проигрывать 1 единицу, если выпадет любое число от 1 до 5. Назовем эту игру D_2 .

Ожидание такой игры составит:

$$\langle D_2 \rangle = (5/6)(-1) + (1/6)(6)$$

$$\langle D_2 \rangle = 1/6 \text{ единицы за бросок}$$

Если выпадает шестерка, то мы выигрываем 6 единиц. Для того, чтобы посчитать дисперсию мы должны сначала вычесть из нашего выигрыша (одного из двух вероятных исходов) значение математического ожидания в игре ($1/6$), а затем возвести эту разность в квадрат:

$$V_{\text{выигрыш}} = (6 - 1/6)^2$$

$$V_{\text{выигрыш}} = (35/6)^2$$

А затем проделать то же самое, но для второго вероятного исхода (проигрыш 1 единицы):

$$V_{\text{проигрыш}} = (-1 - 1/6)^2$$

$$V_{\text{проигрыш}} = (-7/6)^2$$

Таким образом, дисперсия игры составит:

$$V_{D2} = p(\text{выигрыш})(V_{\text{win}}) + p(\text{проигрыш})(V_{\text{lose}})$$

$$V_{D2} = (1/6)(35/6)^2 + (5/6)(-7/6)^2$$

$$V_{D2} \approx 6.806 \text{ единиц}^2/\text{бросок}^2$$

Представим, что мы бросаем кость 200 раз. Какова вероятность того, что мы окажемся в плюсе на такой дистанции? Какова вероятность выигрыша 40 единиц или больше? 100 единиц или больше?

Мы можем решить эту задачу, используя только что выведенные нами методы. Для начала необходимо определить стандартное отклонение для выборки в 200 бросков:

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{6.806} = 2.61 \text{ единиц/бросок}$$

Теперь применим формулу 2.4 и определим сигму для всей выборки

$$\sigma_N = \sigma\sqrt{N}$$

$$\sigma_{200} = 2.61\sqrt{200} = 36.89 \text{ единицы}/200 \text{ бросков}$$

За 200 бросков наше математическое ожидание (среднее значение распределения, μ) составит 33.33 единицы (нужно умножить МО от одного броска на количество событий, то есть на 200). Используем уравнение 2.6 для того, чтобы нормировать значение переменной в точке 0 (то есть проведем z-оценку).

Примечание от переводчика: Это нужно для того, чтобы ответить на первый вопрос - как часто мы будем в плюсе после 200 бросков. Фактически, авторы книги говорят: «Пусть «х» - некая нормально распределенная случайная величина, отражающая наш общий выигрыш за 200 бросков». Теперь мы делаем z-оценку этой величины в точке 0 - очевидно, что все значения случайной величины больше нуля являются ответом на поставленный вопрос.

$$z_x = (x - \mu) / \sigma \quad \text{где } x = 0$$

$$z_0 = (0 - 33.33) / 36.89$$

$$z_0 = -33.33 / 36.89$$

$$z_0 = -0.9035$$

Обратимся к статистической таблице со значениями функции Лапласа - вероятность того, что значение случайной величины окажется слева от точки $x = 0$ (то есть будет меньше нуля) составляет $\Phi(-0.9035) = 0.1831$. Иными словами, 18.31% раз мы окажемся в минусе после 200 бросков. Но все остальное время мы будем в плюсе.

Теперь ответим на второй вопрос - о вероятности выигрыша 40 единиц или больше. Снова сделаем z-оценку случайной величины в заданной точке:

$$z_{40} = (40 - 33.33) / (36.89) = 0.1807$$

$$\Phi(0.1807) = 0.5717$$

Но $\Phi(0.1807)$ говорит нам только о вероятности того, что значение «х» окажется слева от 40 единиц, то есть мы ответили на вопрос: «Какова вероятность выиграть 40 единиц или меньше». Чтобы получить ответ на поставленный вопрос надо сделать следующее:

$$p = 1 - \Phi(0.1807) = 1 - 0.5717$$

$$p = 0.4283$$

Таким образом, существует вероятность в 42.83%, что мы выиграем как минимум 40 единиц после 200 подбрасываний.

Проделаем то же самое для случая со 100 единицами:

$$z_{100} = (100 - 33.33) / (36.89) = 1.8070$$

Из таблицы узнаем, что $\Phi(1.8070) = 0.9646$. Тогда:

$$p = 1 - \Phi(1.8070)$$

$$p = 0.0354$$

Вероятность выиграть 100 единиц или больше составляет 3.54%.

Эти ответы, однако, не являются точными, поскольку выборка в 200 бросков лишь условно распределена по нормальному закону. Для более точных вычислений можно использовать компьютер:

	Точные расчеты	Наши расчеты
Шанс оказаться в плюсе	81.96%	81.69%
Шанс выиграть 40 единиц или больше	40.46%	42.83%
Шанс выиграть 100 единиц или больше	4.44%	3,54%

Как видите, есть некоторые различия. Это является следствием того, что точные расчеты предполагают только реально возможные исходы, а приближенные расчеты на основе нормального распределения допускают любые исходы (например, выигрыш 40.59 единиц).

Теперь вернемся к вопросу, которым мы задались в начале этой главы: «Как часто я закончу сессию в плюс?». Чтобы решить эту задачу нам нужно знать ожидание игрока в каждой раздаче, его дисперсию в каждой раздаче и длину его сессий. Представьте себе игрока, чей винрейт составляет 0.015 большого блайнда за одну руку, а стандартное отклонение составляет - 2 больших блайнда за одну руку. Теперь скажем, что он играет по 300 рук за одну сессию. Как часто этот игрок будет заканчивать сессию в плюс (то есть с результатом больше 0)?

Для начала давайте посчитаем математическое ожидание в одной сессии, μ_N :

$$\mu_N = N\mu$$

$$\mu_N = (300)(0.015)$$

$$\mu_N = 4.5$$

Теперь определим стандартное отклонение за 300 рук:

$$\sigma_N = \sigma\sqrt{N}$$

$$\sigma_{300} = (2)(\sqrt{300})$$

$$\sigma_{300} = 34.6$$

Теперь сделаем z-оценку искомой точки:

$$z_x = (x - \mu_N) / \sigma$$

$$z_0 = (0 - 4.5) / 34.6$$

$$z_0 = -0.1299$$

Из таблицы вероятностей узнаем, что:

$$\Phi(-0.1299) = 44.83\%$$

$$p = 1 - \Phi(-0.1299)$$

$$p = 1 - 0.4483$$

$$p = 0.55171$$

С вероятностью 44.83% такой игрок закончит свою сессию в минус. Соответственно, оставшиеся 55.17% раз он будет выигрывать на дистанции в 300 раздач. Но в реальности же игроки могут менять свой стиль игры и продолжительность сессий, так что винрейт - это постоянно изменяющаяся величина, которая сильно зависит от условий игры, психологических факторов и т.п.

Давайте рассмотрим другой пример. Как-то раз мой знакомый рассказал, что отмечал в блокноте каждое выставление AQ против АК на префлопе (в онлайн) в течение нескольких месяцев. В итоге его выборка составила 2000 сравнений, но и после такого количества раздач AQ выигрывали примерно 50% раз.

Какова вероятность такого результата, если мы полагаем, что карты на сайте сдаются честно, и у нас нет никакой дополнительной информации о мертвых картах (например, кто-то мог скинуть Q2 на префлопе, тем самым лишив AQ одного из аутов)?

Для начала, давайте рассчитаем дисперсию для одного такого сравнения.

АК против AQ имеет около 73.5% эквити в префлоп олл-ине (включая все одномастные комбинации). Скажем, что выигрыш АК приравнивается к 1, а выигрыш AQ - к 0. Таким образом, наше математическое ожидание равно 0.735.

$$V = (0.735)(1 - 0.735)^2 + (0.265)(0 - 0.735)^2$$

$$V = 0.1948$$

$$\sigma = 0.4413$$

Для 2000 раздач ожидание составит:

$$\mu_N = N\mu$$

$$\mu_N = (2000)(0.735)$$

$$\mu_N = 1470$$

На этом же промежутке стандартное отклонение будет равно:

$$\sigma_N = \sigma\sqrt{N}$$

$$\sigma_{2000} = (0.4413)(\sqrt{2000})$$

$$\sigma_{2000} = 19.737$$

Как нам сказали, АК выигрывали примерно 50% за 2000 раздач или 1000 раз, хотя согласно математическому ожиданию это должно было случиться 1470 раз. Сделаем z-оценку, используя уравнение 2.6:

$$z_x = (x - \mu_N) / \sigma$$

$$z_{1000} = (1000 - 1470) / (19.737)$$

$$z_{1000} = -23.815$$

Давайте подумаем о полученном результате. Наша z-оценка говорит, что такой результат находится на расстоянии более чем в 23 стандартных отклонения от среднего значения. На самом деле, вероятность такого события ничтожно мала, поэтому оценить ее очень сложно. Более того, моя таблица значений говорит, что $\Phi(-23.815)$ равно нулю.

Скорее всего, здесь имеет место одно из следующих объяснений: либо этот человек явно преувеличил результаты, либо он врал, либо просто не замечал, как АК выигрывают у AQ, поскольку это достаточно ожидаемый результат. Это психологический эффект - зачастую нам проще заметить необычное явление, нежели ожидаемый и хорошо известный результат. Хотя вполне возможно, что генератор случайных чисел на этом сайте не такой уж и честный.

Когда мы разослали этот вопрос нескольким друзьям, то получили очень разрозненные ответы, некоторые ссылались на высокую дисперсию в покере, а также на то, что «за 2000 рук может случиться все что угодно». Однако это не совсем верно - за 2000 случайных рук в покере действительно можно выиграть или проиграть произвольное количество раз, как раз из-за большой дисперсии в отдельно взятой раздаче со случайными картами. В то же время, здесь мы говорим о раздаче с двумя вполне определенными руками, так что в нашем случае дисперсия не будет столь велика.

Вообще, дисперсия в одной раздаче значительно выше, чем дисперсия игрока, только что выигравшего олл-ин на префлопе. Так что из этого примера стоит извлечь очень важный урок - не стоит путать дисперсию при розыгрыше отдельных раздач с дисперсией случайных величин других категорий.

Во время игры в покер может произойти огромное количество случайных событий. Мы, как и другие игроки за столом, получаем случайные руки из

распределения, которое включает в себя все возможные комбинации, состоящие из двух карт. Потом начинается раунд торговли, за которым следует либо обмен карт, либо выход общих карт на стол (и, как следствие, изменение силы нашей руки). Каждая раздача имеет определенный результат - будь то потеря пары ставок, выигрыш большого банка, или просто блайндов. В свою очередь, этот результат является следствием множества других случайных событий, которые происходят в раздаче. Кроме того, иногда мы имеем дело и с неслучайными факторами - например, мы заметили теллс у одного из оппонентов и использовали его, чтобы выиграть банк без руки, или сэкономили ставку, когда поняли, что были далеко позади. Однако как нам скажет Центральная предельная теорема, результат отдельной раздачи имеет распределение близкое к нормальному (поскольку на него влияет множество несвязанных между собой случайных величин).

Стоит также сказать, что квадратный корень, который присутствует в формуле стандартного отклонения, также играет нам на руку - с увеличением рассматриваемой дистанции вероятность большого отклонения от ожидаемого результата уменьшается.

Представьте, что мы имеем дело с игроком, у которого распределение результатов сыгранных раздач имеет среднее значение равное \$75 за 100 рук, а дисперсия равна \$6,400 в каждой раздаче. Если мы рассмотрим разные выборки, взятые из этого распределения, мы увидим, как размер выборки влияет на итоговую дисперсию. Мы уже знаем, что с вероятностью в 95.5% результат этого игрока на заданной выборке окажется в пределах двух стандартных отклонений от математического ожидания. Введем следующие параметры для каждой выборки:

- Математическое ожидание, μ_N
- Стандартное отклонение, σ
- Две конечных точки интервала с вероятностью попадания 95.5%

Руки	μ_N	σ	Нижняя граница	Верхняя граница
100	\$75	\$800.00	(\$1,525.00)	\$1,675.00
500	\$375.00	\$1,788.85	(\$3,202.71)	\$3,952.71
1,000	\$750.00	\$2,529.82	(\$4,309.64)	\$5,809.64
5,000	\$3,750.00	\$5,656.85	(\$7,563.71)	\$15,063.71
25,000	\$18,750.00	\$12,649.11	(\$6,548.22)	\$44,048.22
50,000	\$37,500.00	\$17,888.54	\$1,722.91	\$73,277.09
100,000	\$75,000.00	\$25,298.22	\$24,403.56	\$125,596.44
1,000,000	\$750,000.00	\$80,000.00	\$590,000.00	\$910,000.00

Как вы можете видеть, на маленьких выборках диапазон возможных результатов очень широк. Однако с увеличением размера выборки результаты становятся все ближе и ближе к математическому ожиданию, хоть в абсолютном выражении они становятся существенно больше. Сравните величину стандартного отклонения для

выборки в миллион рук с таковой для сотни раздач - численно они отличаются в сто раз, но в первом случае величина отклонения незначительна по отношению к математическому ожиданию, чего нельзя сказать о второй выборке. Объяснение этому явлению дает **закон больших чисел** - чем больше выборка, тем меньше она подвержена случайным отклонениям.

Примечание от переводчика: Закон больших чисел фактически гласит следующее. Отдельный результат случайного события подвержен влиянию множества факторов, которые делают его неопределенным. Однако чем больше наблюдений мы проводим, тем меньше остается места для случайности - средний результат большой выборки становится закономерным. Иными словами, совместное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая.

Нужно запомнить

- Дисперсия определяет степень разброса случайной величины (по отношению к ее математическому ожиданию). Она равна сумме квадратов отклонений элементов распределения от математического ожидания.
- Для сравнения дисперсии и математического ожидания мы должны извлечь корень из дисперсии - полученный параметр называется стандартным отклонением.
- Дисперсия аддитивна. Квадратный корень, присутствующий в формуле вычисления стандартного отклонения для выборки, является следствием этого свойства.
- Центральная Предельная Теорема говорит о том, что сумма большого количества независимых случайных величин имеет распределение близкое к нормальному. Это позволяет нам делать оценку сложных событий с использованием нормального закона распределения и лучше понимать поведение случайных величин на длинных дистанциях.

Глава 3

Учимся использовать информацию: оценка параметров и теорема Байеса

В прошлой главе мы описали некоторые статистические свойства распределений вероятностей, а также изучили связь между выборками и нормальным законом распределения. Однако мы сделали весьма важное допущение - мы предполагали, что знаем все основные параметры генеральной совокупности, из которой была взята выборка. В реальности же такое будет происходить весьма редко. Даже для таких простых событий как подброс монетки «настоящие» распределения будут иметь перевес в одну из сторон. А любая игральная кость будет обладать мельчайшими дефектами, которые делают выпадение каких-то чисел более вероятным. Но эти факторы, как правило, имеют незначительный вес, поэтому применение в наших расчетах «идеальной» монетки с шансами 50/50 в подавляющем большинстве случаев будет вполне уместно. По аналогии мы будем полагать, что колода карт, используемая для игры в покер, лишена дефектов и перетасована случайным образом, так что мы никогда не знаем какая карта выйдет следующей, пока она не ляжет на стол.

В случае с распределениями, которые сводятся к «идеальному» случаю без серьезных потерь в точности вычислений (монетка, игральная кость и т.п.), мы без труда можем обойти законы «реального» мира. Однако с некоторыми распределениями возникают сложности совсем другого порядка. Когда мы анализируем свои результаты в покере, как мы уже говорили ранее, нас часто интересует распределение выигрышей и проигрышей по всем раздачам. При игре в казино нам, естественно, было бы весьма непросто отмечать для себя результаты каждой руки, не говоря уже о том, что это может привлечь к нам ненужное внимание. В онлайн покере этот процесс существенно упрощается благодаря доступным для скачивания историям рук и программам, которые следят за нашими сессиями. Но даже имея на руках все эти данные, мы будем обладать не более чем довольно скромной выборкой. Когда дело касается покерный раздач, распределение вероятностей из генеральной совокупности практически невозможно оценить, если только вы не являетесь счастливым обладателем по-настоящему гигантского объема данных.

Мы можем частично обойти эту проблему, используя методы, описанные в предыдущей главе. Предположим, что у нас есть математическое ожидание и дисперсия для выборки с результатами раздач. Теперь мы можем составить выборочное распределение и предсказать конечный результат на различных дистанциях. Однако важно понимать, что у нас не получится найти точное количество денег, которые мы выиграем или проиграем в будущих раздачах, мы лишь сможем найти диапазон ожидаемых результатов.

Основная проблема, которая встает перед нами теперь - это определение среднего значения и дисперсии для генеральной совокупности на основании среднего значения и дисперсии отдельной выборки. Мы рассмотрим два подхода к решению этой задачи. В первом случае мы обратимся к классической статистике, а во втором - к теме этой главы, теореме Байеса. При использовании статистического метода мы будем считать, что у нас нет никакой информации кроме выборки, которая говорит о вероятности какого-то определенного винрейта. Второй же подход подразумевает, что существует некое распределение винрейтов вне нашей выборки, которое может быть использовано для оценки среднего значения и дисперсии генеральной совокупности.

Оцениваем параметры: классическая статистика

Представьте себе, что перед нами человек, который сыграл 16900 рук в лимитный покер. Мы можем привести его результат к выигрышу в больших ставках (big bets) за сто раздач, чтобы сгладить различие между руками, сыгранными на разных лимитах. Получим винрейт $\bar{x} = 1.15 \text{ BB}/100$ со стандартным отклонением $s = 2.1 \text{ BB}$ за раздачу. Здесь вместо μ и σ , которые обозначают параметры генеральной совокупности, мы используем обозначения $\bar{x}$ и s , поскольку пока мы анализируем только выборку. Предположим, что этот игрок продолжит играть в тех же играх, с теми же оппонентами. Как мы можем определить его «истинный» винрейт μ ? В этой главе мы будем считать, что никакой дополнительной информации о вероятности различных винрейтов у нас нет. Так что все винрейты будут одинаково возможными.

Для начала нужно отметить, что мы работаем лишь с отдельной выборкой, поэтому реальное значение винрейта игрока не будет точным. Однако мы уже знаем, что по Центральной Предельной Теореме выборочное распределение в 16900 рук из лимитного покера будет приближенным к нормальному. Известное нам стандартное отклонение $s = 2.1 \text{ BB}$ за раздачу является неплохой оценкой отклонения для генеральной совокупности, поскольку наша выборка более-менее существенна. Мы можем использовать эту информацию для того, чтобы рассчитать **наиболее вероятное значение** математического ожидания для генеральной совокупности.

Представьте себе все возможные винрейты. Для каждого из них будет существовать своя выборка, нормальная кривая с ожиданием μ и стандартным отклонением σ_N . Пик каждой из кривых будет приходиться на точку $x = \mu$, в то время как все остальные точки окажутся ниже. Теперь давайте на секунду представим, что это μ и есть среднее значение для генеральной совокупности. По высшей точке кривой в $x = \bar{x}$ мы сможем определить вероятность того, что результат на дистанции, рассматриваемой в выборке, будет равен именно ее математическому ожиданию. Мы можем найти эту вероятность для любых возможных значений μ . Поскольку все рассматриваемые нами нормальные кривые будут иметь одинаковое отклонение σ_N , они будут идентичны по форме,

но смещены по оси X в зависимости от своего среднего значения.

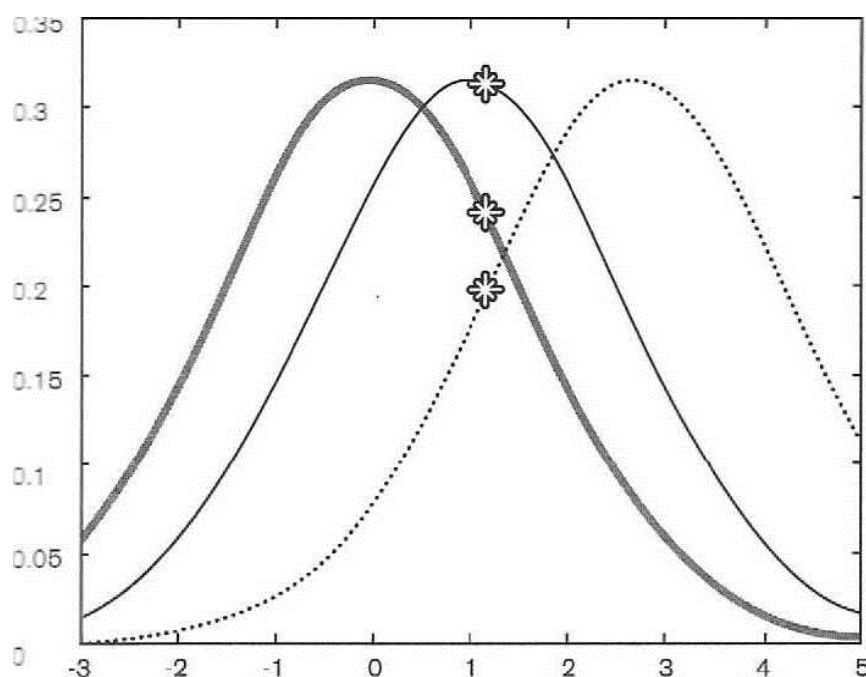


Рисунок 3.1. Кривые нормального распределения для выборок с различным математическим ожиданием (все маркеры находятся на уровне 1.15)

Примечание от переводчика: Здесь рассматриваются несколько кривых при заданном математическом ожидании. Значение 1.15 попадает на кривых, где пик не находится в точке « $x = 1.15$ » на нижние ветви, то есть на них оно является менее вероятным, что и показано на рисунке.

Итак, поскольку пик кривой приходится на имеющееся у нас значение $\bar{x}$, а это наиболее вероятное значение на всей кривой, при $\mu = \bar{x}$ это значит, что $\bar{x} = 1.15$ BB/100 и есть наиболее вероятное значение математического ожидания. Это может показаться очевидным, но когда мы будем рассматривать эту задачу с позиции теоремы Байеса, мы покажем, что наиболее вероятное значение не всегда равняется математическому ожиданию выборки, если мы включим в наши расчеты дополнительную информацию.

Теперь мы знаем наиболее вероятное значение винрейта - на основании нашей выборки оно равно математическому ожиданию. Хотя это и весьма полезная информация, мы все еще не решили проблему неопределенности результата. Ведь нашему игроку могло повезти, или наоборот его настигла череда неудач. Давайте рассчитаем стандартное отклонение для всей выборки, а затем проанализируем полученные цифры и поговорим о вероятных винрейтах.

У нас есть выборка «N» на 16900 рук из некой генеральной совокупности с винрейтом (средним значением) 1.15 BB/100 и стандартным отклонением 2.1 BB за раздачу.

Используя формулу 2.4 получим:

$$\sigma_N = \sigma\sqrt{N}$$

$$\sigma_{16900} = (2.1 \text{ BB})(\sqrt{16900} \text{ раздач})$$

$$\sigma_{16900} = 273 \text{ BB}$$

$$\sigma_N / 100 = 273 / 169 \sim 1.61$$

Полученное отклонение за 100 рук для такой выборки оказалось больше самого винрейта. Представьте, что мы знаем параметры генеральной совокупности, и они в точности равны тому, что мы сейчас получили для этой выборки. Если бы мы взяли еще одну выборку на 16900 раздач, то 32% раз результат на этой дистанции был бы меньше, чем $-0.46 \text{ BB}/100$ или больше $2.76 \text{ BB}/100$.

Примечание от переводчика: Почему именно 32% раз? Здесь стоит вспомнить правило «сигм», которое разбиралось в предыдущей главе - около 68% раз значение нормально распределенной случайной величины попадает в пределы одного стандартного отклонения от математического ожидания. Границы полученного интервала и есть точки, где мы отнимаем от математического ожидания одну «сигму» или прибавляем. Соответственно, 68% раз наш винрейт окажется в этом промежутке, а остальные 32% раз вне его пределов.

Неприятный ответ, правда? Как мы можем быть уверены в том, что наша выборка действительно дает нам хорошее представление о среднем значении для генеральной совокупности, когда даже результат еще одной такой же выборки окажется за пределами и без того огромного промежутка (от -0.46 до 2.76) почти 32% раз? Что если реальное значение МО для генеральной совокупности равно нулю? Тогда винрейт в 1.15 окажется как раз в пределах одной сигмы от ожидания. Более того, по всей видимости, при такой выборке мы действительно не можем сказать, какой из винрейтов наиболее вероятен: 0 или $1.15 \text{ BB}/100$.

Чтобы нивелировать эту неопределенность, мы можем рассчитать **доверительный интервал**. Чтобы это сделать, нам нужно определить **уровень значимости**. Поскольку мы имеем дело со статистикой, мы не можем просто сказать, что вероятность какого-то определенного винрейта для генеральной совокупности равно нулю - всегда существует возможность большого везения. Или невезения. Но мы можем выбрать так называемый уровень значимости (его также иногда называют степенью надежности). Фактически это вероятностное значение, которое описывает допустимую ошибку. Выведенный таким образом доверительный интервал и будет являться ответом на вопрос: «Какие значения может принимать математическое ожидание генеральной совокупности, при условии, что выборочное значение МО будет в пределах выбранного уровня значимости?»

Скажем, что для нашего игрока мы выбрали уровень значимости 95%. Теперь мы можем построить доверительный интервал. Обозначим среднее значение генеральной совокупности как μ , тогда значение математического ожидания из выборки окажется между $(\mu - 2\sigma)$ и $(\mu + 2\sigma)$ 95% раз. Теперь мы можем найти границы заданного нами интервала:

Как мы уже показали выше, стандартное отклонение за 16900 рук составляет 1.61 BB/100.

Решим два неравенства, которые зададут границы доверительного интервала для математического ожидания:

$$(\mu - 2\sigma) < 1.15$$

$$(\mu + 2\sigma) > 1.15$$

$$(\mu - 2\sigma) < 1.15$$

$$\mu - (2)(1.61) < 1.15$$

$$\mu < 4.37$$

$$(\mu + 2\sigma) > 1.15$$

$$\mu + (2)(1.61) > 1.15$$

$$\mu > -2.07$$

Таким образом, 95% доверительный интервал для винрейта этого игрока (на основании нашей выборки в 16900 раздач) выглядит следующим образом: [-2.07 BB/100, 4.37 BB/100].

Это не значит, что истинный винрейт с вероятностью в 95% окажется внутри этого интервала. По правде говоря, это одно из наиболее распространенных заблуждений о доверительных интервалах. На самом деле доверительный интервал просто говорит нам о том, что если полученные значения винрейта (от -2.07 до 4.37) были бы истинными для генеральной совокупности, то наблюдаемый нами винрейт в нашей частной выборке оказался бы одним из 95% наблюдаемых результатов. Классическая статистика не проводит вероятностных оценок значений параметров - наоборот, с классической точки зрения истинный винрейт либо находится на вычисленном интервале, либо нет (поскольку он не является результатом случайного события). Никакая выборка не может дать нам уверенность в точной оценке искомого параметра. Мы можем лишь делать предположения о вероятности (или невероятности) того, что мы бы могли получить значение этого параметра как в выборке, если бы истинное значение для всей совокупности было равно какой-то точке на доверительном интервале.

Наиболее вероятное значение и доверительный интервал - это полезные инструменты, помогающие нам лучше понять, какую информацию мы можем

получить из предоставленной выборки. В случае, описанном выше, хоть винрейт 1.15 BB/100 и может выглядеть адекватным, но считать, что он близок к истинному винрейту было бы более чем опрометчиво. Доверительный интервал может дать нам представление о широте вероятных значений винрейта для генеральной совокупности. В крайнем случае, лучшей оценкой винрейта этого игрока можно считать полученное нами наиболее вероятное значение, равное математическому ожиданию выборки (1.15 BB/100)

До этого момента мы предполагали, что у нас нет никаких дополнительных сведений о вероятностях различных винрейтов - наша выборка была единственным источником информации о предполагаемом значении математического ожидания для генеральной совокупности. Но в реальности некоторые винрейты окажутся более вероятными, и такое предположение можно сделать даже до начала анализа имеющихся данных. Представьте, что вы сыграли 5.000 раздач в казино и выиграли 500 больших ставок, ваш винрейт составил 10 больших ставок за 100 рук. В таком случае, используя методы из этой главы, мы бы получили наиболее вероятный винрейт равный 10 BB/100.

Однако это далеко не вся информация, которая у нас есть. Мы собрали достаточно большой объем данных (со слов игроков и из баз сыгранных раздач), который указывает на то, что для людей, отыгравших значимые дистанции, самый высокий винрейт составляет примерно 3-4 BB/100. Даже те уникалы, которые выигрывают больше, и приблизиться не могут к 10 BB/100. Поскольку мы получили эту информацию задолго до начала анализа, мы можем считать ее независимой от дальнейших вычислений.

На самом деле, если мы возьмем одного игрока из числа всех любителей покера в мире, то для его винрейта уже будет существовать некое распределение вероятностей. Конечно же, мы не имеем ни малейшего представления о форме и параметрах такого распределения, поскольку у нас просто нет данных о результатах всех игроков. Однако если мы можем делать адекватные предположения о генеральной совокупности винрейтов, существующей априори, нам будет легче проводить точную оценку искомых параметров, поскольку мы будем использовать данные сразу из двух источников

Теорема Байеса

Во второй главе мы постулировали базовое свойство вероятности (формула 1.5):

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A)$$

Это уравнение позволяет нам рассчитать вероятность совместного наступления событий A и B, зная вероятность события A, а также вероятность события B (при условии, что событие A уже произошло). Однако в покере мы гораздо чаще заинтересованы в том, чтобы узнать вторую составляющую этой формулы - к

примеру, мы знаем, какие карты находятся у нас в руке (A), и теперь хотим знать, как эта информация повлияет на возможные карты в руке нашего оппонента (B). То есть мы должны найти вероятность события B при условии, что событие A уже произошло.

Мы можем изменить формулу 1.5 для того, чтобы рассчитать искомую вероятность. Это уравнение получило название *теорема Байеса*:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad (3.1)$$

В первой главе мы обозначили $\bar{B}$ как обратное событие для B:

$$\begin{aligned} p(\bar{B}) &= 1 - p(B) \\ p(B) + p(\bar{B}) &= 1 \end{aligned}$$

Также у нас есть формула 1.5:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A)$$

Поскольку мы знаем, что B и $\bar{B}$ в сумме составляют 1, $p(A)$ можно выразить как вероятность A при условии, что событие B уже произошло, плюс вероятность A при условии, что событие $\bar{B}$ уже произошло.

Перепишем уравнение 3.1 в новой форме:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A|B)p(B) + p(A|\bar{B})p(\bar{B})} \quad (3.2)$$

В покере теорема Байеса позволяет уточнять нашу оценку вероятности какого-то события на основании полученной информации. Сильные игроки постоянно используют теорему Байеса, когда узнают новые факты - применение этой концепции лежит в основе чтения рук и эксплуатации оппонентов, как мы покажем во второй главе книги.

Классический пример теоремы Байеса можно взять из медицины. Предположим, что нам назначено обследование с целью выявить определенную болезнь. Если мы больны, то с вероятностью 80% заболевание будет выявлено. Если же мы здоровы, то 10% раз по результатам обследования нам ошибочно сообщат, что мы больны. Также мы знаем, что в среднем 5% населения страдают от этой болезни.

Нас случайным образом выбрали из числа всех людей и отправили на обследование. Приходит положительный результат - мы больны. Какова вероятность того, что это так и есть (не принимая во внимание возможность дополнительных обследований)?

Если ваш ответ «около 80%», то вы, как и многие другие, сильно заблуждаетесь. На самом деле, многие доктора тоже не знают правильного ответа, демонстрируя пугающее незнание теоремы Байеса.

Мы можем использовать эту теорему, чтобы решить поставленную задачу. Введем следующие обозначения:

A = положительный результат обследования

B = пациент действительно болен

Мы уже знаем вероятность (A|B) из условий:

$$p(A|B) = 0.8$$

(если мы больны, то с вероятностью 80% заболевание будет выявлено)

$$p(A|\bar{B}) = 0.1$$

(10% раз результат обследования будет неверным)

$$p(B) = 0.05 \quad (5\% \text{ всех людей страдают этой болезнью})$$

$$p(\bar{B}) = 0.95 \quad (95\% \text{ всех людей здоровы})$$

Обратимся к уравнению 3.2:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A|B)p(B) + p(A|\bar{B})p(\bar{B})}$$

$$p(B|A) = \frac{(0.8)(0.05)}{(0.8)(0.05) + (0.1)(0.95)}$$

$$p(B|A) \approx 29.63\%$$

Как видите, вероятность того, что пациент, которого признали больным по результатам обследования, на самом деле болен оказывается существенно меньше 80%. Проще говоря, полагаться на одно такое обследование мы не можем - потребуются дополнительные процедуры, чтобы точно установить наличие или отсутствие болезни.

Можно также пойти и по другому пути. Скажем, есть 100000 пациентов, которых обследовали по такому же методу.

Из 100000 обследованных

5000 на самом деле больны (5% людей)

95000 здоровы (95% людей)

Из 5000 больных:

4000 получают положительный результат	(80% людей с заболеванием)
1000 получают отрицательный результат	(20% ошибочных диагнозов)

Из 95000 здоровых людей

9500 получают положительный результат	(10% ошибочных диагнозов)
85500 получают отрицательный результат	(90% здоровых людей)

Вопрос, которым мы задались в начале, звучал так: если по результатам обследования окажется, что мы больны, с какой вероятностью у нас на самом деле есть эта болезнь? Из 100000 пациентов 13500 получили положительный диагноз. Но только для 4000 людей этот диагноз верный:

$$p(B|A) = 4000 / 13500$$

$$p(B|A) \approx 29.6\%$$

Если мы увеличим точность обследования (путем уменьшения количества ложных диагнозов или увеличения частоты правильных диагнозов для больных людей), мы сможем повысить условную вероятность того, что у получившего положительный результат человека на самом деле окажется искомая болезнь. Заметьте, что это ни в коем случае не увеличит количество больных - такая медицина нам не нужна! Наоборот, усовершенствованный метод обследования уменьшит количество людей, получивших ошибочный положительный диагноз.

Теперь предположим, что мы на самом деле улучшили процедуру обследования, теперь она со 100% точностью выявляет больных людей, но процент ошибочных диагнозов не поменялся:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A|B)p(B) + p(A|\bar{B})p(\bar{B})}$$

$$p(B|A) = \frac{(1)(0.05)}{(1)(0.05) + (0.1)(0.95)}$$

$$p(B|A) \approx 34.5\%$$

Если же мы оставим уровень определения болезни на 80%, но уменьшим частоту ошибочных диагнозов с 10% до 6%, то получим:

$$p(B|A) = \frac{(0.8)(0.05)}{(0.8)(0.05) + (0.06)(0.95)}$$

$$p(B|A) \approx 41.2\%$$

Для применения теоремы Байеса необходимо наличие некой базовой (априорной) вероятности и появление новой информации. В нашем примере априорной вероятностью было наличие болезни у 5% людей. Положительный результат после обследования был той самой дополнительной информацией, которая позволила нам заново оценить вероятность искомого события. Это называется *Байесовской логикой* - ее значение для успешного игрока в покер сложно переоценить.

Существует огромное множество ситуаций, в которых можно применить Байесовскую логику. Многие игроки в покер используют ее постоянно, сами того не подозревая. Представьте себе обычный турнирный эпизод - ваш стол расформировали почти сразу после начала турнира. Вас пересаживают за новый, где у игрока справа от вас оказывается стэк в семь раз больше начального, в то время как остальные участники турнира едва ли набрали пару тысяч фишек. Большинство людей сделало бы следующий вывод: игрок с большим стэком либо очень лузовый и агрессивный, либо ему сказочно повезло. Чаще всего мы будем склонны считать, что верно именно первое предположение. Но это и будет следствием теоремы Байеса, причем здесь не имеет значения, знаем мы о ней или нет.

В таких случаях мы можем использовать теорему Байеса для оценки оппонентов, и это позволит нам принимать верные решения даже в условиях отсутствия точной информации. Рассмотрим следующий пример.

За стол садится новый игрок. В первые несколько минут мы пытаемся понять, что он собой представляет, используя все доступные нам факторы: национальность, пол, манеры, одежда, речь и так далее. Мы делаем вывод, что с вероятностью 10% он окажется маньяком, который будет делать рейз с кат-оффа с 80% рук, а остальные 90% раз он будет обычным тайтовым игроком с диапазоном оупен-рейза 10%. Первая раздача, он делает рейз из кат-оффа (позиции здесь не так важны). Какова вероятность того, что перед нами маньяк?

Мы можем использовать теорему Байеса для того, чтобы ответить на этот вопрос. Но перед тем как посчитаем эту вероятность, подумайте сами, как бы вы ответили? На наш взгляд, тренировка интуиции - это лучший способ научиться давать событиям и ситуациями правильную оценку.

A = Оппонент сделает рейз на кат-оффе в первой раздаче

B = Оппонент маньяк

$p(A|B) = 0.8$ (если он маньяк, то будет открывать 80% рук)

$p(A|\bar{B}) = 0.1$ (если он не маньяк, то его диапазон составит 10%)

$p(B) = 0.1$ (10% раз он априори маньяк)

$p(\bar{B}) = 0.9$ (90% раз он априори не маньяк)

Снова применим теорему Байеса:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A|B)p(B) + p(A|\bar{B})p(\bar{B})}$$

$$p(B|A) = \frac{(0.8)(0.1)}{(0.8)(0.1) + (0.1)(0.9)}$$

$$p(B|A) \approx 47.1\%$$

Просто наблюдая за действиями оппонента в первой раздаче, мы можем скорректировать свою оценку - теперь вероятность того, что этот игрок маньяк составляет не 10%, а 47%! Если он сделает рейз в первых двух раздачах, то шансы на такой исход возрастут еще больше - до 87%. Конечно же, эти вероятности всецело зависят от правильности нашего первоначального суждения, в реальности мы редко столкнемся всего с двумя типами игроков, а наши сиюминутные суждения явно не будут настолько точными.

Многие стараются отложить оценку своего оппонента до того момента пока они не получат больше информации или не увидят пару шоудаунов. Но на наш взгляд это чрезмерно пассивный подход; максимизация математического ожидания предполагает использование всей информации, которая есть в нашем распоряжении, и не обязательно выжидание подходящей ситуации. Таким образом, они совершают главную ошибку - не осознают ценность тех сведений, которыми уже обладают. Стоит правда отметить, что некоторые игроки, даже не очень хорошие, все же интуитивно это понимают и подстраиваются соответствующим образом. Но! Всегда помните, что любая подстройка может быть эксплуатирована вашим оппонентом, например, когда он, только сев за стол, выбирает новый для себя стиль игры, чтобы использовать сиюминутные подстройки других игроков.

Сильные игроки постоянно используют Байесовскую логику (осознанно или нет) для переработки поступающей информации. Как мы покажем во второй части книги, этот подход лежит в основе чтения рук и эксплуатации оппонентов. Но даже вне стола мы можем найти применения теоремы Байеса, и сейчас самое время вернуться к разговору о винрейтах.

Оцениваем параметры: Байесовская статистика

В первой части этой главы мы изучали выборку в 16900 раздач из лимитного покера со следующими параметрами:

Винрейт ($\bar{x}$) = 1.15 BB/100

Стандартное отклонение (s) = 2.1 BB за раздачу

Как вы помните, мы столкнулись с некоторыми сложностями при определении «истинного» винрейта по имеющейся выборке - наши предположения едва ли были точными. С помощью инструментов классической статистики мы определили, что наиболее вероятным значением винрейта рассматриваемого игрока будет 1.15 BB/100, а его 95% доверительный интервал оказался равным [-2.07 BB/100, 4.37 BB/100]. Эти оценки были сделаны на основе допущения о том, что мы не обладали никакой дополнительной информацией о распределении винрейта этого игрока.

Теперь предположим, что у нас есть некоторые догадки о распределении винрейтов. Значит, мы можем применить теорему Байеса и получить более точную оценку искомого параметра - «истинного» винрейта (для генеральной совокупности). Звучит просто, верно? Однако сначала нам нужно определиться с догадками об общем распределении винрейтов. Пусть наш игрок был случайным образом выбран из числа всех людей, регулярно играющих в покер. Тогда перед нами встает вопрос: «Какой вид имеет общее распределение в этом случае (оно также будет называться *априорным распределением*)?».

Примечание от переводчика: Априорное распределение - распределение вероятностей, которое выражает предположения о неизвестной величине до учёта экспериментальных данных. Например, если «p» — доля избирателей, готовых голосовать за определённого кандидата, то априорным распределением будет предположение о «p» до учёта результатов опросов или выборов.

С первого взгляда может показаться, что представить такое распределение невозможно. В конце концов, у нас нет доступа к результатам подавляющего большинства игроков. Однако здесь нам на помощь придут упрощения и приближенные оценки, к которым мы прибегнем, надеясь, что предполагаемое распределение окажется достаточно близко к реальному - тогда мы сможем использовать его в своих расчетах. Будем считать, что наш игрок обычно садится за столы с не очень высокими ставками, например от \$10-\$20 до \$30- \$60. Рейк, который платит стол, скорее всего, находится на уровне \$3-\$4 за раздачу, или 0.1 BB. Разделим эту величину на количество игроков за столом, предполагая, что все платят примерно одинаковый рейк - получим, что комиссия комнаты отнимает из винрейтов всех игроков около 0.01 BB каждую раздачу, или 1 BB/100.

Тогда среднее значение общего распределения винрейтов будет равно минус 1 BB/100, поскольку рейк представляет собой чистый отток денег из игры. Пусть это распределение винрейтов подчиняется нормальному закону, а стандартное отклонение равно 0.015 BB за одну раздачу. Получим, что 68% игроков будут иметь винрейт в пределах от -2.5 BB/100 до +0.5 BB/100, а 95% игроков - от -4 BB/100 до +2 BB/100, что является вполне ожидаемым результатом. Если вам кажется, что мы где-то ошиблись, вы можете самостоятельно изменить эти цифры, чтобы они отражали ваши собственные предположения, при этом логика

вычислений нисколько не поменяется.

Давайте упростим наши расчеты и вместо непрерывного нормального распределения представим дискретное распределение, которое более-менее точно описывает составленную нами модель. Получим следующую картину для распределения винрейтов всех игроков:

Примечание от переводчика: Непрерывное распределение (нормальное распределение относится к этому типу) предполагает, что возможны абсолютно все значения случайной величины. Дискретное же распределение ограничено некоторым конечным количеством значений. Это упрощенное определение, но оно подходит для целей настоящей главы.

Винрейт	% игроков с таким винрейтом
-5 BB/100	0.25%
-4 BB/100	2%
-3 BB/100	8%
-2 BB/100	20%
-1 BB/100	39.5%
0 BB/100	20%
+1 BB/100	8%
+2 BB/100	2%
+3 BB/100	0.25%

Теперь у нас есть априорное распределение винрейтов для игроков в покер, и мы можем без труда применить теорему Байеса. Для каждого винрейта мы рассчитаем:

A = вероятность получения винрейта 1.15 BB/100

B = вероятность того, что этот винрейт является истинным

Мы не сможем найти вероятность получения определенного винрейта напрямую, однако мы можем заменить ее на вероятность того, что наблюдаемый винрейт окажется в промежутке от 1.14 до 1.16. $p(A|\bar{B})$ получается путем вычисления взвешенного среднего от столбца $p(A|B)$ за исключением текущего значения $p(\bar{B})$:

Винрейт	$p(\bar{B})$	$p(A B)$	$p(A \bar{B})$	$p(B)$
- 5 BB/100	0.25%	0.000004	0.00222555	99.75%
- 4 BB/100	2%	0.000031	0.00226464	98%
- 3 BB/100	8%	0.000182	0.00239720	92%
- 2 BB/100	20%	0.000738	0.00259053	80%
- 1 BB/100	39.5%	0.002037	0.00233943	60.5%
0 BB/100	20%	0.003834	0.00181659	80%
+ 1 BB/100	8%	0.004918	0.00198539	92%
+ 2 BB/100	2%	0.004301	0.00217753	98%
+ 3 BB/100	0.25%	0.002564	0.00221917	99.75%

Применим теорему Байеса к каждому ряду:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A|B)p(B) + p(A|\bar{B})p(\bar{B})}$$

Винрейт	$p(B A)$
- 5 BB/100	0.00%
- 4 BB/100	0.03%
- 3 BB/100	0.66%
- 2 BB/100	6.65%
- 1 BB/100	36.25%
0 BB/100	34.54%
+ 1 BB/100	17.72%
+ 2 BB/100	3.87%
+ 3 BB/100	0.29%
Итого	100%

Когда мы рассматривали классический подход, нам удалось вычислить наиболее вероятное значение винрейта. Здесь мы можем проделать то же самое, но теперь это значение с учетом всех наших предположений будет равно -1 BB/100. Естественно эти допущения не дают полной картины, поскольку распределение возможных винрейтов для всех игроков в реальности близко к непрерывному. Но даже если бы мы решили использовать не дискретную, а непрерывную модель, и справились с достаточно громоздкими расчетами, мы бы все равно получили схожее распределение. Ключевой идеей здесь является то, что поскольку плюсовых игроков настолько мало, в теории мы можем иметь дело как с выигрывающим, так и с проигрывающим регулярном (которому просто повезло на дистанции в 16900 рук).

Давайте приведем еще более наглядный пример - возьмем игрока с гораздо большим винрейтом в наблюдаемой выборке, например 5 BB/100. Классический подход скажет нам, что его наиболее вероятный винрейт составит 5 BB/100, поскольку предполагается, что все винрейты равновероятны (помните, что в

классическом методе у нас нет информации о распределении всех винрейтов). Проведем аналогичные расчеты для нового случая:

Винрейт	$p(A B)$
- 5 BB/100	0.00%
- 4 BB/100	0.00%
- 3 BB/100	0.00%
- 2 BB/100	0.16%
- 1 BB/100	3.79%
0 BB/100	15.78%
+ 1 BB/100	35.40%
+ 2 BB/100	33.84%
+ 3 BB/100	11.03%
Total	100%

Теперь наш игрок наверняка имеет положительный винрейт, причем весьма высокий. Однако поскольку винрейты в 5 BB/100 и выше не представлены в общем распределении, теорема Байеса переоценивает винрейт из выборки до более вероятного в этих условиях винрейта лучших 10% игроков.

Увеличение количества данных (для случая с 1.15 BB/100) вполне ожидаемо приведет оценку винрейта через теорему Байеса к винрейту, наблюдаемому в выборке. Если игрок демонстрирует способность выигрывать на значительной дистанции, то его фактический винрейт с гораздо большей вероятностью окажется истинным. Представим, что мы имеем дело с выборкой в 100000 раздач:

Винрейт	$p(A B)$
- 5 BB/100	0.00%
- 4 BB/100	0.00%
- 3 BB/100	0.00%
- 2 BB/100	0.00%
- 1 BB/100	1.57%
0 BB/100	33.42%
+ 1 BB/100	58.37%
+ 2 BB/100	6.60%
+ 3 BB/100	0.04%
Total	100%

Очевидно, что с такой выборкой у нас будет больше уверенности, что 1.15 BB/100 и будет нашим настоящим винрейтом, хотя общее распределение предполагает, что лишь 10% всех игроков имеют винрейт хотя бы в 1 BB/100.

Стоит отметить, что между приверженцами классического подхода и теории Байеса существуют некоторые разногласия. Предметом их спора является то, что теорема Байеса предлагает рассматривать параметры генеральной совокупности как случайные величины со своими распределениями. Однако их оппоненты отвергают эту идею и предпочитают говорить о параметрах генеральной совокупности как о константах, хотя они и не в состоянии определить их значения. Мы, в свою очередь, отдаем предпочтение Байесовскому подходу в силу его применимости в покерном анализе.

Метод, который был использован нами выше, даже не является полноценным - мы намеренно упростили методику Байесовского анализа, чтобы сделать эту теорию более доступной. За более подробным объяснением теоремы Байеса, а также сути разногласий между двумя рассмотренными нами подходами, мы рекомендуем обратиться к специализированным учебникам, в особенности к тем, в которых представлены обе точки зрения.

Последнее о чем мы бы хотели сказать - *регрессия к среднему значению*. Она является следствием проведенного здесь анализа. Представьте, что вы оцениваете свои винрейты на определенной выборке небольшого размера. Если они (винрейты) оказались значительно выше среднего значения по предполагаемой генеральной совокупности, то вы можете ожидать ухудшение своих результатов в будущем. Если же вы наблюдали винрейты ниже среднего, то в будущем результат улучшится. И это не следствие какого-то суеверия вроде «возврата долгов дисперсией» - все события являются независимыми, так что такого в принципе не может быть. Но вот что происходит на самом деле: если ваш результат оказался лучше, чем средний винрейт всех игроков, то весьма вероятно, что вам везло, и ваш фактический выигрыш сейчас выше вашего истинного математического ожидания. И наоборот - если ваш винрейт оказался уже, чем в среднем у всех игроков, то вы наверняка недотянули до своего собственного ожидаемого выигрыша. В результате ваш винрейт (иногда очень незначительно) часто будет регрессировать к среднему значению для всех игроков. Это хорошо видно на примере Байесовского анализа нашего гипотетического игрока - после 16900 раздач распределение его винрейта находилось под сильным влиянием распределения выигрышей всех игроков, что в итоге оттянуло оценку его «истинного» винрейта в сторону среднего значения для всех остальных, к $-1 \text{ BB}/100$.

Нужно запомнить

- Для оценки параметров генеральной совокупности на основании отдельно взятой выборки, мы можем использовать два метода: классический и Байесовский.
- Классический подход подразумевает, что мы не располагаем никакой дополнительной информацией - в результате мы вынуждены оценивать наиболее вероятное значение математического ожидания для генеральной совокупности по МО имеющейся у нас выборки. В свою очередь, доверительный интервал может лишь указать на возможный спектр значений для искомого параметра, при которых наблюдаемый в выборке результат окажется вероятным.
- Байесовская логика дает нам возможность учитывать новую информацию на основании уже имеющихся оценок и вероятностей.
- Использование априорного распределения и теоремы Байеса может дать нам более точное представление о параметрах генеральной совокупности (при условии, что нашему априорному распределению можно доверять).

Глава 4

Играем по шансам: прямые и потенциальные шансы банка

Покер - игра решений. Конечный результат здесь зависит исключительно от того, какие решения мы принимаем. Если мы справляемся с возникающими ситуациями лучше, чем наши оппоненты, мы будем выигрывать. Если нет - окажемся в минусе. В первой части книги мы сказали, что будем оценивать правильность наших действий только с позиции математического ожидания - чем оно выше, тем лучше решение. Во второй и третьей частях мы подробно разберем процесс принятия решений за покерным столом и предложим различные методы для анализа игры, а также практические советы, которые покажут, как можно сыграть в рассматриваемых ситуациях наилучшим образом.

Предметом второй части книги будет *эксплуатация оппонентов*. Играя по этой стратегии, в каждой конкретной ситуации мы будем стараться принимать решения с максимальным математическим ожиданием, используя при этом всю информацию, который мы располагаем о нашем оппоненте (его стиль, теллсы и т.п.). По сути, в той или иной форме каждый игрок за столом применяет стратегию эксплуатации.

Перед тем как мы приступим к обсуждению этой темы, давайте введем несколько новых понятий. Во-первых, нужно дать определение термину «*игра*». В мире покера у «игры» очень много толкований, и в третьей части книги мы начнем изучение *теории игр*, специального раздела математики. Но на данном этапе мы дадим этому термину следующее определение:

- Присутствуют два или более участников
- Как минимум одному из участников предоставлен выбор действий
- Игра обладает определенным набором исходов для каждого из участников
- Исход игры зависит от действий, предпринятых участниками

Чаще все мы будем оперировать играми с двумя или более игроками, где у каждого участника будет определенный набор возможных действий. Результат игры мы будем выражать в количестве выигранных или проигранных денег.

Также под «набором возможных действий» мы будем подразумевать *стратегию*. В теории игр этот термин означает полный перечень решений, которые игрок предпримет при каждом сценарии развития раздачи. Однако в покере практически невозможно описать конкретную стратегию в традиционном ее понимании, в силу так называемого эффекта «комбинаторного взрыва». Проще говоря, при 1326 возможных стартовых рук, 19600 комбинациях флопов, 47 тернах и 46 риверах, даже с учетом поправок на безразличие к порядку мастей, мы вынуждены иметь дело с более чем пятью миллионами комбинаций рук и досок. Но это еще не конец - для определения стратегии нам нужно составить план игры

на каждой улице с каждой рукой против рейзов, чеков, ставок и так далее.

Таким образом, составление полной стратегии не будет рациональным решением, кроме как в простейших вспомогательных играх. Как следствие, мы будем использовать несколько упрощенное определение этого понятия - зачастую мы будем говорить о «стратегии» как о нашем плане в раздаче на текущую и, возможно, на следующую улицу торговли. Глубина проработки стратегии в каждом конкретном случае будет напрямую зависеть от сложности игры - в наиболее простых случаях и на статичных досках мы сможем оперировать более сложными стратегиями, при этом оставляя их легкими для понимания. Мы всеми силами будем стараться включить в наши рассуждения план на несколько следующих улиц.

Стоит отметить, что идеи, изученные нами в первой части, будут особенно полезны при анализе различных стратегий. Очевидно, что нет никакого смысла в оценке математического ожидания конкретной раздачи в вакууме, поэтому здесь и далее термин «математическое ожидание раздачи» будет означать наше ожидание при условии игры по определенной стратегии против некой стратегии нашего оппонента. А математическое ожидание для диапазона рук, соответственно, следует понимать как взвешенное среднее от ожидания с каждой из рук, входящих в диапазон, против стратегии оппонента.

Цель эксплуатации оппонентов состоит в максимизации нашего ожидания против их стратегий. Если оппонент применяет стратегию S , то **стратегией максимальной эксплуатации** будет являться некая стратегия (или одна из) с наибольшим математическим ожиданием против S . Когда мы пытаемся эксплуатировать нашего оппонента, зачастую нашей задачей будет поиск стратегии максимальной эксплуатации и ее применение. Давайте рассмотрим простую вспомогательную игру, которая даст вам представление о процессе определения такой стратегии.

Пример 4.1

Два игрока, лимитный покер, на стол выходит пятая карта, ривер. У игрока А может быть либо натс (20% раз), либо мертвая рука (80% раз). У игрока В, напротив, есть некая средняя рука, которая способна побить блеф, но всегда проигрывающая натсу. В банке находятся четыре больших ставки, игрок А принимает решение первым.

Давайте подумаем, что произойдет, если игрок А сделает чек. Его оппонент может поставить, но игрок А точно знает когда он впереди и поэтому сыграет идеально: сделает рейз с натсами и выкинет большую часть своих блефов. Таким образом, игрок В не может получить вэлью от своей ставки, значит его единственным вариантом становится ответный чек. Но игрок А также может и поставить с некоторыми своими блефами, и если его оппонент скинет, то он заберет весь банк.

Пусть «х» выражает процент рук, с которыми игрок А блефует - фактически, выбор значения «х» равносителен выбору стратегии на ривере. Игрок В потеряет одну ставку, если сделает колл против натса и выиграет пять ставок (четыре из банка и одну ставку на ривере), если его оппонент поставит с блефом. Стратегия колла для игрока В применима только в случае, когда игрок А сделает ставку, так что все вероятности ниже принимаются из расчета, что игрок А делает бет на ривере. Используя уравнение 1.11, мы можем найти ожидание для игрока В в случае его колла.

$$\langle V, \text{колл} \rangle = p(\text{у игрока А натс})(-1) + p(\text{у игрока А блеф})(+5)$$

$$\langle V, \text{колл} \rangle = (0.2)(-1) + (5)x$$

$$\langle V, \text{колл} \rangle = 5x - 0.2$$

Если игрок В выкидывает свою руку, то его ожидание просто равно нулю.

$$\langle V, \text{фолд} \rangle = 0$$

Давайте рассмотрим несколько возможных значений переменной «х»:

Ситуация	Значение «х»	$\langle V, \text{колл} \rangle$	$\langle V, \text{колл} \rangle$
А не блефует	0	-0.2	0
А всегда блефует	0.8	+3.8	0
А блефует 5%	0.05	+0.05	0
А блефует 4%	0.04	0	0

Игрок В должен выбрать стратегию с максимальным ожиданием. Если игрок А блефует часто, то игрок В должен всегда делать колл. Если же ставки делаются только с натсами, то игрок В никогда не должен уравнивать.

Чтобы определить, как часто его оппонент будет блефовать, игрок В должен проанализировать свое представление о его стиле, теллсы, и т.п. Он также может применить теорему Байеса - если, скажем, игрок А недавно проиграл раздачу, то вероятность агрессивного мува будет априори выше.

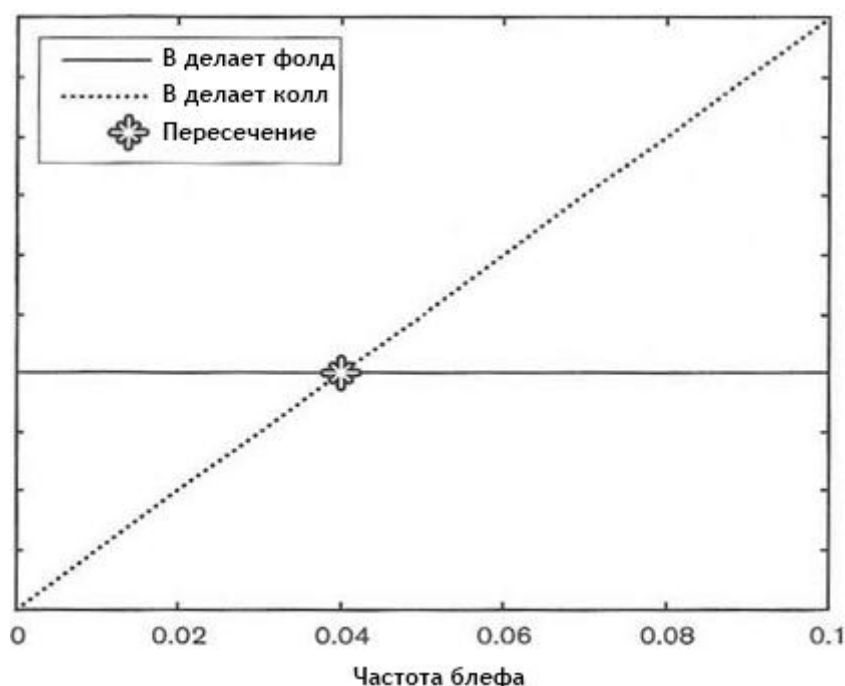


Рисунок 4.1. Математическое ожидание для различных стратегий игрока В

Рисунок 4.1 показывает линейные функции для двух возможных решений игрока В. Как вы можете заметить, стратегия максимальной эксплуатации на графике соответствует наибольшему значению по оси Y для заданной частоты блефа игрока А. Таким образом, при «х» меньшем, чем 0.04 (менее 4% блефов), игрок В должен всегда скидывать свою руку, поскольку график фолда находится выше. Однако при более частых блефах со стороны оппонента ему необходимо делать колл на ривере во всех случаях без исключения. Здесь стоит сделать очень важное замечание - эксплуатация подразумевает резкие перемены в стратегии. Так, если игрок А начинает блефовать не 0.039 (3.9%), а 0.041 (4.1%), то игрок В обязан незамедлительно отказаться от стратегии 100% фолда и начать уравнивать каждую ставку своего оппонента.

Далее мы рассмотрим основные принципы эксплуатации оппонентов, включая прямые и потенциальные шансы банка, а также проанализируем несколько примеров. Кроме того, мы столкнемся ситуациями, где игра хоть и ведется с открытыми картами, но правильные решения оказываются далеко не очевидными. Однако основное внимание мы уделим не практическим советам по игре в определенных ситуациях, а поиску стратегии максимальной эксплуатации и определению уязвимостей в стратегиях наших оппонентов.

Шансы банка

Ни одна из ныне существующих форм покера не является *статичной игрой* (где ценность руки не меняется от улицы к улице). Напротив, весьма важным элементом в покере является *дро*. Когда вы только учитесь играть, вы узнаете о

существовании как готовых рук (вроде двух пар, сетов, флэшей), так и рук-дро, к которым, например, относятся комбинации с четырьмя картами одной масти (флэш-дро). Это удобная классификация, однако в книге термин «дро» используется для обозначения сразу нескольких типов рук. Чаще всего мы относим к дро все руки, которые не являются лучшими в данный момент, однако в случае выхода определенных карт (часто называемых «аутами») они превратятся в старшую комбинацию в раздаче. Правда, встречаются и некоторые исключительные случаи, как, например, эти две руки на доске T♣ 9♣ 2♦ в Холдеме:

Рука А: Q♣ J♣

Рука В: A♠ 3♦

Здесь у руки А более чем в 70% раз выиграет раздачу, хоть в данный момент ее комбинация из пяти карт и является слабейшей. Может показаться странным, что мы относим к классу дро руку, которая является очевидным фаворитом, в то время как «готовая рука» здесь скорее проиграет. Однако мы и впредь будем использовать термин «дро» для любой руки, которая имеет слабейшую комбинацию из пяти карт, но с приходом нужных аутов (безотносительно их количества) сможет выиграть раздачу. А «фаворитом» мы будем называть любую руку, которая имеет на данный момент больше всего эквити (шансов на победу). В этом примере Q♣ J♣ это и дро, и фаворит.

Готовые руки и дро - непримиримые враги в покере. Особенно в лимитных играх, где готовые руки просто не могут сделать ставку достаточно большого размера, чтобы заставить дро выйти из раздачи. Вместо этого они вынуждены делать небольшие беты на вэлью, в то время как дро постоянно отвечают, поскольку ожидаемый выигрыш при их доле в банке больше, чем ставка, которую нужно уравнивать. Но и в безлимитном покере для дро не все потеряно - чуть позже мы покажем, как дро могут использовать структуру таких игр, чтобы исполнить очень прибыльное для себя действие, *полублеф*.

Пример 4.2

Лимитный Холдем, ставки \$30-60. У игрока А на руках A♣ A♦. У игрока В - 9♥ 8♥. На доске лежат K♥ 7♣ 3♠ 2♥, в банке \$400. Игрок А говорит свое слово первым. Как должна развиваться раздача, если оба игрока знают карты друг друга?

Вы уже наверняка угадали правильный ответ - игрок А поставит, а игрок В уравнивает. Однако было бы неплохо понять, почему участники раздачи должны сыграть именно таким образом - для этого мы рассмотрим математическое обоснование их действий и попутно разберем концепцию *шансов банка*.

Если игрок А сделает чек, то его оппонент наверняка предпочтет увидеть ривер бесплатно. Если игрок В поставит, то он сразу же потеряет как минимум $\frac{4}{5}$ своей

ставки (так как банк он выиграет всего $\frac{1}{5}$ раз), плюс, возможно, еще некоторую сумму денег, если игрок А сделает рейз. Поскольку на ривере оба игрока уже будут знать, кто выиграл раздачу, более слабая комбинация никогда не оплатит еще один бет, так что лучшая рука заберет только тот банк, который образовался на терне.

На 35 из оставшихся 44 карт выиграют AA, таким образом, мы можем вычислить ожидание игрока А в случае, если он делает чек (используя формулу 1.11):

$$\langle A, \text{чек} \rangle = p(\text{А выигрывает})(\text{размер банка})$$

$$\langle A, \text{чек} \rangle = \left(\frac{35}{44}\right)(\$400)$$

$$\langle A, \text{чек} \rangle = \$318.18$$

Теперь давайте подумаем о том, что может сделать игрок В, если его оппонент поставит. Он точно не будет повышать, поскольку он выиграет раздачу всего один раз из пяти (ему помогают 9 карт из 44), а игрок А никогда не расстанется со своими картами. Так что игрок В должен выбирать между коллом и фолдом.

$$\langle B, \text{колл} \rangle = p(\text{В выигрывает})(\text{размер банка на ривере}) - (\text{цена колла})$$

$$\langle B, \text{колл} \rangle = \left(\frac{9}{44}\right) (\$400 + \$60 + \$60) - \$60$$

$$\langle B, \text{колл} \rangle = \left(\frac{9}{44}\right) (\$520) - \$60$$

$$\langle B, \text{колл} \rangle = \$46.36$$

$$\langle B, \text{фолд} \rangle = 0$$

Поскольку ожидание игрока В от колла выше, чем математическое ожидание фолда, он должен будет уравнивать на терне. В свою очередь, ставка игрока А будет иметь следующий ожидаемый выигрыш:

$$\langle A, \text{бет} \rangle = p(\text{А выигрывает})(\text{размер банка на ривере}) - (\text{размер ставки})$$

$$\langle A, \text{бет} \rangle = \left(\frac{35}{44}\right) (\$520) - \$60$$

$$\langle A, \text{бет} \rangle = \$353.64$$

Очевидно, что в случае ставки игрок А получит более высокое математическое ожидание. Этот результат должен натолкнуть нас на мысль о главном правиле игры с готовыми руками против дро - **готовая рука обычно должна делать бет.**

Из этого правила, правда, есть исключения - мы разберем соответствующие примеры несколько позже. Теперь давайте проанализируем стратегию игрока В. Как мы уже узнали, колл будет для него более прибыльным действием, чем фолд. Теперь мы можем решить простое неравенство, чтобы определить эквити,

которым должна обладать рука игрока В для безубыточного колла на терне:

(Вероятность выигрыша) (размер банка на ривере) - (цена колла) > 0

$$520x - \$60 > 0$$

$$x > \frac{3}{26}$$

Таким образом, игрок В обязан делать колл каждый раз, когда его эквити в раздаче больше $\frac{3}{26}$. В нашем примере это условие естественно выполняется. Как уже было отмечено в первой части, мы можем сказать, что игроку В нужны шансы на победу как минимум 11.5%. Большинство игроков в покер называют это соотношение **шансами банка** (пот оддсами): мы должны уравнивать ставку оппонента каждый раз, когда наши шансы на победу больше, чем доля наших инвестиций в итоговом банке.

Мы пришли ко второму принципу игры с дро против готовых рук: **дро должно делать колл, если имеет подходящие шансы банка.**

В дальнейшем мы еще рассмотрим случаи, где игра только в соответствии с шансами банка будет являться ошибкой. Тем не менее, навык расчета оддсов еще не раз пригодится вам за столом, поскольку позволяет быстро оценить прибыльность колла с дро.

Шансы банка на нескольких улицах

Поскольку игра в покер проходит на нескольких улицах торговли, иногда нам придется принимать в расчет возможные будущие действия всех участников раздачи. Давайте рассмотрим несколько примеров с полной информацией (все игроки знают карты друг друга).

Пример 4.3 (Банк \$75)

Игра в лимитный холдем, \$30-\$60. У игрока А на руках А♦ К♦, у его оппонента - 8♣ 7♣. На флоп вышли А♣ К♠ 4♣, в банке лежат \$75 и АК ставят \$30. У игрока В всего восемь аутов на улучшение, поскольку К♣ даст его оппоненту фулл-хаус. С точки зрения прямых шансов банка игрок В обязан делать колл всякий раз, когда его шансы на победу больше 30/105, или 28.5%.

Однако вероятность того, что флэш закроется на следующей улице, составляет всего 17%. Так что игрок В должен делать фолд со своим флэш-дро.

Пример 4.4 (Банк \$195)

Что будет, если мы увеличим размер банка до \$195? Теперь у игрока В есть прямые шансы банка на колл. Иными словами, его математическое ожидание

составит: $(\frac{8}{45})(\$255) - \$30 = \$15.33$. На терне, если флэш не закроется, возможны два сценария. Первый - выйдет А или К, в таком случае игрок В теряет всякую надежду на победу в банке. Это произойдет $\frac{4}{45}$ раз. Однако на оставшихся картах его ожидание от колла на терне составит $(\frac{8}{44})(\$375) - \$60 = \$8.18$.

Используем формулу 1.11, чтобы рассчитать общее математическое ожидание для игрока В на терне:

$$\langle B, \text{терн} \rangle = p(\text{А или К}) (\langle B, \text{А или К на терне} \rangle) + p(\text{другие карты}) (\langle B, \text{колл} \rangle)$$

$$\langle B, \text{терн} \rangle = (\frac{4}{41})(0) + (\frac{41}{45})(\$8.18)$$

$$\langle B, \text{терн} \rangle = \$7.45$$

В итоге, на флопе игрок А сделает ставку, игрок В уравнивает. Затем, если на терне не вышла третья карта к флэшу, игрок А снова поставит, а его оппонент снова сделает колл, поскольку ожидаемый выигрыш от колла выше, чем ожидание от альтернативного действия - фолда (математическое ожидание которого равно нулю).

Пример 4.5 (Банк \$135)

Еще один интересный случай - теперь банк составляет \$135, то есть игрок В может сделать колл на флопе. Однако на терне ситуация меняется:

$$\langle B, \text{флоп} \rangle = p(\text{флэш закроется на терне})(\$135 + \$60) - \$30$$

$$\langle B, \text{флоп} \rangle = \frac{8}{45}(\$135 + \$60) - \$30$$

$$\langle B, \text{флоп} \rangle = \$4.67$$

$$\langle B, \text{терн} \rangle = p(\text{флэш закроется на ривере})(\$195 + \$120) - \$60$$

$$\langle B, \text{терн} \rangle = (\frac{8}{44})(\$315) - \$60$$

$$\langle B, \text{терн} \rangle = \$-2.73$$

Поскольку игрок В в любом случае не может делать колл, мы не рассматриваем случаи, в которых игрок А получает на терне туза или короля. Если мы включим вероятность такого исхода, то математическое ожидание от колла для игрока В просто станет еще хуже.

Здесь стоит сделать паузу и поговорить о полученном результате. Согласно определению выше, игрок В должен делать колл каждый раз, когда его шансы на победу в раздаче выше, чем предлагаемые шансы банка. Но в таком случае вероятность получения флэша в нашем примере составляет:

$$p(\text{В выигрывает}) = 1 - p(\text{В проигрывает})$$

Воспользовавшись формулой 1.3, получаем:

$$p(\text{В выигрывает}) = 1 - [p(\text{нет флэша на терне})][p(\text{нет флэша на ривере})]$$

$$p(\text{В выигрывает}) = 1 - (37/45)(36/44)$$

$$p(\text{В выигрывает}) = 0.327 \text{ или } 32.7\%$$

То есть, игрок В почти треть раз выигрывает этот банк, однако он все еще вынужден делать фолд - почему? В примере 4.3, как мы отмечали, его шансы банка составляют 28.5%, более чем достаточное значение для колла. Однако здесь важно понимать, что когда мы оцениваем прямые шансы банка, мы принимаем в расчет только те случаи, когда игрок В выигрывает уже на следующей улице.

Пример 4.6 (почему рейз не дает нам лучшие шансы банка)

Давайте еще раз рассмотрим ситуацию, где в банке на флопе было \$135. Если игрок В уравнивает ставку, то на терне банк составит \$195. Предположим, что дро не закрылось, и игрок А делает ставку в \$60, заставляя своего оппонента скинуть карты. Но что если игрок В сделает рейз на флопе? Тогда игрок А ответит ре-рейзом, а игрок В, получив прямые шансы банка, сделает колл. Однако на проверку такая линия оказывается хуже, чем колл на флопе и фолд на терне.

Мы можем разбить расчет математического ожидания игрока В на две части. Первая - если он выигрывает на терне (B_f), вторая - если раздача дойдет до ривера (B_t).

$$\langle B, \text{рейз на флопе} \rangle = \langle B_f, \text{рейз на флопе} \rangle + \langle B_t, \text{рейз на флопе} \rangle$$

$$\langle B_f, \text{рейз на флопе} \rangle = p(\text{В выигрывает на терне}) (\text{банк, если В делает рейз и получает ре-рейз}) - (\text{размер последнего рейза})$$

$$\langle B_f, \text{рейз на флопе} \rangle = (8/45) (\$135 + 2(\$30 + \$30 + \$30)) - \$90$$

$$\langle B_f, \text{рейз на флопе} \rangle = \$-34$$

$$\langle B_t, \text{рейз на флопе} \rangle = p(\text{В не выигрывает на терне}) [p(\text{В выигрывает на ривере}) (\text{банк после ставок на терне}) - (\text{ставка на терне})]$$

$$\langle B_t, \text{рейз на флопе} \rangle = (37/45) [(8/44) (\$315 + 2(\$60)) - \$60]$$

$$\langle B_t, \text{рейз на флопе} \rangle = \$15.70$$

$$\langle B, \text{рейз на флопе} \rangle = \$-34 + \$15.70 = \$-18.30$$

$$\langle B, \text{колл на флопе} \rangle = p(B_f) (\$135 + 2(\$30)) - \$30 = \$4.67$$

Примечание от переводчика: Здесь размер последнего рейза фактически означает количество вложенных денег в банк на одной улице. Также авторы здесь считают, что после ре-рейза на флопе игрок А продолжит ставить на терне, поскольку он знает о руке оппонента.

Таким образом, рейз на флопе создает иллюзию того, что у игрока В появляются шансы на колл, однако на практике это убыточная линия. С другой стороны, за столом ни у одного из игроков не будет полной информации, так что такая раздача не всегда будет заканчиваться с приходом на терне или ривере третьей карты к флэшу. Иными словами, руки-дро могут компенсировать недостаток прямых шансов банка получением вэлью от оппонента на следующих улицах.

Потенциальные шансы

Мы рассмотрели концепцию шансов банка, которая помогает подсчитывать прибыльность наших действий с дро против готовых рук. Однако во всех вышеизложенных примерах мы полагали, что игроки обладают полной информацией, в то время как за столом никто не будет знать ваших карт. Например, у игрока В вполне могли оказаться и блеф, и другое дро (на стрит или две пары) или даже лучшая рука. Таким образом, в реальной игре готовая рука часто должна будет уравнивать одну или две ставки, даже если на терне закроется дро.

В предыдущих примерах мы считали, что игрок В не получит никаких денег, если попадет в дро - его оппонент всегда скидывал свою руку. Однако при игре без полной информации такая стратегия наверняка была бы очень уязвимой. Иными словами, дро часто может рассчитывать на дополнительное вэлью даже после выхода опасной для готовой руки карты. Такая комбинация прямых шансов банка и возможного выигрыша на следующих улицах называется ***потенциальными шансами банка***.

Пример 4.7

Рассмотрим следующую ситуацию. Раздача развивается в точно таком же ключе: у игрока А на руках А♦ К♦, у игрока В - 8♣ 7♣, на флоп выходят А♣ К♠ 4♣. Однако теперь игрок А не знает о картах своего оппонента и будет уравнивать ставки игрока В на терне и ривере, даже если закроется флэш.

Мы уже нашли прямые шансы банка для игрока В при открытых картах. Однако в этом примере у него также есть и существенные потенциальные шансы. В банке уже лежат \$135, игрок А делает на флопе ставку в \$30. Возможны три сценария:

#1: Флэш закрылся на терне

В этом случае игрок В заберет \$195 из банка, плюс \$240 на терне и ривере. Но из этих денег надо вычесть \$150, которые он сам вкладывает в банк. Так что в сумме

он получит \$285. Этот сценарий реализуется $\frac{8}{45}$ (или 17.8%) раз, то есть ожидаемый выигрыш составит \$50.67.

#2: Флэш закрылся на ривере

Здесь игрок В снова выиграет \$285 (поскольку он будет делать колл со своим флэш-дро на терне). Вероятность такого исхода составляет $(\frac{37}{45})(\frac{8}{44})$ или 14.9%. Ожидаемый выигрыш - \$42.61.

#3: Флэш не закроется ни на терне, ни на ривере

Такое случится 67.3% раз - игрок В уравнивает ставку на флопе и терне, но выкинет на ривере. Он потеряет те деньги, которые вложил в банк, то есть \$90. Соответственно, его ожидаемый проигрыш составит \$60.55.

Сценарий	Вероятность	Результат	Ожидание
Флэш на терне	$\frac{8}{45}$	\$285	\$50.67
Флэш на ривере	$(\frac{37}{45})(\frac{8}{44})$	\$285	\$42.61
Нет флэша	$1 - [(\frac{8}{45}) + (\frac{37}{45})(\frac{8}{44})]$	\$-90	\$-60.55
Итого	1		\$32.43

Таким образом, ожидаемый выигрыш в этом примере для игрока В составляет \$32.73 - значительно больше, чем в ситуации, когда игрок А никогда не оплачивает флэши своего оппонента.

Потенциальный размер банка

Стратегия эксплуатации в безлимитном Холдеме основана на потенциальных шансах. Зачастую верным решением на префлопе будет колл с мелкой или средней карманной парой, а также с одномастными коннекторами и тузами в надежде попасть на флопе в сет или сильное флэш-дро. Однако в таком случае нам важно учитывать не только деньги, которые мы можем выиграть, но также и те ставки, которые мы потенциально можем проиграть, когда наша сильная рука окажется позади (например, если оппоненту зайдет старший сет). Также мы не можем считать, что наши оппоненты легко отдадут нам все свои деньги - наоборот, наши потенциальные шансы весьма часто будут равны только какой-то доле от стэка оппонента.

Во всех рассмотренных нами примерах потенциальные шансы давали игроку В возможность сделать колл при небольших размерах банка и посредственном эквити, поскольку деньги, вкладываемые на будущих улицах увеличивают так называемый потенциальный размер банка. В третьей части книги мы покажем, что потенциальные выигрыши очень важны в играх между диапазонами, состоящими из различных комбинаций дро и готовых рук. Кроме того, этот фактор имеет первостепенное значение в разновидностях покера, где дро может быть *скрытым*, то есть когда лишь у некоторых игроков есть информация о

закрывшемся дро. Например, в Семикарточном Стаде последняя карта сдается рубашкой вверх. Получается, что при таком ассиметричном распределении информации, игрок с готовой рукой оказывается в невыгодном положении - ему придется хотя бы иногда проплатить флэшу или стриту еще одну ставку. Иначе (если он всегда будет выкидывать свои карты), дро получит возможность эксплуатировать эту слабость, блефуя на всех риверах подряд.

Блефы

Блеф является, пожалуй, наиболее известным приемом в покере. Для многих новичков самым запоминающимся моментом становится их первый удачный блеф. Более того, в покерных трансляциях большая часть зрительского внимания прикована к ситуациям, когда один из игроков делает большую ставку, а его оппоненту необходимо решить что это: блеф или хорошая рука. Фактически, блеф - неотъемлемая часть покера, и это именно тот элемент, который отличает его от таких игр как шахматы и нарды.

Чистый блеф следует понимать как ставку с рукой, у которой нет шансов на победу в случае колла от оппонента. В свою очередь, **полублеф** - это ставка с комбинацией, которая сейчас возможно не является лучшей рукой, но у которой есть возможность существенно улучшиться на следующих улицах. Как правило, чистые блефы случаются на последней улице торговли, когда ни одна рука уже не может улучшиться. Однако иногда игроки предпринимают попытки выиграть банк с мертвой рукой и на ранних стадиях раздачи.

С другой стороны спектра ставок находятся **вэлью беты**. Эти ставки обладают положительным ожиданием даже в случае колла от оппонента. Иными словами, это ставка с достаточно сильной комбинацией, которая может побить руки из диапазона колла оппонента. В редких случаях, когда у нас оказывается абсолютный натс на ранней улице, мы можем ставить на вэлью на протяжении всей раздачи. Однако, как правило, на флопе и терне большинство вэлью бетов могут оказаться полублефами (в зависимости от силы руки оппонента).

И наконец, между чистыми блефами и вэлью бетамы существует огромный диапазон ставок, многие из которых иногда окажутся полублефами, иногда ставками на вэлью. Самый простой пример полублефа, у которого нет вэлью составляющей - это ставка со слабым флэш-дро. Такая рука никогда не получит колл от худшей комбинации, и даже спаривание одной из карт наверняка не позволит ей побить руку оппонента. Однако даже в таком случае слабое флэш-дро зачастую должно делать ставку, поскольку оппонент может скинуть часть своего диапазона в пас. Мы еще вернемся к идее полублефов, а пока рассмотрим еще один пример.

Пример 4.8

Игра в Семикарточный Стад, \$40-80. Оппоненты в раздаче знают все карты друг друга за исключением ривера, который сдается рубашкой вверх. Как мы уже говорили, это ситуация со скрытым дро - только один из игроков знает, усилилась ли его рука или нет.

Игрок А: 6♥ A♣ A♠ 7♦ 9♦ K♣

Игрок В: 7♠ 8♠ 9♠ K♠ 2♣ 4♣

Как вы, наверное, уже поняли, эта игра очень похожа на ту, что мы анализировали в случае с Холдемом. У игрока А есть готовая рука, а у его оппонента - только флэш-дро без дополнительных аутов. В банке уже лежат \$655, и на стол выходит ривер.

Но теперь игроку А больше нет смысла ставить. Либо игрок В попал в свое флэш-дро, либо нет - он ответит на ставку только с более сильной рукой. Таким образом, игроку А нужно просто сделать чек и постараться правильно среагировать на возможную ставку своего оппонента. Если его оппонент сделает чек, то очевидно, что игрок А выиграет банк - более того, такое будет происходить значительно чаще, чем 50% раз. Однако это отнюдь не повод, чтобы делать ставку на вэлью. Ожидание игрока А в этой ситуации абсолютно не зависит от того, поставит он или нет, поскольку он никогда не получит колл от рук хуже.

Итак, игрок А делает чек. Теперь игрок В должен решить, что ему делать. Естественно ему стоит поставить со всеми флэшами. В колоде оставалось 40 неизвестных карт, при 8 аутах игрок В соберет флэш 20% раз. Кроме того, ему стоит иногда блефовать, когда флэш не закрылся. Таким образом, если игрок А скинет свои карты, испугавшись более сильной руки, игрок В сможет выиграть достаточно большой банк с худшей рукой.

В свою очередь, после ставки от игрока В, перед его оппонентом встанет новое решение: колл или фолд. Этот выбор на самом деле также зависит и от того, пришла ли на ривере игроку А пика - если да, то вероятность блефа со стороны игрока В возрастет. Однако мы пока не будем рассматривать такой случай и представим, что игрок А играет на ривере вслепую.

Таким образом, у нас образовались два неизвестных. Частота колла для игрока А в случае ставки от игрока В. Пусть это будет некий «х». Частота блефа для игрока В (с какой частью своих рук он должен ставить на ривере как блеф). Назовем эту переменную «у».

Тогда, применяя уравнение 1.11, получим:

$\langle A, \text{колл} \rangle = p(y \text{ В есть флэш})(\text{проигранная ставка}) + p(\text{В блефует})(\text{банк} + \text{одна ставка})$

$\langle A, \text{колл} \rangle = (0.2)(\$-80) + (y)(\$655 + \$80)$

$\langle A, \text{колл} \rangle = \$735y - \$16$

$\langle B, \text{блеф} \rangle = p(A \text{ делает колл})(\text{проигранная ставка}) + p(A \text{ скидывает карты})(\text{банк})$

$\langle B, \text{блеф} \rangle = x(\$-80) + (1 - x)(\$655)$

$\langle B, \text{блеф} \rangle = \$655 - \$735x$

Мы получили, что частота колла для игрока А напрямую зависит от того, с какой долей своего диапазона на ривере игрок В решится блефовать. И наоборот - игрок В должен решить, как часто он хочет блефовать исходя из тенденции к коллу игрока А.

Решим простое неравенство и найдем значение «у»:

$\$735y - \$16 > 0$

$y > \sim 2.2\%$

Это значит, что если игрок В блефует чаще, чем с 2.2% своих рук, то его оппонент должен всегда уравнивать ставку на ривере. Также вполне ясно, что математическое ожидание колла для игрока А при частоте блефа в 2.2% равно нулю. Это очень важная идея, к которой мы еще вернемся в следующих главах. Фактически, можно говорить о том, что мы нашли точку безразличия для игрока А - его конкретное действие (колл или фолд) не имеет значения, поскольку математическое ожидание от этого никак не изменится.

Теперь решим аналогичное неравенство для игрока В:

$\$655 - \$735.x > 0$

$x < \sim 89.1\%$

Иными словами, если игрок А делает колл реже, чем в 89.1% случаев, то игрок В должен блефовать со всеми своими руками. И снова в найденной нами точке математическое ожидание блефа для игрока В будет равно нулю. В случае, если игрок А делает колл именно 89.1% раз, то игроку В будет все равно что делать со своими блефами.

Возможно, игрок А окажется «скептиком», то есть будет считать, что игрок В заядлый блефун, и начнет вскрывать каждую его ставку на ривере. Если это и вправду так, то математическое ожидание игрока А будет увеличиваться на \$7.35 за каждый процент блефов сверх 2.2%. Тогда лучшей стратегией игрока В будет полный отказ от ставок без готового флэша. С другой стороны, игрок А может быть и слишком доверчивым, тогда его оппонент может со спокойной душой

блефовать 100% раз. Да, он не будет получать вэлью со своими флэшами, но выигранные банки с блефами вполне смогут компенсировать такую потерю.

Стратегии эксплуатации

Рассмотренные выше примеры контр-стратегий для игроков А и В являются прототипами стратегий эксплуатации, то есть стратегий с максимальным математическим ожиданием. Мы используем слово «эксплуатация» по одной простой причине - с помощью подобных расчетов (и соответствующих им стратегий) мы можем определять уязвимые места в игре наших оппонентов и «эксплуатировать» их, выбирая только те действия, которые максимизируют наши ожидаемые выигрыши против найденных слабостей.

Однако зачастую такие расчеты нельзя провести непосредственно за столом, особенно с учетом многих косвенных факторов, возникающих в процессе игры. В этой книге мы часто будем прибегать к помощи «вспомогательных игр», которые позволяют в известной степени упростить рассматриваемые ситуации. Когда мы будем обсуждать многоуровневые стратегии для целых диапазонов, нам придется столкнуться с невозможностью даже простейших расчетов математического ожидания.

В то же время определение и эксплуатация слабых мест в игре оппонентов позволяют нам выбирать решения с более высоким ожиданием. Так что если мы хотим найти наиболее прибыльную стратегию, мы вполне можем отказаться от прямых расчетов математического ожидания в пользу простого поиска уязвимостей в стратегиях других игроков - в реальной игре такой подход зачастую окажется более действенным.

Но вернемся к примеру 4.8, где мы фактически представили игру в «угадайку» между двумя участниками. В этом случае каждый из игроков старается предсказать намерения своего оппонента и подстроиться путем экстремального изменения своей собственной стратегии в ту или иную сторону. Здесь мы невольно затрагиваем тему третьей части книги: точки безразличия, которые мы рассчитали выше (~2.2% блефов для игрока В и 89.1% коллов для игрока А), на самом деле обладают особыми свойствами. Они описывают условия, при которых оппонент не может эксплуатировать нашу стратегию, даже если он знает, что мы делаем. Если игроки А и В следуют этим двум стратегиям, то ни один из них не сможет увеличить свое математическое ожидание, только изменив собственные тенденции. Такие стратегии называются ***оптимальными***. Третья часть книги посвящена исключительно поиску и применению оптимальных стратегий в покере.

Стратегия эксплуатации, по сути, состоит из двух частей. Во-первых, сбор информации. Мы пытаемся определить руку или диапазон оппонента исходя из его действий, ищем слабые места в его игре или ситуации, в которых он

чувствует себя наименее комфортно. Затем мы принимаем некое решение исходя из полученной информации. Как правило, на этом этапе мы просто выбираем то действие, которое будет в наибольшей мере эксплуатировать обнаруженную слабость. Второй шаг зачастую оказывается проще, но позже мы покажем, это не всегда так.

Нужно запомнить

- Эксплуатация подразумевает максимизацию математического ожидания против рук и стратегий оппонента. В реальности же все часто сводится к простому определению слабостей другого игрока из-за невозможности выполнить необходимые расчеты математического ожидания непосредственно за столом.
- Шансы банка (пот оддсы) являются хорошим ориентиром при принятии решения о колле с дро. В случае если шансы на победу в раздаче оказываются выше, чем доля наших инвестиций в итоговом банке, нам следует принять ставку оппонента. В противном случае фолд часто окажется лучшим решением.
- Шансы банка следует рассматривать на нескольких улицах в совокупности. Иногда, даже когда нам не хватает пот оддсов на текущей улице, мы все равно можем сделать колл. Необходимо оценивать математическое ожидание всей стратегии, а не действий на отдельных улицах торговли.
- Потенциальные шансы банка учитывают вэлью, которое может собрать игрок с уже закрывшимся дро. В некоторых ситуациях потенциальные шансы позволяют делать коллы, которые недопустимы с точки зрения прямых шансов банка.
- В раздачах, где сталкиваются готовые руки и дро, действуют два принципа:
 - 1) готовая рука обычно должна ставить;
 - 2) дро, как правило, должно уравнивать ставку (при наличии достаточных шансов банка).
- Чистый блеф - это ставка с рукой, не имеющей никакой надежды выиграть банк в случае колла от оппонента. Полублеф - это ставка с комбинацией, которая сейчас возможно не является лучшей рукой, но у которой есть возможность существенно улучшиться на следующих улицах. Вэлью беты - это ставки, математическое ожидание которых останется положительным, даже если они получат колл.

Глава 5

Гадаем на картах: чтение рук и стратегий

Возможно, самый популярный навык из числа тех, что приписывают себе игроки в покер (особенно в интервью и на телевидении) - «чтение» оппонентов. Часто подразумевается, что сам процесс «чтения» чьей-то руки нельзя формализовать или выразить через язык чисел, и поэтому лишенные даже толики воображения «математики» не обладают этой уникальной способностью. По понятным причинам мы склонны не согласиться. Но надо признать, если бы такая «магия» помогала точно определять карты оппонентов, этой книги бы не существовало. В реальности же мы считаем, что чтение оппонента по большей части основано на Байесовской логике и интерпретации ставок, с небольшими поправками на физические теллсы. При этом не важно, на каком уровне проходит этот процесс: сознательном или подсознательном. Более того, математические модели могут служить отличным дополнением к игровой интуиции.

Весьма популярный метод «чтения» оппонента заключается в следующем: вы кладете своего оппонента на какую-то определенную комбинацию, а затем играете всю раздачу так, как если бы знали, что у него именно это рука (попутно надеясь, что вы правы). Иногда такой подход действительно работает. Например, в лимитном Холдеме некоторые игроки делают ре-рейз против ранних позиций с мелкими и средними карманными парами, «положив оппонента на АК». Действительно, АК является одной из наиболее вероятных комбинаций в такой ситуации, так что чаще всего они «угадают» карты своего оппонента. Однако вполне возможно, что думая только об одной-единственной руке, они уменьшают свое математическое ожидание как на префлопе, так и на постфлопе - в конце концов, диапазон оупен-рейза из ранней позиции может включать в себя ещё и старшие карманные пары.

Один из авторов этой книги недавно стал участником следующей раздачи в турнире по безлимитному Холдему. За столом осталось пять человек, блайнды были 1500-3000, и игрок с коротким стэком поставил все свои фишки (около 2100) из позиции UTG. Стоит отметить, до этого он уже успел поставить олл-ин несколько раз подряд. У автора оказались A♥ 8♥ на большом блайнде при стэке в 3200. После того как все остальные игроки сбросили свои карты, он уравнил олл-ин и увидел AKo у своего оппонента. К счастью на стол вышла восьмерка, так что раздача закончилась благополучно.

После турнира человек, у которого оказались AKo, спросил: «Против какой из моих рук ты думал, что ты впереди?». На что получил ответ: «Скорее всего, ты ставил олл-ин с любым тузом, любой парой и возможно сильными королями. Плюс чем лучше ты играешь, тем чаще у тебя окажутся руки вроде T9s. Против этого диапазона у меня было почти 50% эквити, так что я сделал колл».

Мораль этой истории заключается в следующем: вылетевший игрок считал, что его оппонент пытался «положить его на руку», а затем оценивал свои шансы против выбранной комбинации. Однако вместо этого автор книги составил примерный диапазон для олл-ина в такой ситуации, а затем действовал, отталкиваясь от этого предположения. Как оказалось, у префлоп рейзера была одна из сильнейших рук в его диапазоне, и нашему герою повезло на флопе. Важно понимать, что он никогда не думал о том, как стоит против конкретной руки, *но при этом сделал абсолютно верный колл*.

Чтение рук для продвинутых

Другие игроки читают руки своих оппонентов, используя комбинацию дедукции и теллсов. Они исключают вероятные руки на основании различных предположений, например о том, что оппонент играет рационально, или же что определенная рука не подходит стилю игры оппонента. Однако многие из них совершают распространенную ошибку - они слишком легко вычеркивают комбинации из диапазона оппонента, в результате чего зачастую оперируют неоправданно узким спектром рук.

Тем не менее, даже с учетом этого недостатка, данный метод достаточно близок к рекомендуемому нами алгоритму чтения рук. В теории он заключается в следующем: мы никогда не должны стремиться положить оппонента на одну руку; напротив, нам следует считать, что у него существует некий диапазон вероятных комбинаций. В начале раздачи у каждого из игроков за столом диапазон состоит из случайных рук, с поправкой на ваши собственные карты (следствие теоремы Байеса). После того как каждый из игроков скажет свое слово, мы можем включить полученную информацию в наши рассуждения и заново оценить вероятность тех или иных рук. Здесь мы будем отталкиваться в основном от вышедших на стол карт, а также наших предположений о том, как оппонент может разыгрывать различные комбинации из своего диапазона. Нам также стоит учитывать и вероятность (пусть и небольшую) того, что мы не до конца понимаем стиль игры оппонента, или же что он просто решил отойти от своей обычной стратегии. Вы не раз столкнетесь с такими ситуациями, даже играя против сильных соперников, поэтому не стоит по умолчанию считать, что вероятность нестандартной игры всегда равна нулю. Это может привести к достаточно плохим фолдам или коллам, о которых вы потом будете сожалеть.

Непосредственно в игре мы не сможем оценить вероятность каждой руки. Однако нам вполне по силам проанализировать действия наших оппонентов, а также карты на столе, чтобы в результате составить диапазон для момента, когда нам нужно принять решение. К тому же при таком подходе несложно учесть и теллсы - для этого нужно скорректировать уже составленный диапазон, используя теорему Байеса с новыми данными. Проще говоря, мы должны задаться вопросом: «Я составил диапазон моего оппонента, оценил все возможные руки. В таком случае, какова вероятность того, что мой оппонент покажет именно этот теллс с

каждой из этих рук? ".

Конечная цель всех этих действий - *составить диапазон рук нашего оппонента*. В нем какие-то руки мы исключим полностью, каким-то назначим незначительную вероятность. Так, комбинации, которые оппонент бы чаще всего разыграл в иной манере, будут обладать меньшей относительной вероятностью в рамках найденного диапазона. В теории, мы могли бы собрать достаточно информации, чтобы сузить диапазон оппонента до одной руки, однако на практике это в принципе невозможно.

Рассмотрим все вышесказанное на примере. В этой раздаче мы будем пытаться интерпретировать действия нашего оппонента на различных улицах, однако кому-то наши доводы могут показаться спорными. Важно понять, что цель этого примера состоит не столько в определении правильной линии розыгрыша нашей руки, сколько в демонстрации процесса чтения рук по заданному выше алгоритму.

Пример 5.1

Мы играем в Семикарточный Стад Хай-Лоу. Лимит \$30-\$60, анте \$5. Игрок справа от нас делает бринг-ин с 2♣ на \$10. Мы делаем ставку в \$30 с (5♠ A♥) 4♥. Две десятки, 7♦ и король скидываются. Следующий игрок делает рейз до \$60 с 6♣. Двойка крестей отправляется в пас, мы уравниваем.

(5♠ A♥) 4♥
(??) 6♣

Мертвые карты: T♣ T♠ 7♦ K♠ 2♠.

На третьей улице мы начинаем думать о руке нашего оппонента. Даже ничего не зная о его стиле, мы можем сделать приближенную оценку его диапазона. Так, есть руки, с которыми почти любой игрок наверняка сделает рейз:

(AA) 6
(KK) 6
(66) 6

Также сюда стоит отнести любую мелкую одномастную руку (с тремя крестовыми картами) с тузом.

Агрессивные оппоненты сделают рейз с таким диапазоном:

(QQ-TT) 6
Любые три мелкие крестовые карты
(A2) 6
(A3) 6

Можно также составить и еще более широкий диапазон для рейза:

(99-55) 6
(A4) 6
(A5) 6
(54) 6
(57) 6

Плюс любые одномастные руки с тузом, например (A♣ J♣) 6♣

Кроме того, авторы этой книги видели подобные ре-рейзы от рук следующего вида:

(QJ) 6

К несчастью для нашего алгоритма, но к счастью для нашего банкролла, игроки, регулярно делающие такие рейзы, слишком быстро проигрывают все свои деньги, так что мы даже не успеем получить достоверную информацию об их диапазонах. Вернемся к раздаче. Уже на префлопе мы можем сделать некоторые прикидки о диапазоне оппонента. Стоит, правда, заметить, что некоторые из перечисленных выше рук будут встречаться достаточно редко. Например, в колоде осталось всего две десятки, так что пять из шести комбинаций (ТТ)6 уже невозможны. Более того, игрок с (ТТ)6 почти наверняка бы выкинул свою руку еще на префлопе, зная, что его ауты находятся на руках у оппонентов.

На стол выкладывается четвертая улица - мы получаем 8♠, а наш оппонент - Т♦. Он делает чек, мы ставим, при этом ожидая иногда забрать банк уже сейчас. Однако получаем колл.

Проблема заключается в том, что на этой улице мы получили очень мало новой информации. Есть несколько причин, по которым мы никак не можем сузить предполагаемый диапазон. Во-первых, действия оппонента на этой улице нам ни о чем не сказали. Мы поймали неплохую карту, чего нельзя сказать о нашем оппоненте, однако размер банка и относительная сила диапазонов (мы еще затронем эту тему) дают ему возможность сделать колл и посмотреть на пятую улицу с большим количеством рук. Во-вторых, минимальная ставка на следующей карте будет в два раза больше. Это значит, что у нашего оппонента вполне могла оказаться и сильная комбинация, с которой он решил не делать рейз на дешевой улице, таким образом лишив нас информации о своей руке.

Пятая улица - J♥. Плохая карта, однако она все же дает нам три карты к флэшу, в дополнение к четырем низким картам, которые уже есть у нас на руках. Оппонент поймал K♣ и делает чек. Мы ставим и снова ожидаем часто забрать банк.

Теперь доска выглядит следующим образом:

(5♠A♥) 4♥ 8♠ J♥
(????) 6♣ T♦ K♣

Давайте обсудим, что нам могут сказать различные действия оппонента в этой ситуации. Посмотрим на его вероятные руки (особенно на первые две группы), и попытаемся представить диапазон для колла:

(AA) 6♣ T♦ K♣
(X♣Y♣) 6♣ T♦ K♣
(QQ) 6♣ T♦ K♣
(JJ) 6♣ T♦ K♣

Вероятный диапазон для рейза:

(66) 6♣ T♦ K♣
(KK) 6♣ T♦ K♣

Вероятный диапазон для фолда:

(A2) 6♣ T♦ K♣
(A3) 6♣ T♦ K♣

Важно понимать, что мы не можем знать наверняка, как наш оппонент разыграет ту или иную руку, или как часто он сделает рейз, например, с сетом на терне. Поэтому мы используем приставку «вероятный» для всех перечисленных выше диапазонов. Кроме того, составляя диапазон, мы не должны упускать вероятность того, что оппонент может разыграть свою руку вопреки нашим ожиданиям. Так, мы рискуем сделать серьезную ошибку на следующих улицах, полагая, что у оппонента в принципе не может оказаться какой-то комбинации - это приведет к излишней уверенности в силе нашей руки и, как следствие, проигранному банку.

Теперь предположим, что оппонент делает колл. Выше мы определили его вероятный диапазон, который состоит из старших пар и флэш-дро. На шестой улице нам приходит A♠, а оппонент получает 3♣.

Самое время остановиться и подумать. На доске лежат следующие карты:

(5♠A♠) 4♥ 8♠ J♥ A♠
(????) 6♣ T♦ K♣ 3♣

В банке \$345. Вопрос: стоит ли нам ставить? Многие игроки здесь не задумываясь сделают бет со своей парой и лоу-дро. Однако действительно ли у нас такая хорошая рука, учитывая все сделанные выше предположения? Что если мы немного скорректируем диапазон оппонента? Как тогда изменится правильное решение в раздаче?

Чтобы ответить на эти вопросы, нам нужно проанализировать вероятный диапазон оппонента на этой улице и посчитать математическое ожидание против каждой из его рук.

Для начала, обозначим спектр комбинаций, которые могут оказаться у оппонента - сейчас мы не будем учитывать ситуации, в которых он разыгрывает свои руки не так, как мы ожидаем. Однако чуть позже мы рассмотрим различные конфигурации диапазонов и увидим, насколько они могут повлиять на наше решение.

Мы уже определили четыре типа рук в диапазоне нашего оппонента:

(AA)	6♣	T♦	K♣	3♣
(X♠Y♣)	6♣	T♦	K♣	3♣
(QQ)	6♣	T♦	K♣	3♣
(JJ)	6♣	T♦	K♣	3♣

Эта оценка основана на том, как развивалась раздача до шестой улицы. Однако руки с QQ и JJ надо разделить на комбинации с крестовой картой и без нее. AA сюда не относится, поскольку если у оппонента есть пара тузов, то она всегда с тузом крестей (два туза уже находятся в нашей руке). Поскольку ни одна из дам еще не вышла, из шести возможных комбинаций QQ три будут с дамой крестей. Что касается валетов, то валет червей у нас, поэтому у оппонента возможны только три пары валетов, две из них включают в себя J♣.

Осталось только определить комбинации с тремя низкими крестовыми картами. Мы знаем, что у нашего оппонента точно не может быть 2♣ (она среди мертвых карт) 3♣ (лежит на доске), 5♣ (у нас на руках) и 6♣ (лежит на доске). Таким образом, остается четыре низкие крестовые карты (A♣, 4♣, 7♣, 8♣), что дает нам шесть возможных комбинаций из двух карт.

Получим следующий диапазон (справа - количество комбинаций каждой руки):

AA	1
Q♣ Qx	3
Qx Qy	3
J♣ Jx	2
Jx Jy	1
X♣ Y♣	6

Кроме того, у нас может быть дополнительная информация на нашего оппонента. Например, нам показалось, что ему перестала нравиться его рука, когда на стол вышел туз - в этом случае мы должны всегда делать ставку (но только если мы думаем, что этот теллс проявляется, когда у него одна из старших пар). С другой стороны, если он как-то показал, что ждал 3♣, то это, скорее всего, сохранит нам

одну ставку против готового флэша.

Подведем итог. Мы начали с диапазона, в котором все руки были равновероятны. Затем, после рейза на третьей улице, мы сузили диапазон оппонента до старших пар, комбинаций с сильными лоу-дро и низкими крестовыми картами. На четвертой улице, с выходом хорошей карты, наше эквити увеличилось, в то время как оппонент никак не усилился. Однако мы не получили никакой дополнительной информации.

С другой стороны, пятая улица очень много сказала нам о его диапазоне, поскольку оппонент не скинул свою руку после того, как поймал вторую старшую карту. Нельзя исключать вероятность того, что он решил сделать колл на дешевой четвертой улице с тремя разномастными низкими картами. Однако после того как вышел $K\clubsuit$, мы можем фактически полностью исключить все лоу-дро у которых еще нет четырех крестовых карт. Если оппонент все же решился уравнивать на пятой улице с тремя лоу-картами, то мы автоматически выигрываем деньги благодаря этой ошибке. Даже в случае, когда на следующих улицах мы потеряем какую-то часть ожидаемого выигрыша, все равно такой плохой колл от нашего оппонента с лихвой все окупит.

На шестой улице наша рука значительно улучшилась - мы получили пару, но в то же время диапазон оппонента также усилился с выходом мелкой крестовой карты (которая могла дать ему либо флэш-дро, либо готовый флэш). Мы сузили набор его возможных комбинаций до четырех рук (тузы, старшие пары с флэш-дро, старшие пары без флэш-дро и мелкие готовые флэши).

В этом примере мы в основном пытались интерпретировать действия оппонента, чтобы составить представление о его диапазоне, однако для чтения рук не менее важны и теллсы. Как мы уже говорили, эта область выходит за пределы темы нашей книги. Тем не менее, математика может стать хорошим подспорьем при анализе теллсов; мы еще поговорим об этом в конце главы. Что же касается самой раздачи, то мы завершим ее анализ в Главе 8, где подробно разберем ситуацию на шестой улице.

Когда мы применяем стратегию эксплуатации, нашей главной задачей является определение диапазона оппонента и его стратегии (или совокупности стратегий), против которых мы будем пытаться максимизировать наше математическое ожидание. В этой главе мы поговорили о «чтении рук» - как оказалось, здесь многое зависит от нашего видения конкретных линий, по которым оппонент будет разыгрывать свои руки.

Читаем стратегии

Очень важная часть стратегии эксплуатации оппонентов - правильная оценка линий, которые они будут выбирать с различными частями своего диапазона.

Чтобы упростить себе задачу, мы можем предположить, что оппонент будет играть свои руки наилучшим образом. Тогда наша стратегия будет эксплуатировать структуру его диапазона. Например, когда оппонент сделал серьезную ошибку на одной из прошлых улиц, эксплуатация структуры его диапазона (который теперь содержит большие изъяны) будет весьма прибыльным занятием.

Также, наш ожидаемый выигрыш может увеличиться, если оппонент продолжит совершать ошибки со своим диапазоном и на следующих улицах. В нашем распоряжении часто окажутся несколько источников информации, по которым мы сможем оценить стратегию, используемую оппонентом. Этот процесс мы будем называть «чтением стратегии».

- ***Сыгранные раздачи***

Мы постоянно будем становиться свидетелями раздач, разыгранных за столом. Такая информация будет на сто процентов надежной, поскольку оппоненты сами покажут свои карты на вскрытии. Сыгранные раздачи можно считать самой ценной подсказкой о стратегиях других игроков - информация, которую мы получаем из других источников, часто может оказаться искаженной.

- ***Сыгранные раздачи (шоудаун от оппонента)***

Среди сыгранных нами раздач выделяется особая категория - иногда оппоненты намеренно показывают свои карты. С такой информацией стоит обращаться осторожно. С одной стороны, мы узнаем руку другого игрока. С другой же, сам факт того, что мы получили эту информацию бесплатно, уменьшает ее ценность (возможно, оппонент хотел нас запутать). Но если мы будем тщательно взвешивать полученные сведения, то сможем их использовать без каких-либо опасений.

- ***Косвенные факторы***

Кроме шоудаунов мы можем отмечать для себя различные тенденции оппонентов, даже в раздачах, которые не дошли до вскрытия. Такая информация пригодится как при чтении рук, так и при чтении стратегий. Однако здесь также важно помнить, что нам необходимо соотнести тенденции с конкретными *типами* рук.

- ***Классификация игроков***

Это, пожалуй, наиболее распространенный метод чтения стратегий против оппонентов, на которых у нас мало информации. Он также применяется для редко встречающихся ситуаций. Фактически, при таком подходе мы должны разбить всех игроков на категории и суб-категории. Самые известные из них - лузовый, тайтовый, пассивный, агрессивный. Часто встречаются и другие модели классификации. Однако в основе всегда лежит один и тот же принцип - если мы можем точно определить стратегию для какой-то группы игроков, а затем правильно отнести нашего оппонента к этой группе, то мы сможем делать правдоподобные предположения о его линиях и диапазонах, даже если мы никогда не играли с ним прежде.

В этой главе мы будем обсуждать в основном адекватных игроков - их стратегии не могут быть легко эксплуатированы, хотя они и совершают значительное количество ошибок. В конце мы немного поговорим о нескольких категориях слабых игроков, чьи стратегии гораздо более примитивны.

Хотя у нас в распоряжении оказываются все перечисленные выше источники информации, важно понять пределы своих возможностей по чтению стратегий оппонентов. На наш взгляд, многие игроки, особенно те, кто неплохо справляются со сбором и анализом таких сведений, зачастую переоценивают степень уверенности, с которой они могут говорить о чьей-то стратегии. Даже после нескольких сотен раздач мы получаем не так уж много достоверной информации о стратегии оппонентов.

Представьте себе 1.000 раздач в лимитный Холдем (примерно 30 часов игры в казино, или пара часов в онлайн). На первый взгляд, это неплохая выборка, которая может многое сказать о чьей-то игре. Однако средний оппонент доведет до шоудауна всего около ста рук, и все они будут неравным образом распределены между девятью позициями за столом (больше всего шоудаунов будет на баттоне и блайндах). Более того, эти раздачи будут сыграны на различных текстурах флопов, против разных людей и т.п.

Косвенные факторы здесь также будут по большей части бесполезны - мы сможем собрать более-менее достоверную информацию только о префлопе. Например, наш оппонент сыграл 121 руку из UTG. Если в нашей выборке он делает рейз с 10% рук из этой позиции, то 95% доверительный интервал скажет нам, что в реальности он может открывать от 4% до 16% всех рук, то есть от диапазона {ТТ+, АК, АQs} до {66+, АТ+, КJ+, QJ, JT, T9}. Даже если мы увидим, как этот игрок делает рейз из ранней позиции с парой сильных рук, мы все равно не сможем сузить его предполагаемый диапазон. Те же QQ присутствуют в самых разных конфигурациях диапазонов. Более того, сильные руки гораздо чаще будут видеть шоудаун, так что нам будет сложно сделать выводы о других частях диапазона оппонента.

Таким образом, нам стоит несколько изменить поход - мы будем использовать шоудауны не для определения конкретной стратегии оппонента в различных ситуациях, а для правильной его классификации (с последующими предположениями о его линиях). У этого метода есть свои недостатки:

- Игроки редко придерживаются одной неизменной стратегии на коротких дистанциях. Использование конкретной раздачи (шоудауна) для классификации оппонента фактически означает, что эта раздача должна характеризовать его общую стратегию. Однако когда мы эксплуатируем оппонента, нам важно знать не его общую стратегию, а как он играет именно против нас. В следующих главах мы поговорим о контр-

эксплуатации, и как череда подстроек усложняет эксплуатацию оппонентов и заставляет нас искать другие решения.

- Игроки редко придерживаются одной неизменной стратегии на длинных дистанциях. Они читают книги, смотрят видео, общаются между собой. Из-за этого даже самый достоверный и точный ридс может оказаться бесполезным уже через пару недель. Такие факторы как апстрик на лимите выше также могут привести к более уверенной игре и новой стратегии.
- Нам сложнее проверять свои предположения об игре оппонента. Из-за того, что разные стратегии могут диктовать одинаковые линии с некоторыми руками, мы зачастую не сможем оценить достоверность наших догадок. Более того, мы редко сможем подтвердить какую-то гипотезу, которая предсказывает отклонение от стандартного розыгрыша. Чтобы это произошло, у нас должен быть ридс, что оппоненты определенного типа играют какие-то руки иначе; тогда у оппонента должна оказаться именно такая рука; и мы должны увидеть шоудаун (или получить информацию о его руке любым другим способом).

Человеческий мозг виртуозно определяет последовательности, иногда даже там, где их нет. Многие исследования в области психологии подтвердили, что люди часто находят закономерности в представленных данных, даже когда эти данные были сгенерированы случайным образом (и никакой закономерности существовать не могло). Почему нам следует задуматься об этом? Фактически это значит, что мы должны постоянно искать новую информацию для подтверждения или опровержения различных гипотез, чтобы не попасть в ловушку, расставленную нашей собственной головой. Однако как мы уже показали выше, мы редко сможем получить необходимые факты.

Также, нам не стоит спешить с выводами о какой-то стратегии, если у нас нет на то существенных оснований. Например, представьте себе человека, который скидывал свои карты несколько раз подряд, а затем сделал оупен-рейз и на вскрытии показал АА. Некоторые игроки скажут, что только убедились в тайтовости своего оппонента. Однако сам факт того, что в этой раздаче он разыграл АА, отнюдь не значит, что он играет мало рук - пока мы только знаем, что ему раздали пару тузов. И естественно, любая адекватная стратегия предполагает игру с АА на префлопе. С другой стороны, череда фолдов, которую мы наблюдали до этого, действительно может служить доказательством того, что этот оппонент играет тайтово.

Возможно, наши рассуждения навели вас на мысль, что мы крайне негативно относимся к чтению стратегий оппонентов. Не то чтобы мы считаем этот процесс бесполезным. Скорее мы думаем, что скупость и недостоверность имеющейся информации на удивление сильно расходятся с мнением многих людей о том, что они могут точно оценить стратегию своих оппонентов всего через пару часов игры. В реальности же анализ стратегий других игроков на основании ограниченного набора данных часто порождает ложное чувство уверенности в

своих ридсах; в то время как все детали, необходимые для успешной эксплуатации оппонента, ускользают от нас.

Читаем теллсы

Многие игроки склонны переоценивать не только свою способность читать руки, но также и замечать физические теллсы. Часто это происходит из-за того, что наша память работает избирательно, так что мы всегда отлично помним, как прочитали «душу» оппонента, однако постоянно забываем случаи, когда шоудаун нас ставил в тупик. Давайте посмотрим, как хорошо ваша интуиция справляется с определением ценности полученной информации. Представьте, что вы вот-вот увидите шоудаун в раздаче, где вы не участвуете. Постарайтесь угадать руки обоих игроков. Попробуйте делать так в каждой раздаче в течение одной сессии - вы удивитесь, как редко вам удастся угадывать руку оппонентов, и как часто ваши ридсы ни на что не годятся.

Что же касается теллсов, то такая дополнительная информация зачастую приходится весьма кстати. Однако и здесь мы сталкиваемся с некоторыми сложностями (наподобие тех, что мы уже неоднократно описывали). Например, обязательное условие достоверности - нам нужно несколько раз увидеть шоудаун, чтобы подтвердить какой-то теллс, при этом оппонент должен постоянно демонстрировать его [теллс] с определенной рукой. Но опять же, если нам удастся это сделать, то такая информация будет поистине бесценной. Иногда мы можем экстраполировать теллс на целую группу игроков, и по умолчанию считать, что неизвестный нам оппонент, подпадающий под заданную категорию, скорее всего, покажет этот теллс в похожей ситуации.

Более того, мы можем дать количественную оценку теллсам. Фактически, чтение физических теллсов очень похоже на поиск болезней (похожую задачу мы рассматривали в предыдущей части), то есть подчиняется Байесовской логике. Мы наблюдаем определенное событие, а затем пытаемся найти первопричину. Простуда вызывает насморк и боль в горле. Болезнь Шарко ведет к параличу. Мы анализируем симптомы и пытаемся угадать заболевание их вызвавшее. В том же ключе мы можем провести параллель между теллсами и силой руки. Оппонент может действовать быстрее обычного, если ему нравится его рука, или же он по привычке задерживает дыхание, когда блефует и т.п.

Здесь нам потребуется поменять местами несколько элементов уравнения Байеса и определить форму априорного распределения (или, проще говоря, силу руки), чтобы правильно интерпретировать новую информацию (теллс). Пациенты с раком часто жалуются на утомляемость, однако врач никогда не поставит такой диагноз только на основании этого симптома. Он даже и не подумает включать рак в список вероятных болезней, поскольку причиной усталости может оказаться что угодно.

Предположим, что A - некое событие (например, «у меня блеф»), а $\mathcal{T}$ - некий теллс, который мы только что увидели. Мы должны найти $p(A|\mathcal{T})$, то есть вероятность того, что A является верным, если проявляется $\mathcal{T}$. Из теоремы Байеса мы знаем (формула 3.1):

$$p(\mathcal{T}|A) = \frac{p(A \cap \mathcal{T})}{p(A)}$$

Также из формулы 1.5:

$$p(A \cap \mathcal{T}) = p(\mathcal{T})p(A|\mathcal{T})$$

Значит:

$$p(\mathcal{T}|A) = \left(\frac{p(\mathcal{T})p(A|\mathcal{T})}{p(A)} \right)$$

$$p(A|\mathcal{T}) = p(A \cap \mathcal{T})/p(\mathcal{T})$$

Мы также знаем, что $p(A|\mathcal{T}) = p(A \cap \mathcal{T}) + p(\bar{A} + \mathcal{T})$. То есть вероятность того, что $\mathcal{T}$ случится, равна вероятности совместного наступления событий A и $\mathcal{T}$, плюс вероятность наступления $\mathcal{T}$, но не A .

Обратите внимание, вторую часть этой формулы, поскольку она показывает вероятность **ложного теллса**. Иными словами, это шанс того, что мы увидим какой-то теллс, но при этом у оппонента окажется, скажем, не блеф, а сильная рука. Сложно переоценить ценность теллсов, которые редко оказываются ложными, поскольку для них вероятность A при $\mathcal{T}$ стремится к 100%. Примером такого теллса будет ситуация, когда какой-то игрок отворачивается от стола и убирает ладонь со своих карт. Это почти всегда означает слабую руку, поскольку наш оппонент вряд ли бы так поступил, будь у него тузы.

В таком же ключе можно объяснить и распространенную ошибку при чтении теллсов. Иногда мы будем приписывать некое определенное значение теллсу, у которого в реальности оказывается совершенно противоположный смысл. Например, существует несколько мнений о том, почему игроки быстро двигают свои фишки в ол-ин. Кто-то скажет, что обычно так делает слабая рука, которая хочет казаться сильнее. С другой стороны, это может быть и сильная рука, которой не терпится поставить в банк больше денег. Можно привести хорошие аргументы для каждой из точек зрения, но важно понимать другое: даже если этот теллс подтвердился, его ценность будет не очень высокой, поскольку значение $p(\bar{A} + \mathcal{T})$ будет настолько большим (из-за неопределенности), что полученная в результате условная вероятность никогда не будет близка к 1 или 0.

Однако задача, которая сейчас стоит перед нами, гораздо сложнее. Мы хотим

найти вероятность некоего события A , когда у нас есть информация о нескольких теллсах T_n , некоторое количество шоудаунов A_n , некоторое количество рук без вскрытия, а также теллс T , который мы увидели в самой раздаче. Как вы уже, наверное, поняли, у нас явно не хватает данных. С другой стороны, некоторые игроки изначально лучше справляются с оценкой условных вероятностей (благодаря своему образу мышления или врожденным особенностям), и, вероятно, именно этот факт заставляет нас говорить о том, что они «хорошо читают» своих оппонентов.

Теперь давайте перейдем к более легкой теме - игрокам с очевидными стратегиями. Как правило, они играют плохо, а сбор достоверной информации об их стратегиях не займет и получаса. К этой группе относятся:

- **Маньяки** - мы используем этот термин для очень лузовых и агрессивных игроков, старающихся проявить эти качества во всех ситуациях, и при этом выбирающих не самые сильные руки для и без того бессмысленных ставок и рейзов. Стоит отметить, что часто действительно хороших игроков принимают как раз за маньяков (особенно за короткими столами или в очень тайтовых играх), поскольку они разыгрывают много слабых рук в очень агрессивной манере. Эксплуатация этого типа оппонентов требует представления о том, как они реагируют на контр-агрессию. Если они просто сдаются в ответ на рейз, то нам следует уравнивать с сильными руками (вытягивая из них блефы) и повышать со слабыми. Если же в ответ на агрессию они отвечают еще большей агрессией, то нам придется ждать хорошей руки, чтобы сделать рейз и забрать все деньги такого маньяка.
- **Ниты** - очень тайтовые и зачастую пассивные игроки, которые заходят в банк только с сильнейшими руками. При этом, как правило, им не удастся получить много вэлью. Ниты редко блефуют, предпочитая дожидаться оверпару или сет. Эксплуатировать нитов легко - нам достаточно лишь забирать их блайнды и красть банки на флопах, в которые они наверняка не попали.
- **Коллинг стейшены** - лузовые и пассивные оппоненты, никогда не сбрасывают свои руки, если в них есть пара или любое дро. Также как и ниты, они не умеют извлекать вэлью со своими сильными комбинациями. Для того, чтобы эксплуатировать коллинг стейшена мы должны делать ставки на вэлью со средними руками (которые все равно будут впереди его диапазона для колла).

Причина, по которой эти стратегии так легко заметить и классифицировать, заключается в источниках информации. Тогда как игроки, делающие рейз на префлопе в 8% случаев практически неотличимы от тех, кто открывает 12% стартеров после 100 раздач, маньяков с их 50% диапазоном обнаружить совсем не трудно. То же самое касается и игрока, который сделал один рейз за сто рук, а на шоудауне показал ту самую пару тузов. Для всех этих случаев мы можем использовать теорему Байеса. Конечно же, разные игроки будут придерживаться

разных вариаций этих стратегий: например, маньяк может как рейзить все руки подряд на пару блайндов, так и ставить олл-ин через руку. Таких оппонентов не сложно обыграть, однако чем менее агрессивным будет становиться маньяк, тем лучше он будет играть - соответственно, эксплуатировать его будет сложнее, а наш ожидаемый выигрыш уменьшится.

Всегда стоит проявлять известную долю осторожности, делая выводы о слабости вашего оппонента на основании пары раздач. Во-первых, этот игрок мог попросту совершить нехарактерный для себя плохой колл или рейз. В конце концов, все мы делаем ошибки. Во-вторых, он мог поправить свою игру после той раздачи. Такое часто встречается в онлайн покере, когда мы записываем нотс на одного из оппонентов, а через месяц все наши попытки эксплуатировать обнаруженную слабость оказываются тщетными. В-третьих, увиденная вами линия розыгрыша может оказаться не такой плохой, как вы думаете - чаще всего недооцененной оказывается лузовая и агрессивная игра. Рутинная классификация лузово-агрессивных оппонентов как слабых часто может стоить нам денег, а также принесет немалое разочарование - ведь у нас не получается обыграть «какую-то рыбу».

В слабых играх стоит концентрироваться на определении и эксплуатации оппонентов из вышеперечисленных категорий - их стратегии легче всего прочесть, так что такой подход увеличит ваш ожидаемый выигрыш быстрее всего. Если же вы оказались за столом с неплохими игроками, у которых нет очевидных пробелов в стратегии, то, на наш взгляд, лучшим решением будет поиск слабостей в вашей собственной игре и предотвращение возможностей для эксплуатации со стороны оппонентов.

Нужно запомнить

- Чтобы максимизировать свое ожидание от эксплуатации оппонента, нам нужно составить для него достоверный диапазон рук, а также определить стратегии, которые он применяет при розыгрыше различных частей этого диапазона.
- Шоудауны являются наиболее ценным прямым источником сведений о диапазоне и стратегии оппонента.
- Мы также можем собирать информацию из косвенных источников - сюда относится статистика различных действий оппонента (даже если мы не видели шоудаун).
- Чтение теллсом по сути подчиняется Байесовской логике - ценность теллса зависит от частоты его проявления и надежности. Однако вероятность ложного теллса может существенно снизить полезность такой информации.
- Стратегия эксплуатации имеет наибольшее ожидание против слабых игроков.
- Чтение рук подразумевает анализ всей имеющейся информации об оппоненте с последующим составлением диапазона его наиболее вероятных комбинаций.

Глава 6

Майнинг и вы: онлайн покер

Онлайн покер давно стал Меккой для игроков с любым банкроллом и уровнем мастерства. В этой главе мы поговорим о нескольких особенностях игры в интернете, а также рассмотрим проблему сбора и анализа информации.

Играя в онлайн, мы получаем иной набор данных.

Это достаточно очевидный факт - в отличие от традиционных казино, здесь мы не можем наблюдать никаких физических теллсов. Вместо огромного количества подсказок об оппоненте, которые можно почерпнуть из его манер, одежды и действий, игроки в онлайн в большинстве случаев видят только название страны и безжизненный аватар. Конечно, тут можно поспорить - например, кто-то любит опираться на тайминг других игроков. Однако надежность такой информации, мягко говоря, оставляет желать лучшего. Причина задумчивости нашего оппонента вполне может крыться в зазвонившем телефоне или открытом окне браузера. Естественно, эти факторы не окажут никакого влияния на его решение в раздаче. Таким образом, в онлайн единственным достоверным источником информации становятся действия оппонентов, последовательности их ставок, чеков и рейзов - это делает эксплуатацию оппонентов несколько более сложным занятием.

С другой стороны, онлайн покер открывает уникальные возможности для сбора информации. Так, вы можете получить полные истории рук (с шоудаунами, действиями на всех улицах и т.п.) почти для всех крупных сайтов. Любой игрок, который готов потратить время на разбор таких раздач, может в сравнительно короткие сроки собрать обширную базу данных об игре своих оппонентов.

Кроме того, доступность программ для сбора и анализа рук в корне поменяла подход многих игроков к покеру. Перед ними больше не стоит проблема запоминания раздач и оценки стратегий по ограниченным и нерепрезентативным выборкам - они могут просто воспользоваться гигантским объемом объективных данных. Классификация оппонентов теперь не занимает больше пары минут, а показатели колла на префлопе и чек-рейзов на терне (как и многие другие) доступны во всплывающих меню.

Однако не стоит полагать, что раз информацию об оппонентах так легко получить, то самая сложная часть анализа уже позади. Наоборот - сбор первичных данных (тенденций и раздач) в большинстве случаев оказывается как раз самой легкой задачей. При анализе даже большого числа рук мы часто столкнемся с недостатком информации об интересующих нас ситуациях и необъективностью имеющейся выборки (попавшие в нее раздачи могут не отражать истинной стратегии игрока, например из-за его даунсвинга).

К примеру, вы задались целью определить винрейт для конкретного оппонента, на которого у вас есть 10000 раздач. Насколько точно вы сможете определить истинный винрейт на основании выборочного среднего? Давайте на время забудем про Байесовскую интерпретацию этой задачи и предположим, что имеем дело с «нулевым» игроком (его винрейт равен нулю), а дисперсия в выборке составляет $4 BB^2$ за раздачу. Тогда 95% доверительный интервал для его винрейта будет иметь следующие границы: от $-0.02 BB$ до $+0.02 BB$ за раздачу. Однако если вы сильный регулар, то это наверняка заниженная оценка винрейта. Иными словами, у вас нет информации о раздачах, которые этот оппонент сыграл за другими столами, и его винрейт против всего поля на рассматриваемом лимите вполне может оказаться выше, чем его винрейт в ваших играх.

Это очень важный аспект так называемого дата-майнинга в покере (то есть сбора раздач ваших оппонентов): *зачастую единственный игрок, на которого у вас может быть объективная выборка это вы сами*. Некоторые сайты пытаются заниматься сбором историй рук за всеми столами и для всех игроков, однако это не приветствуется покерными комнатами. Кроме того, многие раздачи все равно теряются (хотя если подобные «потери» носят случайный характер, то на объективность выборки они не влияют).

Ключ к «правильному» использованию майнинга лежит в поиске полезных и объективных показателей, которые могут пригодиться при принятии решений. Самое сложное здесь - как раз найти такие показатели. Возьмем VPIP (voluntarily put \$ in pot) - эта статистика показывает, как часто игрок вкладывал деньги в банк. И хотя эта цифра может дать нам подсказку о стиле игры оппонента (лузовый или тайтовый), в реальности она находится под влиянием огромного множества косвенных факторов. Так, например, у одного из авторов этой книги после 15000 сыгранных рук VPIP держался выше 50%, однако единственной причиной столь лузовой статистики были хэдс-ап и три-макс столы. Очевидно, что за полным столом такая игра привела бы к настоящей катастрофе.

В то же время из-за необходимости принимать решения в онлайн всего за пару минут, в большинстве случаев мы не сможем правильно оценить подобные аномалии. Кроме того, мы постоянно будем сталкиваться с проблемой несравнимости показателей из выборок разного размера. Иными словами, 5 рейзов из 20 сыгранных раздач отнюдь не тождественны 500 рейзам за 2000 рук. Даже когда мы имеем дело с большими выборками, мы все равно должны делать скидку на позицию игрока, а также на возможное смещение статистики из разных игр (например, коротких и полных столов) и т.п.

Но больше всего трудностей нас ждет на этапе анализа стратегии для отдельных улиц. Очень сложно представить себе алгоритм, который бы успешно справлялся с определением применимости раздач из майнинга для анализа только что возникшей ситуации (например, по следующим показателям: количество игроков, размер банка, ход раздачи и т.п.). Для наглядности посмотрим на статистику «%

ставок на терне» - наверное, трудно будет придумать более бессмысленную цифру, поскольку здесь не учитывается контекст раздач: сила диапазонов, действия игроков, динамика. По сути, этот показатель следует использовать только в экстремальных ситуациях, когда мы играем против безумного маньяка. Если же мы попытаемся отыскать релевантные руки, то почти наверняка полученная выборка по этому параметру сузится до неприемлемых размеров и станет полностью бесполезной.

Не думайте, что таким образом мы пытаемся убедить вас в бессмысленности анализа чужих раздач. Важно только понять, что одна лишь статистика редко приведет нас к правильному решению в конкретной ситуации. Мы видели немало игроков, которые искренне считали, что как только у них на руках окажется майнинг на их лимит, им не составит труда досконально изучить всех оппонентов и составить железные ридсы. На наш взгляд, это достаточно большое заблуждение - такой подход редко даст вам существенное преимущество над полем.

Мы же считаем, что главная ценность историй раздач заключается в возможности анализа собственной игры. В этом случае, наша выборка будет наиболее полной и объективной, плюс она будет включать в себя информацию обо всех шоудаунах и стартовых руках. Если вы еще не пользуетесь программами, которые позволяют собирать такие данные, то мы настоятельно рекомендуем восполнить этот пробел прямо сейчас.

Методичный анализ собственных раздач иногда позволит вам найти ошибки, о которых вы и не подозревали (вы еще удивитесь некоторым из своих линий розыгрыша), или же лучше понять причины действий, как своих, так и оппонентов. На самом деле, разница между тем, как вы играете за столом и тем, как вы бы хотели сыграть, зачастую превосходит самые смелые ожидания.

Одно из лучших свойств онлайн покера (для выигрывающих игроков) - темп игры. Сложно спорить с тем, что за виртуальными столами раздачи разыгрываются на порядок быстрее. И это играет нам на руку, поскольку...

На получение статистически значимой выборки в онлайн уходит всего пара месяцев, вместо лет, как в случае с «живым» покером.

Представьте, что мы хотим определить наш винрейт с точностью до 0.01 BB при 95% доверительном интервале, когда наша дисперсия равна $4\text{ BB}^2/\text{раздача}^2$. Используя формулу 2.2, $\sigma = \sqrt{V}$, мы можем найти наше стандартное отклонение, $\sigma = 2\text{ BB}/\text{раздача}$. Затем с помощью формулы 2.4 мы найдем отклонение для искомой выборки $\sigma_N = \sigma\sqrt{N}$, получим, что $\sigma_N = 2\sqrt{N}$, тогда $2\sqrt{N} = 0.005$ или $N = 160000$ раздач (необходимо для получения требуемой выборки).

До появления онлайн покера, эталоном скорости игры в лимитный покер считались 35 рук в час. То есть для того, чтобы наиграть эти 160000 раздач, у профессионального игрока (скажем, он проводит за столами по 2000 часов в год) ушло бы не менее двух лет.

В онлайн многие игроки могут без труда справляться с четырьмя столами. Если за одним столом сдаются 90 раздач в час (за четыремья - 360), то при таком же графике в 2000 часов в год наш профессионал бы отыграл эту дистанцию всего за три месяца. Кто-то может сказать, что если винрейт этого игрока не изменится, то в онлайн он может выиграть почти в десять раз больше. Однако это не совсем так.

Оппоненты в онлайн покере как правило сильнее, чем игроки в казино.

Этому способствуют несколько факторов:

- Для того, чтобы в покерной экономике могли существовать выигрывающие регуляры и рейк, требуется много минусовых игроков. Как правило, у последних существует некая точка кипения, после которой они бросают игру. В казино проигрывающие игроки могут провести немало часов за столами, прежде чем решат, что с них хватит. Однако в онлайн (из-за возросшей скорости игры) они достигают этого предела гораздо быстрее.
- Чтобы проиграть много денег на высоких лимитах в онлайн, нужно изрядно постараться (в том числе и в психологическом плане). Во-первых, вам потребуется внушительная сумма денег, которую нужно каким-то образом завести в покерную комнату, а после проигрыша повторить весь процесс с самого начала. Во-вторых, в онлайн гораздо проще отдавать себе отчет о проигранных суммах и гораздо сложнее утешать себя, что «все хорошо», поскольку вы всегда будете точно знать, сколько проиграли.
- Эти два фактора ограничивают количество крупной «рыбы» в онлайн покере (по сравнению с аналогичными лимитами в казино). Кроме того, даже немного проигрывающие игроки ненадолго задерживаются в онлайн (поскольку большее количество отыгранных раздач ведет к большим потерям), в отличие от «живого» покера, где они могут пробыть на высоких лимитах какое-то время.
- Игроки, заинтересованные в первую очередь в своей прибыли, чаще предпочитают играть в интернете, так как в покере деньги приходят с дистанцией. В живых же играх не так часто можно получить весомое преимущество над оппонентами, а дисперсия обычно выше в разы.

Как результат, средний стол в онлайн будет сильнее, чем его аналог в «живом» покере. Но на этом различия не заканчиваются - онлайн покер требует другого набора навыков и ставит перед игроками несколько иные задачи.

Нужно запомнить

- Онлайн покер предлагает игрокам несколько иной набор данных для чтения рук и стратегий. На место физических теллсов приходит анализ сыгранных раздач.
- Для оценки игры оппонента в онлайн можно использовать майнинг, однако в этом случае мы часто столкнемся с проблемой ограниченности размера выборок. С другой стороны, мы можем использовать сохраненные раздачи для эффективного анализа нашей собственной стратегии.
- Игры в онлайн как правило сложнее своих аналогов в казино из-за большей скорости и психологических барьеров, которые зачастую отсутствуют в «живом» покере.
- Единственный игрок, на которого у вас может быть объективная выборка, это вы сами.
- В онлайн покере получение статистически значимой выборки для вашей игры займет всего несколько месяцев.
- Онлайн игроки зачастую оказываются сильнее своих «коллег», играющих на сравнимых лимитах в казино.

Глава 7

Играем правильно, Часть I: игра с открытыми картами

Эксплуатирование оппонента состоит из двух шагов. Первый - чтение рук и стратегий, мы уже обсуждали это в Главе 5. Второй - принятие решение на основании информации, собранной на первом шаге. Здесь вам необходимо просто посчитать математическое ожидание от каждого из возможных действий и выбрать наиболее прибыльное (обладающее наивысшим математическим ожиданием).

При подсчете математического ожидания против диапазона оппонента мы будем рассматривать каждую из его вероятных рук и оценивать ожидаемый выигрыш для возникающих ситуаций. Но поскольку в каждом случае мы будем играть только одну конкретную комбинацию против заранее известной руки нашего оппонента, мы вполне можем перевернуть карты рубашкой вниз и проанализировать раздачу с открытыми картами. Это может показаться достаточно скучным занятием, и в большинстве случаев это действительно так - готовые руки будут стараться ставить, а дро будет делать колл или фолд в зависимости от предлагаемых шансов банка, как мы уже выяснили это в Главе 4. Однако иногда встречаются и достаточно интересные раздачи, где правильное действие не будет ни очевидным, ни интуитивно понятным.

Пример 7.1

Рассмотрим следующую ситуацию:

Игра в Семикарточный Стад (7-card Stud), ставки \$30-\$60.

Карты игрока X: A♥ K♦ Q♥ J♠ T♣

Карты игрока Y: A♠ T♠ 8♠ 5♠ 2♣

В банке уже находится \$400. У игрока Y осталось в стэке только \$120, стэк игрока X значительно больше, и он говорит свое слово первым. Что должны сделать игроки?

Анализируя эту раздачу, нам стоит рассмотреть предложенную ситуацию с позиции каждого из игроков. Первым решение принимает игрок X, это будет либо чек, либо бет. Давайте будем описывать различные варианты стратегии игрока в более полной манере, которая также отражает и сам процесс выбора какого-то определенного варианта. Так что вместо простого «чек или бет», перед игроком X стоит дилемма выбора из сразу пяти опций:

Чек с намерением скинуть карты на ставку	(Чек-Фолд)
Чек с намерением уравнивать ставку	(Чек-Колл)
Чек с намерением сделать рейз ставки	(Чек-Рейз)
Бет с намерением уравнивать рейз	(Бет-Колл)
Бет с намерением скинуть карты на рейз	(Бет-Фолд)

Игрок X может выбрать из предложенных вариантов тот, который обладает наибольшим математическим ожиданием. Мы представили набор возможных действий для игрока X именно таким образом потому что очень важно всегда учитывать последующие действия на текущей улице торговли. Многие ошибки могут быть смягчены или вовсе предотвращены, если вы задумываетесь о возможных действиях оппонента и вашей реакции на них.

Сейчас мы можем сразу оценить математическое ожидание четвертого и пятого варианта. Математическое ожидание в случае, если игрок Y сделает фолд или колл в ответ на ставку абсолютно не зависит от того, какой был план у игрока X на случай, если игрок Y сделает рейз, так что мы можем не рассматривать такие ситуации. Если игрок Y сделает рейз, то больше ставок на следующих улицах не будет, так что математическое ожидание от варианта (Бет-Колл) будет следующим:

$$\langle X, \text{Бет-Колл} \rangle = p(X \text{ выигрывает}) (\text{размер итогового банка}) - (\text{размер инвестиций в банк на текущей улице})$$

В банке уже лежат \$400; если оба игрока поставят свои оставшееся \$120 на этой улице, то итоговый банк составит \$640. Игрок Y попадет во флэш на шестой улице $\frac{8}{42}$ раза (ему подходят 8 карт из оставшихся 42 неизвестных), а если эта карта его не усилит, то у него будет еще один шанс поймать нужную карту на ривере - это случится $\frac{8}{41}$ раз. Поскольку игрок X уже не может улучшить относительно руки своего оппонента, его шансы выиграть банк будут следующими:

$$\begin{aligned} p(X \text{ выигрывает}) &= 1 - p(X \text{ проигрывает}) \\ p(X \text{ выигрывает}) &= 1 - \{p(Y \text{ выигрывает на 6 улице}) + \\ &+ [p(Y \text{ не попадает во флэш на 6 улице})][p(Y \text{ выигрывает на ривере})]\} \\ p(X \text{ выигрывает}) &= 1 - [(\frac{8}{42}) + (\frac{34}{42})(\frac{8}{41})] \\ p(X \text{ выигрывает}) &= 65.16\% \end{aligned}$$

Поэтому для варианта (Бет-Колл) у игрока X будет следующее математическое ожидание:

$$\begin{aligned} \langle X, \text{Бет-Колл} \rangle &= p(X \text{ выигрывает}) (\text{размер итогового банка}) - \\ &- (\text{размер инвестиций в банк на текущей улице}) \\ \langle X, \text{Бет-Колл} \rangle &= (0.6516) (\$640) - \$120 \\ \langle X, \text{Бет-Колл} \rangle &\approx \$297 \end{aligned}$$

Если X сделает ставку и скинет свои карты на рейз, то его математическое ожидание будет равно:

$$\langle X, \text{Бет-Фолд} \rangle = - \$60$$

Но это не конечные значения математического ожидания для данных стратегий. Однако поскольку математическое ожидание для случаев, когда игрок Y не делает рейз абсолютно одинаково (иными словами, для получения окончательной оценки ожидаемого выигрыша нам пришлось бы учитывать и ситуации, когда оппонент не делает рейз нашей ставки), мы можем пренебречь этими ситуациями и сравнивать математическое ожидание для вариантов (Бет-Колл) и (Бет-Фолд) напрямую. Очевидно, что первая из перечисленных стратегий обладает более высоким ожидаемым выигрышем. Поэтому мы можем исключить стратегию (Бет-Фолд) из наших дальнейших рассуждений. Этот выбор также можно было бы сделать и интуитивно, ведь у игрока X шанс выиграть банк составляет более 65%! Так что скидывать такую руку в уже достаточно большом банке, когда ваш оппонент имеет на руках лишь флэш-дро, было бы настоящей катастрофой.

В таком же ключе оценим три стратегии, которые подразумевают чек от игрока X. Если игрок Y сделает ответный чек, все три варианта будут иметь одинаковое математическое ожидание. Если же игрок Y сделает ставку, то:

$$\langle X, \text{Чек-Фолд} \rangle = \$0$$

Если игрок X сделает чек, а затем рейз, а игрок Y сделает колл, тогда математическое ожидание для игрока X будет в точности таким же, как если бы X сделал ставку и уравнил рейз от игрока Y. Если игрок X делает чек и рейз, а игрок Y скидывает свои карты, то ожидаемый выигрыш первого будет еще выше:

$$\langle X, \text{Чек-Рейз} \mid Y \text{ Колл} \rangle \approx \$297$$

$$\langle X, \text{Чек-Рейз} \mid Y \text{ Фолд} \rangle = \$460$$

На основании этих цифр мы можем исключить опцию (Чек-Фолд). В этом примере игрок X может выиграть гораздо больше денег, если каждый раз будет выбирать линию Чек-Рейз вместо Чек-Фолд.

Такой несложный анализ оставляет нам всего три возможных варианта действий для игрока X:

1. Чек-Колл
2. Чек-Рейз
3. Бет-Колл

Однако чтобы сделать окончательный выбор, нам нужно подумать о том, что игрок Y предпримет, если игрок X сделает чек или бет. Предположим, что мы определились с этим вопросом - если игрок X сделает чек, то он получит ответный чек, а если он поставит, то получит колл от игрока Y. Что произойдет на шестой улице? Если игрок Y попал во флэш, то ставок больше не будет - игрок X никогда не сделает колл, поскольку теперь он не может выиграть банк. Если же флэш у игрока Y не закрылся, то тогда этот пример упростится до случая, который мы уже рассматривали в Главе 4. Игрок X делает ставку, а игрок Y выберет между коллом и фолдом в зависимости от предлагаемых ему шансов банка. В нашем примере, естественно, игрок Y будет уравнивать такую ставку.

Используя эту информацию, мы можем посчитать математическое ожидание для каждой из оставшихся стратегий для игрока X.

$$\begin{aligned} \langle X, \text{Чек-Колл} \rangle &= p(\text{флэш на шестой улице})(\$0) + \\ &+ p(\text{флэш на седьмой улице})(-\$60) + p(\text{нет флэша})(\$460) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X, \text{Чек-Колл} \rangle &= \left(\frac{8}{42}\right)(\$0) + \left(\frac{8}{41}\right)\left(\frac{34}{42}\right)(-\$60) + \\ &+ \{1 - [\frac{8}{42} + (\frac{8}{41})(\frac{34}{42})]\}(\$460) \end{aligned}$$

$$\langle X, \text{Чек-Колл} \rangle = \left(\frac{8}{41}\right)\left(\frac{34}{42}\right)(-\$60) + (1 - \frac{8}{42} - (\frac{8}{41})(\frac{34}{42}))(\$460)$$

$$\langle X, \text{Чек-Колл} \rangle \approx \$290.24$$

$$\langle X, \text{Чек-Рейз} \rangle \approx \$290.24$$

Ожидаемые выигрыши для стратегий Чек-Рейз и Чек-Колл ничем не отличаются, поскольку если игрок X делает чек, то игрок Y сделает ответный чек (как мы уже определили ранее), и у игрока X не будет возможности реализовать вторую часть своей стратегии (рейз или колл соответственно).

$$\begin{aligned} \langle X, \text{Бет-Колл} \rangle &= p(\text{флэш на шестой улице})(-\$60) + \\ &+ p(\text{флэш на седьмой улице})(-\$120) + p(\text{нет флэша})(\$520) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X, \text{Бет-Колл} \rangle &= \left(\frac{8}{42}\right)(\$60) + \left(\frac{8}{41}\right)\left(\frac{34}{42}\right)(-\$120) + \\ &+ \{1 - [\frac{8}{42} + (\frac{8}{41})(\frac{34}{42})]\}(\$520) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X, \text{Бет-Колл} \rangle &= \left(\frac{8}{42}\right)(\$60) + \left(\frac{8}{41}\right)\left(\frac{34}{42}\right)(-\$120) + \\ &+ \{1 - [\frac{8}{42} + (\frac{8}{41})(\frac{34}{42})]\}(\$520) \end{aligned}$$

$$\langle X, \text{Бет-Колл} \rangle \approx \$308.43$$

Получается, что игрок X должен делать ставку.

Осталось сделать два немаловажных замечания. Помните, как мы сказали, что стратегия игрока Y должна заключаться либо в ответном чеке, если игрок X не делал ставку, либо в уравнивании ставки от игрока X. Если же игрок Y сделает ставку в ответ на чек от игрока X, то последний может просто уравнивать этот бет и

получить ожидаемый выигрыш в размере \$308.43. Так что игроку Y гораздо выгоднее сделать чек и посмотреть на следующую улицу бесплатно. Мы также можем посчитать математическое ожидание для случая, когда игрок Y делает рейз в ответ на ставку от игрока X. Мы уже выяснили, что для игрока X ожидаемый выигрыш в случае, если он играет по стратегии Бет-Колл на пятой улице составит \$297. Это меньше, чем \$308.43; поэтому игрок Y должен делать рейз против ставки своего оппонента.

Так что если оба игрока хотят максимизировать свой ожидаемый выигрыш, то на пятой улице они должны сыграть так:

Игрок X делает ставку, игрок Y делает рейз, игрок X делает колл.

Пояснение от переводчика: Этот момент может показаться немного непонятным. Действительно, как математическое ожидание от стратегии Бет-Колл превратилось из только что посчитанного \$308.43 в \$297. Дело в том, что цифра в \$308.43 была получена с учетом предположения, что игрок Y делает на пятой улице колл ставки своего оппонента, а не рейз. А цифра \$297 была получена немного ранее как раз для случая, когда игрок Y делает рейз против ставки своего оппонента и получает от него колл.

Это может показаться несколько странным, поскольку следуя нашим расчетам, неготовая рука (дро у игрока Y) должна делать рейз против готовой руки (стрит у игрока X). В этой ситуации игрок X делает ставку и заставляет игрока Y платить, если тот хочет попасть в свое дро. Однако в то же время игрок Y может и должен делать рейз, хотя его шансы выиграть раздачу всего 1 к 2! Это становится возможным из-за ограниченных стэков в данном примере - игрок Y ставит олл-ин, и уже не будет вынужден делать колл следующих ставок. А поскольку у него есть прямые шансы банка для того, чтобы делать колл на пятой улице, он может задуматься о том, чтобы все оставшиеся деньги оказались в центре стола уже сейчас. Так что если он попадает в свой флэш на шестой улице, он получит все деньги от игрока X и его стрита. Здесь главную роль играет то, что дро у игрока Y очевидно (карты лежат рубашкой вниз). Если бы это было не так, то существовала бы вероятность того, что даже если флэш-дро закроется на ривере, игрок X проплатит своему оппоненту еще одну ставку.

Пример 7.2

Теперь давайте рассмотрим другой пример с ограниченными стэками, чтобы лучше изучить степень влияния размера стэка на наши решения.

Игра Пот-Лимит Холдем, однако с одной оговоркой: игроки могут делать только ставки размером в целый банк (или ставить олл-ин, если у них осталось денег меньше, чем уже есть в банке). Это своего рода урезанная версия игры в Пот-Лимит, она существенно проще, чем обычный Пот-Лимит Холдем, в который

играют за столами (где игрок может сделать любую ставку в промежутке между минимальной и размером банка).

Карты игрока X: A♥ A♦

Карты игрока Y: 8♣ 7♣

Флоп: 9♣ 6♣ 2♦

(мы не будем учитывать вероятность раннер-раннер фулл-хауса для AA и раннер-раннер двух пар для 87 ради упрощения расчетов. Просто представьте, что на каждой улице торговли у 87 есть 15 аутов, и они либо попадают в свое дро, либо нет)

Мы можем сразу же посчитать эквити игрока Y на флопе, то есть его шанс на победу, если прямо сейчас откроются оставшиеся две карты:

$$\langle Y \rangle = 1 - p(\text{дро не закроется})$$

$$\langle Y \rangle = 1 - \left(\frac{30}{45} \right) \left(\frac{29}{44} \right)$$

$$\langle Y \rangle = 56.06\%$$

В банке сейчас находится \$100. Игрок X говорит свое слово первым. Какие действия должны предпринимать игроки с различными размерами стэков?

Случай №1: Маленькие стэки.

Для начала давайте рассмотрим ситуацию, когда у обоих игроков остается в стэках по \$50. В этом случае игрок Y будет являться фаворитом, если мы просто выложим на стол оставшиеся две карты (терн и ривер) - шансы на победу у его стрит-флэш дро составляют 56.06%. Если игрок X сделает ставку, то игрок Y должен будет ее уравнивать. В этом случае математическое ожидание игрока X будет равно:

$$\langle X, X \text{ ставит} - Y \text{ уравнивает} \rangle = p(X \text{ выигрывает}) (\text{итоговый размер банка}) - (\text{размер ставки})$$

$$\langle X, X \text{ ставит} - Y \text{ уравнивает} \rangle = [1 - p(Y \text{ выигрывает})] (\text{итоговый размер банка}) - (\text{размер ставки})$$

$$\langle X, X \text{ ставит} - Y \text{ уравнивает} \rangle = [1 - 0.5606] (\$200) - \$50$$

$$\langle X, X \text{ ставит} - Y \text{ уравнивает} \rangle = (0.4394) (\$200) - \$50$$

$$\langle X, X \text{ ставит} - Y \text{ уравнивает} \rangle = \$37.88$$

Это математическое ожидание для ситуации, когда все деньги обоих игроков оказываются в банке уже на флопе, при этом не важно, кто первым сделал ставку. Очевидно, что если игрок X сделает чек, то игрок Y может просто сделать ставку и зафиксировать математическое ожидание для игрока X на уровне \$37.88. У игрока X будут необходимые шансы банка на колл, и его математическое ожидание составит именно \$37.88.

Если бы на флопе оба игрока сделали чек, а игрок Y не попал в стрит или флэш на терне (такое будет случаться $\frac{30}{45}$ раз), то игрок X мог бы поставить на терне. В этом случае его шанс на победу составил бы $\frac{29}{44}$. В то же время игроку Y снова не составило бы труда сделать колл, поскольку его шансы банка были бы 3 к 1. В таком случае математическое ожидание от ставки игрока X равно:

$$\langle X, \text{Бет на терне} \rangle = [p(Y \text{ не попал в дро на терне})] \\ [p(X \text{ выигрывает})(\text{итоговый размер банка}) - (\text{размер ставки})]$$

$$\langle X, \text{Бет на терне} \rangle = (\frac{30}{45})[(\frac{29}{44})(200) - (50)]$$

$$\langle X, \text{Бет на терне} \rangle = \$54.55$$

Как видите, математическое ожидание для игрока X здесь выше, чем в случае, когда оба игрока доходят до олл-ина уже на флопе. И если бы оба игрока увидели терн бесплатно и игрок Y попал в свое дро, то игрок X сделал бы весьма простой фолд. Так что игрок X бы предпочел, чтобы на флопе было два чека.

Однако игрок Y также знает об этом. И поскольку в случае ставки он может зафиксировать математическое ожидание своего оппонента на самом низком уровне, то для рассматриваемого случая последовательность действий игроков должна быть следующей: игрок X должен сделать чек и колл ставки игрока Y. Заметьте, что на флопе, если смотреть только на шанс выигрыша, рука игрока X «стоит» $(\$100)(1 - 0.5606) = \$43.94$, так что последующие ставки уменьшают его долю в банке более чем на \$6.

Случай № 2: Средние стэки.

Теперь предположим, что стэки у обоих игроков равны \$400. И снова, игрок Y имеет небольшое преимущество на флопе, если все деньги окажутся в центре стола - его шанс на победу составляет 56.06%.

Если игрок X сделает ставку, тогда у игрока Y будет три варианта: фолд, колл ставки в 100\$, и олл-ин на \$400 (помните, что игроки могут делать только рейзы размером в целый банк). Если же игрок Y скинет свои карты, то математическое ожидание игрока X составит \$100.

$$\langle X, \text{Бет}; Y, \text{Фолд} \rangle = \$100$$

Если игрок Y пойдет в олл-ин, то математическое ожидание игрока X составит:

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Рейз} \rangle = p(X \text{ выигрывает}) (\text{итоговый размер банка}) -$
- (размер ставки)

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Рейз} \rangle = [1 - p(Y \text{ выигрывает})](\text{итоговый размер банка}) -$
- (размер ставки)

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Рейз} \rangle = (1 - 0.5606)(\$900) - (\$400)$

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Рейз} \rangle = (0.4394)(\$900) - \$400 = \$-4.55$

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Рейз} \rangle = \$-4.55$

Если игрок Y сделает колл, то мы столкнемся с одним из следующих сценариев:

1. $\frac{15}{45}$ раз игрок Y попадет в дро, а игрок X потеряет \$100 (ставка на флопе).

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Колл} \mid Y \text{ попал в дро} \rangle = \$ -100$

2. $\frac{30}{45}$ раз игрок Y не попадет в свое дро, и наша игра упростится до подсчета шансов банка:

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Колл} \mid Y \text{ не попал в дро} \rangle = p(X \text{ выигрывает}) (\text{итоговый размер банка}) - (\text{размер ставки})$

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Колл} \mid Y \text{ не попал в дро} \rangle = (\frac{29}{44})(\$900) - \$400$

$\langle X, \text{Бет}; Y \text{ Колл} \mid Y \text{ не попал в дро} \rangle = \$193.18$

На терне игрок X поставит в банк оставшиеся \$300, а игрок Y будет вынужден сделать колл с шансами на победу $\frac{15}{44}$. Математическое ожидание игрока X в таком случае будет составлять:

$\langle X \rangle = [p(X \text{ выигрывает})](\text{сумма выигрыша X}) - [p(Y \text{ выигрывает})](\text{сумма проигрыша X})$

$\langle X \rangle = (\frac{29}{44})(\$500) - (\frac{15}{44})(\$400)$

$\langle X \rangle = \$193.18$

Примечание переводчика: На самом деле результаты этой формулы, а также формулы выше одинаковы, поскольку это одно и то же уравнение. Видимо, авторы книги решили привести такие вычисления для наглядности.

$(\frac{29}{44})(\$900) - \$400$

$(\frac{29}{44})(\$500 + \$400) - \$400$

$(\frac{29}{44})(\$500) + (\frac{29}{44})(\$400) - \$400$

$(\frac{29}{44})(\$500) - (\frac{15}{44})(\$400)$

Суммарное математическое ожидание игрока X, таким образом, составит:

$$\begin{aligned} \langle X, \text{Бет}; Y \text{ Колл} \rangle &= \left(\frac{15}{45} \right) (-\$100) + \frac{30}{45} (\$193.18) \\ \langle X, \text{Бет}; Y \text{ Колл} \rangle &= \$95.45 \end{aligned}$$

Мы подсчитали математическое ожидание с точки зрения игрока X, однако в раздаче находится два игрока, поэтому игрок Y должен стараться либо максимизировать свое собственное ожидание, либо минимизировать ожидаемый выигрыш игрока X, хотя результат у этих действий будет один и тот же. Поэтому очевидно, что если игрок X сделает ставку в \$100, игрок Y должен пойти в олл-ин, поскольку это наилучший из вариантов для него.

С другой стороны, игрок X может чекнуть. В этом случае игрок Y может сделать ответный чек или поставить.

Если игрок Y делает чек, то мы снова столкнемся с двумя вероятностными исходами. $\frac{15}{45}$ раз игрок Y попадет в свое дро, и игрок X не потеряет ничего. $\frac{30}{45}$ раз нужная карта не придет, тогда игрок X сделает ставку размером в целый банк и получит колл.

В таком случае общее математическое ожидание игрока X составит:

$$\begin{aligned} \langle X \text{ Чек}; Y \text{ Чек} \rangle &= [p(Y \text{ попал в дро}) (\text{вложения X в банк})] + p(Y \text{ не попал в дро}) \\ &\quad [p(X \text{ выигрывает}) (\text{размер итогового банка}) - \text{размер ставки}] \\ \langle X \text{ Чек}; Y \text{ Чек} \rangle &= \left(\frac{15}{45} \right) (\$0) + \left(\frac{30}{45} \right) \left[\left(\frac{29}{44} \right) (\$300) - \$100 \right] \\ \langle X \text{ Чек}; Y \text{ Чек} \rangle &= \$65.15 \end{aligned}$$

Также игрок Y может сделать ставку. Если игрок X в ответ пойдет в олл-ин, то его математическое ожидание составит \$-4.55, а если он сделает колл, то его ожидаемый выигрыш составит \$95.45.

Составим таблицу с полученными результатами (математическое ожидание с точки зрения игрока X):

Действие игрока X	Действие игрока Y		Колл	Рейз	Фолд
	Чек	Бет			
Бет			\$95.45	-\$4.55	\$100
Чек	\$65.15				
Чек-Рейз	\$65.15	-\$4.55			
Чек-Колл	\$65.15	\$95.45			

Как видите, если игрок X делает чек, то его математическое ожидание составит \$+65.15 (если игрок Y сделает ответный чек). Так что при заданном размере стэков (\$400), оба игрока должны сделать чек на флопе - ставка не будет хорошим решением ни для кого. Если игрок X поставит, то игрок Y сможет просто поставить все фишки в центр и оказаться фаворитом в этом олл-ине. Но если игрок Y решит поставить сам, то игрок X сделает колл и сможет поставить достаточно большое количество денег в банк на терне, когда уже перевес по эквити будет на его стороне. Также заметьте, что увеличение стэков в раздаче сыграло на руку игроку X. Если при маленьких стэках он, по сути, терял деньги из-за ставок (по сравнению с его долей в банке, основанной исключительно на вероятности выигрыша), то здесь его математическое ожидание для выбранной линии составит \$65.15 против \$43.94. Иными словами, ставки на постфлопе увеличивают его долю в раздаче на \$21.19.

Случай №3: Глубокие стэки.

Последний пример из упрощенной игры в Пот-Лимит Холдема, который мы рассмотрим здесь, будет касаться ситуации, когда стэки обоих игроков составляют \$1300 (по три рейза размером в банк). На этот раз мы разделим процесс подсчета нашего математического ожидания на несколько ситуаций:

Ситуация А) На флопе никто не делает ставку.

Поскольку ни один из игроков не сделает на терне рейз, математическое ожидание игрока X для случая, когда никто не ставил на флопе, будет таким же как в предыдущем примере и составит \$65.15.

Ситуация Б) На флопе будет сделана одна ставка (\$100).

Этот случай также идентичен одному из рассмотренных выше, где ожидание игрока X составляет \$95.45.

Ситуация В) На флопе будет сделано две ставки (\$400).

Примечание переводчика: Подразумевается одна ставка и один рейз размером в банк (\$400).

Здесь если игрок Y попадет в свою руку на терне, то математическое ожидание игрока X будет равно \$-400. Если игрок Y не получит своего дро на терне, то игрок X сделает ставку в \$900 и получит колл от своего оппонента. $\frac{29}{44}$ раз игрок X выиграет банк, остальное время все деньги заберет игрок Y.

$$\begin{aligned} \langle X, \text{две ставки на флопе} \rangle &= \left(\frac{15}{45} \right) (-\$400) + \left(\frac{30}{45} \right) \\ & \quad [(\$2700) \left(\frac{29}{44} \right) - \$1300] \end{aligned}$$

$$\langle X, \text{две ставки на флопе} \rangle = \$346.21$$

Ситуация Г) Три ставки (\$1300) будут сделаны уже на флопе.

Когда оба игрока дойдут до олл-ина на флопе, игрок X будет иметь следующее математическое ожидание:

$$\langle X, \text{три ставки на флопе} \rangle = (1 - 0.5606) (\$2700) - \$1300$$

$$\langle X, \text{три ставки на флопе} \rangle = (0.4394) (\$2700) - \$1300$$

$$\langle X, \text{три ставки на флопе} \rangle = -\$113.62$$

Исходя из этих расчетов, мы можем сделать несколько выводов:

1. Игрок X никогда не должен делать рейз (вторую ставку) на флопе.

Если он это сделает, то игрок Y поставит олл-ин и выведет раздачу в ситуацию Г) - худший сценарий развития событий для игрока X.

2. Игрок Y никогда не должен делать рейз (вторую ставку) на флопе.

Если он решится повысить ставку игрока X, то тогда мы получим ситуацию В) - в свою очередь, это худшее, что может случиться для игрока Y.

3. Игроку X более выгоден случай Б), нежели случай А).

Если перед ним встанет выбор: делать только одну ставку или не ставить вовсе - он должен поставить.

4. Игрок Y должен выбирать случай А), а не случай Б).

Если у него будет возможность не делать ставку, ему стоит ей воспользоваться и посмотреть на терн бесплатно.

Теперь мы можем сформулировать стратегии для игроков X и Y. Никто из игроков не должен делать рейз на флопе. Следовательно, оба игрока могут вложить в банк первую ставку, если захотят. Поскольку это лучший вариант для игрока X и он принимает решение первым, то он сделает бет, а игрок Y сделает колл. Таким образом, игрок X будет иметь математическое ожидание \$95.45. Стоит заметить, что математическое ожидание для игрока X в случае, когда игрок Y скидывает свои карты на флопе, будет равняться \$100. В этом примере игрок X существенно выигрывает от ставок на постфлопе - его доля в банке возросла с \$43.94 до \$95.45.

Когда готовая рука оказывается в раздаче против хорошего дро, последнее должно стараться поставить все деньги в банк как можно раньше, пока есть возможность увидеть две улицы. Для готовой руки же выгоднее контролировать экшен и ограничивать количество ставок - так она сможет заставить промазавшее дро заплатить на следующих улицах. В случае №2, где у игроков оставалось в стэках всего по две ставки, если готовая рука делает бет на флопе, у дро появляется возможность перевести раздачу в олл-ин. Поэтому готовая рука должна отложить свою ставку, чтобы поставить все деньги на терне, когда дро оппонента не закроется. Когда в стэках остается три ставки, готовая рука может

позволить себе сделать ставку на флопе, зная, что дро уже не сможет предотвратить вторую ставку на терне.

Если мы лишь немного изменим раздачу, уменьшив количество аутов у игрока Y на один, до 14, то при стэках в \$1300 игроку Y уже придется скинуть свою руку, хотя он и является фаворитом в раздаче. Он не только не может уравнивать ставку на терне, но даже на флопе ему будет не по шансам уравнивать бет от оппонента.

Примечание от переводчика: Почему игрок Y должен будет скидывать свое сильное дро? Его шансы банка на флопе составляют 1 к 2 (при условии, что оппонент ставит целый банк), однако его шанс попасть в дро на терне всего $14/45$, а на ривере - $14/44$. Поэтому в условиях предложенной игры ему будет невыгодно делать колл, а согласно нашим расчетам рейз на флопе также не будет являться хорошим решением.

Пока мы рассматривали ситуации исключительно из игр в «урезанный» Пот-Лимит Холдем, где разрешены только ставки размером в банк. Однако в вариации Пот-Лимит Холдема, который используется за столами, игроки могут делать ставки любого размера (вплоть до размера банка). Как это может повлиять на математическое ожидание?

Давайте попробуем разобраться и вернемся к случаю, где у обоих игроков оставались по две ставки.

Пример 7.3

Игра Пот-Лимит Холдем, два игрока.

Карты игрока X: A♥ A♦

Карты игрока Y: 8♣ 7♣

Флоп: 9♣ 6♣ 2♦

(мы снова не будем обращать внимание на возможность раннер-раннер фулл-хауса для игрока с AA, и раннер-раннер двух пар для 87. В раздаче считаем, что у 87 есть 15 чистых аутов.)

В банке находится \$100, у обоих игроков остается по \$400 (две ставки размером в банк).

Как мы уже посчитали раньше, для игрока X математическое ожидание от ставки в \$100 составляет \$-4.55, а математическое ожидание от чека (можем считать это ставкой в \$0) равно \$65.15.

Что если мы дадим игроку X возможность делать ставку другого размера? Скажем, он решает поставить \$5.

Мы уже знаем, что если на терне игрок Y попадет в свое дро, то игрок X не будет ни ставить, ни делать колл ставки своего оппонента. Если же дро не закроется на терне, игрок X сделает ставку размером в банк, либо поставит олл-ин. Таким образом, мы можем выразить общее математическое ожидание для игрока через количество денег, которое будет поставлено в банк на флопе. Пусть x будет количеством денег, которое каждый из игроков вкладывает в банк на флопе (до \$100; ситуации, когда игроки ставят больше, мы рассмотрим через пару страниц). На терне банк будет составлять $(2x + \$100)$.

Таблица для расчета математического ожидания игрока X будет выглядеть так:

Событие	$p(\text{события})$	Результат
Y выигрывает на терне	15/45	-x
Y выигрывает на ривере	$(30/45)(15/44)$	-x - $(2x + 100)$
X выигрывает	$1 - (15/45) - (30/45)(15/44)$	$3x + 200$

$$\langle X, \text{«х» на флопе} \rangle = \left(\frac{15}{45}\right)(-x) + \left(\frac{30}{45}\right)\left(\frac{15}{44}\right)(-3x - 100) + \left(1 - \left(\frac{15}{45}\right) - \left(\frac{30}{45}\right)\left(\frac{15}{44}\right)\right)(3x + 200)$$

$$\langle X, \text{«х» на флопе} \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)(-x) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{15}{44}\right)(-3x - 100) + \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{15}{44}\right)\right)(3x + 200)$$

$$\langle X, \text{«х» на флопе} \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)(-x) + \left(\frac{5}{22}\right)(-3x - 100) + \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{22}\right)(3x + 200)$$

$$\langle X, \text{«х» на флопе} \rangle = (-x/3) - 15x/22 - 500/22 + \left(\frac{29}{66}\right)(3x + 200)$$

$$\langle X, \text{«х» на флопе} \rangle = -x/3 - 15x/22 - 500/22 + 29x/22 + 2900/33$$

$$\langle X, \text{«х» на флопе} \rangle = -x/3 - 1500/66 + 7x/11 + 5800/66$$

$$\langle X, \text{«х» на флопе} \rangle = 10x/33 + \$65.15$$

Мы можем проверить полученное уравнение, подставив вместо «х» значения \$0 (в этом случае получим \$65.15), а также \$100 (получим \$95.45). Однако сейчас наше уравнение описывает только математическое ожидание для ставок от \$0 до \$100. Если игрок X вкладывает в банк на флопе больше, чем в \$100, то на терне он уже не сможет поставить целый банк. Выведем уравнение для значений «х» от \$100 до \$400:

Событие	$p(\text{события})$	Результат
Y выигрывает на терне	15/45	-x
Y выигрывает на ривере	$(30/45)(15/44)$	-400
X выигрывает	$1 - (15/45) - (30/45)(15/44)$	500

$$\begin{aligned} \langle X, \$x \rangle &= \left(\frac{15}{45} \right)(-x) + \left(\frac{30}{45} \right) \left(\frac{15}{44} \right)(-400) + \left(1 - \frac{15}{45} - \frac{30}{45} \right) \left(\frac{15}{44} \right)(400) \\ \langle X, \$x \rangle &= \left(\frac{1}{3} \right)(-x) + \left(\frac{5}{22} \right)(-400) + \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{22} \right)(400) \\ \langle X, \$x \rangle &= (-x/3) + \left(\frac{5}{22} \right)(-400) + \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{22} \right)(500) \\ \langle X, \$x \rangle &= -x/3 + \$128.79 \end{aligned}$$

Для «х» = \$400 мы получим математическое ожидание равное \$-4.55.

Теперь у нас есть составная функция для математического ожидания игрока X, когда он ставит на флоре «х» долларов:

х на промежутке [\$0, \$100]:
таким образом

$$\begin{aligned} \langle X, \$x \rangle &= 10x/33 + \$65.15 \\ \langle X, \$0 \rangle &= \$65.15 \text{ и } \langle X, \$100 \rangle = \$95.45 \end{aligned}$$

х на промежутке [\$100, \$400]:
таким образом

$$\begin{aligned} \langle X, \$x \rangle &= -x/3 + \$128.79 \\ \langle X, \$100 \rangle &= \$94.45 \text{ и } \langle X, \$400 \rangle = \$-4.55 \end{aligned}$$

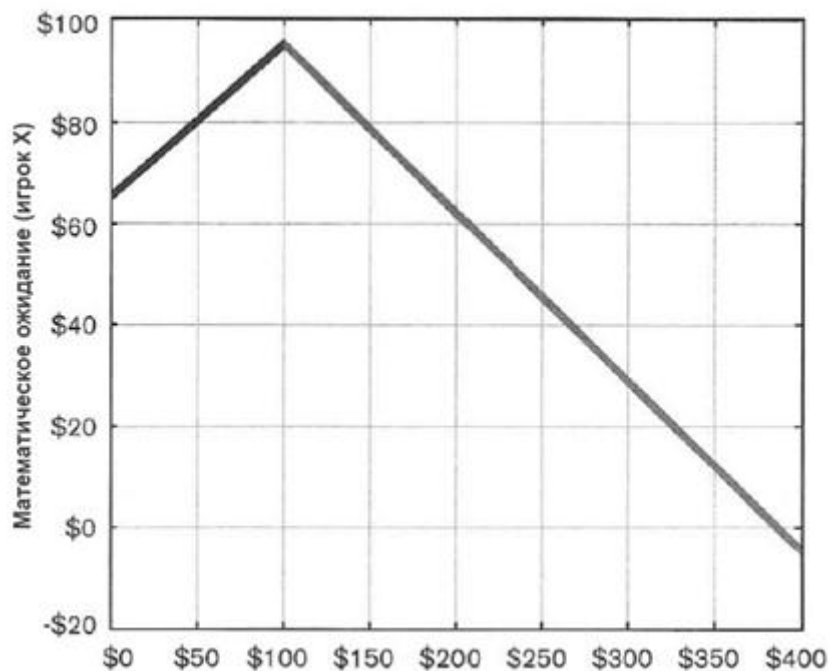


Рисунок 7.1. Математическое ожидание игрока X в примере 7.3 (для различных размеров банка)

Давайте вернемся к ситуации, когда игрок X ставит \$5. Здесь перед игроком Y открывается бесконечное множество возможных размеров рейза, однако исходя из приведенного выше графика, мы можем легко отсечь большинство из них. Игрок Y может сделать рейз размером от \$10 до \$115, однако если он выберет любой размер от \$10 до \$100, то это просто увеличит математическое ожидание

игрока X. Таким образом он должен выбирать из диапазона от \$100 до \$115, но поскольку каждый лишний доллар на этом промежутке уменьшает математическое ожидание игрока X, то игроку Y нужно сделать рейз до \$115 (если он хочет вложить в банк больше \$100).

Поэтому все, что нам осталось - это сравнить математическое ожидание игрока X для двух ситуаций.

$$\langle X, \$x \rangle = 10x/33 + \$65.15$$

$$\langle X, Y \text{ уравнивает } \$5 \rangle = (10/33)(\$5) + \$65.15$$

$$\langle X, Y \text{ уравнивает } \$5 \rangle = \$66.67$$

$$\langle X, Y \text{ делает рейз до } \$115 \rangle = (-1/3)(\$115) + \$128.79$$

$$\langle X, Y \text{ делает рейз до } \$115 \rangle = \$90.46$$

Таким образом, игрок Y должен просто уравнивать ставку своего оппонента.

Делая ставку в \$5, игрок X увеличил свою долю в банке на \$1.50. До определенного момента каждый доллар, вложенный игроком X в банк, будет увеличивать его долю на $10/33$ доллара. Если он сделает ставку в \$10 на флопе, то его доля в банке составит уже \$68.19 (при условии, что игрок Y сделает колл). Игрок X может продолжать ставить все больше и больше, пока математическое ожидание для рейза и колла у игрока Y не станет одинаковым. В этой точке размер ставки игрока X будет оптимальным, поскольку математическое ожидание достигнет своего максимума. Когда игрок X делает ставку такого размера, у игрока Y будет выбор вложить в банк \$x, или же сделать рейз и вложить $(3x + 100)$.

$$\langle X, Y \text{ делает колл} \rangle = \langle X, Y \text{ делает рейз до } (3x + 100) \rangle$$

$$10/33 (x) + \$65.15 = -1/3(100+3x) + \$128.79$$

$$10/33 (x) = -x + \$30.30$$

$$x = \$23.26$$

Это и есть лучший размер ставки для игрока X - при нем его математическое ожидание будет наивысшим. Вне зависимости от того, какое действие выберет его оппонент, игрок X гарантирует себе ожидаемый выигрыш в \$72.20:

$$\langle X, x = \$23.26 \text{ на флопе} \rangle = 10/33 x + \$65.15 = \$72.20$$

Вывод, который можно сделать из всего сказанного, достаточно простой - размеры стэков имеют первостепенную значимость даже при игре с открытыми картами. Кроме того, как можно увидеть из полученных нами результатов, более глубокие стэки выгодны готовым рукам, поскольку позволяют делать ставки против незакрывшихся дро на терне. Это противоречит достаточно устоявшемуся

стереотипу, что руки-дро лучше разыгрываются при больших стэках из-за потенциальных шансов банка.

Еще одна важная идея, которую стоит вынести из наших рассуждений: хорошие дро должны стремиться поставить все деньги в банк как можно раньше в раздаче.

Пример 7.4

Давайте рассмотрим распространенный сценарий из Безлимитного Холдема.

Карты игрока X: A♥ K♦

Карты игрока Y: Q♥ Q♣

Все действия происходят на префлопе. Игрок Y поставил блайнды в \$100, у каждого из игроков в раздаче по \$800.

Предположим, что карты вскрываются последовательно - игрок X видит свои AK, принимает какое-то решение, а затем игрок Y показывает ему свою пару дам. Скажем, игрок X делает рейз до \$300. Как должен ответить его оппонент?

Рука AK должна увидеть все пять карт. Она попадет в пару на флопе всего 1/3 раз, однако если будут сданы еще терн и ривер, то вероятность выигрыша у QQ составит 43%. Чем глубже стэки, тем больше AK должны стараться дойти до олл-ина на префлопе, а QQ должны делать все возможное, чтобы увидеть флоп и выбить своего оппонента на досках без A или K. Верно?

Нет.

Для начала, давайте рассмотрим случай с короткими стэками:

Игрок Y имеет более 57% на победу со своими QQ, если он сделает рейз до \$800, то игрок X будет вынужден сделать колл при шансах банка 3 к 2. В более маленьком рейзе нет никакого смысла, поскольку игрок X сможет сделать ре-рейз до \$800 и зафиксировать свое математическое ожидание. Чтобы дойти до олл-ина на префлопе, игроку Y надо доставить в банк еще \$700:

$$\langle Y, \text{олл-ин} \rangle = (0.5717) (\$800 + \$800) - \$700$$

$$\langle Y, \text{олл-ин} \rangle = \$214.72$$

С другой стороны, давайте предположим, что игрок Y делает колл со своими QQ. В банке будет \$600. На флопе придет туз или король (без дамы) около 30% раз. В этом случае игрок X сможет доставить в банк оставшиеся деньги, и его оппонент выкинет свою руку. Оставшиеся 70% раз флоп будет благоприятным для QQ, игрок Y пойдет в олл-ин и заставит игрока X сделать фолд с AK.

$\langle Y, \text{колл} \rangle = p(\text{А или К на флопе}) (Y \text{ проигрывает}) + p(\text{флоп без А или К})$
(размер банка)

$$\begin{aligned}\langle Y, \text{колл} \rangle &= (0.3) (-\$200) + (0.7) (\$400) \\ \langle Y, \text{колл} \rangle &= \$220\end{aligned}$$

Здесь игроку Y выгоднее сделать колл и посмотреть на флоп, чем поставить олл-ин на префлопе.

Если мы увеличим стэки до \$1800, то ситуация станет прямо противоположной:

$$\begin{aligned}\langle Y, \text{олл-ин} \rangle &= (p(Y \text{ выигрывает})) (\text{размер банка}) - (\text{цена олл-ина}) \\ \langle Y, \text{олл-ин} \rangle &= (0.5717) (\$3600) - \$1700 \\ \langle Y, \text{олл-ин} \rangle &= \$358.12 \\ \langle Y, \text{колл} \rangle &= \text{все еще } \$220\end{aligned}$$

Теперь игроку Y гораздо выгоднее поставить олл-ин уже на префлопе.

Это несколько разнится со взглядом на розыгрыш ситуации QQ/AK, который разделяют многие игроки. Так, с глубокими стэками QQ должны стараться дойти до олл-ина на префлопе из-за своего значительного перевеса в эквити, в то время как с более короткими стэками эта рука предпочтет посмотреть флоп. Однако такие выводы стоит делать с одной существенной оговоркой - в рассмотренной нами ситуации QQ могут с легкостью поставить все деньги в центр на префлопе, потому что им заранее известно, что у оппонента на руках АК. В реальности же всегда существует опасность увидеть у оппонента AA и KK. С другой стороны, многие игроки слишком сильно цепляются за возможность увидеть флоп, забывая при этом, что их рука это не «монетка» против АК. Напротив, QQ имеют существенное преимущество.

Вернемся к нашему первоначальному предположению, что на каждой из улиц готовая рука должна ставить, а дро - делать либо фолд, или колл (в зависимости от предложенных шансов банка). Как мы увидели, существуют некоторые ситуации, где подобное клише не работает. В Пот-Лимите, к примеру, размер оставшихся стэков имеет огромное влияние на выбор стратегии для каждого из игроков. То же самое относится и к Лимитному покеру.

Хотя при игре с открытыми картами иногда встречаются интересные ситуации, вы наверняка никогда не окажетесь за столом с подобными правилами. Тем не менее, рассмотренные нами случаи - хорошая база для концепций, которые мы будем изучать в дальнейшем. Каким бы вы ни были гениальным чтецом рук, вы не выиграете и доллара, если играя с открытыми картами не можете принять правильное решение. И хотя сформулированные выше основы игры на практике часто служат лишь условным ориентиром, знание ситуаций, где правильная

стратегия может отличаться от того, что подсказывает нам интуиция, может существенно повысить наш ожидаемый выигрыш за столом.

Нужно запомнить

- Парадоксальные ситуации встречаются даже когда мы играем с открытыми картами.
- Когда есть возможность сделать последний рейз в раздаче и дойти до олл-ина на ранних улицах торговли, дро должны всерьез рассматривать эту стратегию и склоняться к более агрессивной игре, а не полагаться исключительно на шансы банка. В этом случае дро не столкнется со ставками на следующих улицах, а готовая рука проиграет больше, если на терне или ривере придет нужная карта.
- Размеры стэков оказывают огромное влияние на выбор стратегии в Пот-Лимит и Безлимитном покере. Даже при игре с открытыми картами изменения в стэках могут заставить лучшую руку сдаться ввиду опасности новых ставок на следующих улицах торговли.
- Хорошим дро (которые имеют около 50% на победу) выгодно идти до олл-ина уже на флопе. Однако если это не представляется возможным (или они не могут вложить в банк достаточно денег, чтобы ставки на следующих улицах не уменьшали их математическое ожидание), то они должны стараться инвестировать в банк как можно меньше.
- При игре против дро готовым рукам следует стараться сохранить большую ставку для следующей улицы торговли - если дро не закроется, они могут получить с него значительное количество денег, имея огромный перевес в эквити.

Глава 8

Играем правильно, часть II: рука против диапазона

Теперь давайте рассмотрим игру, в которой нам известна рука только одного из игроков, в то время как карты всех остальных участников раздачи представлены некими диапазонами. Для анализа таких ситуаций мы можем использовать модели для расчета математического ожидания из прошлых глав, при условии, что нам удастся правильно описать стратегии оппонентов. Пока мы не будем включать в наши рассуждения возможные подстройки и ограничимся предположением, что мы с хорошей точностью можем предсказать, как другие игроки будут разыгрывать различные комбинации из своих диапазонов. В следующих главах мы еще поговорим о подстройках и о том, как сила всего диапазона может измениться в результате применения новой стратегии для отдельных рук.

Перед тем как мы приступим непосредственно к анализу обозначенных выше ситуаций, давайте обратимся к идее, которая играет важную роль при решении более сложных игр. Она особенно ярко проявляется в играх наподобие Холдема, где на префлопе мы часто увидим, как одна рука делает рейз, другая уравнивает, а в стэках остается еще достаточно большое количество денег. Когда раунд торговли заканчивается коллом, нам зачастую интересно узнать математическое ожидание в этой раздаче для обоих участников, чтобы сравнить его с ожиданием от альтернативного действия, например, ре-рейза.

Так вот, математическое ожидание в раздаче состоит из двух компонентов. Первый - **шоудаун** эквити, то есть ожидаемый выигрыш нашей руки, если бы раздача закончилась прямо сейчас, и на стол вышли все пять карт. Второй - **экс-шоудаун** эквити, оно показывает ожидание от ставок на постфлопе. «Экс-» - это латинский префикс, дословно означающий «вне», таким образом, термин экс-шоудаун можно определить как «эквити вне текущего банка». Сумма двух компонентов и будет равна нашему математическому ожиданию в раздаче. На самом деле, эти значения взаимосвязаны, поскольку они зависят от силы диапазонов каждого игрока. Более того, в покере вы часто встретите случаи, где шоудаун эквити будет положительным, а экс-шоудаун - отрицательным. Представьте себе, что у вас очень слабое дро на флопе, оппонент делает ставку, тем самым вынуждая вас скинуть свою руку. Здесь ваше шоудаун эквити равно вероятности попадания в дро, умноженной на размер банка до ставки. В свою очередь, экс-шоудаун эквити будет в точности равно шоудаун эквити, но со знаком минус, поскольку после фолда вы теряете долю в этом банке. В сумме эти два значения дают ваше математическое ожидание в раздаче - ноль.

Примечание переводчика: Определение «эквити вне текущего банка» может показаться запутанным, однако его смысл легко объяснить. Шоудаун эквити фактически говорит нам о том, какая часть уже созданного банка принадлежит нам - если раздача закончится на префлопе, и на стол выйдут все пять карт, то будет разыгран банк, образованный ставками, коллами и рейзами только на префлопе. С другой стороны, экс-шоудаун эквити показывает ожидание ставок на постфлопе - то есть ставок, которые еще не произошли и не являются частью банка на префлопе.

Мы были бы рады проанализировать игру с конкретной рукой на всех конфигурациях флопов, тернов и ривере против различных стратегий оппонентов, однако это невыполнимая задача, особенно за столом. Вместо этого мы постараемся «научить» вашу интуицию делать приближенные оценки математического ожидания. Представьте себе раздачу, в которой участвуют два игрока с одинаково сильными диапазонами - тогда их шоудаун эквити не будут сильно отличаться друг от друга. Что же касается экс-шоудауна, то если оппоненты равны и по уровню игры, решающее значение будет иметь позиция. Игрок, находящийся на баттоне всегда будет иметь более высокое экс-шоудаун эквити.

На распределение шоудаун и экс-шоудаун эквити в раздаче влияют различные факторы. Например, мы знаем, что диапазон одного из игроков состоит из [AA, KK, QQ, AK], а у его оппонента на руках случайные карты. В этом случае первый игрок будет огромным преимуществом в шоудаун и экс-шоудаун эквити. Однако его экс-шоудаун эквити будет меньше, чем в ситуации, когда у него оказывается одна из этих сильнейших рук, но при более широком диапазоне.

Мы также можем посчитать ожидание от розыгрыша конкретной руки из диапазона. Так, если у нас оказываются AA на баттоне и мы делаем рейз (скажем, мы играем в лимитный Холдем), то с учетом того, как выглядит наш стандартный диапазон в этой ситуации, мы можем рассчитывать на выигрыш 4-5 ставок в экс-шоудаун вэлью против сильного оппонента в большом блайнде.

Примечание от переводчика: Почему экс-шоудаун эквити первого игрока могло бы быть больше? Дело в том, что если его диапазон состоит только из AA, KK, QQ и AK, его оппонент почти наверняка не отдаст ему много денег на постфлопе. Однако если у нас окажется, к примеру, пара королей, а наш диапазон будет широким, то наш ожидаемый выигрыш существенно возрастет - скорее всего, оппонент нам просто не поверит.

Когда мы рассматриваем игры, где участники раздачи могут сделать колл на префлопе, мы часто говорим, что «нам принадлежит X% банка после колла». В некоторых ситуациях, например, когда мы дошли до олл-ина на префлопе, это

будет исключительно наше шоуаун эквити. Однако в большинстве случаев мы будем пытаться оценить влияние будущих ставок на наше ожидание.

Многие типы стратегии эксплуатации достаточно незамысловаты. Против оппонента, который слишком много блефует на ривере, мы должны чаще делать колл с руками, способными побить только блеф. Против оппонентов, которые слишком часто скидывают свои карты, мы, наоборот, должны блефовать с воздухом - так мы максимизируем наше ожидание для этой части диапазона. Мы уже рассматривали подобные примеры в самом начале второй части книги. Выведенные тогда правила неплохо подходят для быстрого поиска решения с наивысшим ожиданием, при условии, что мы оказались в подходящей ситуации. Однако в более сложных раздачах нам придется рассмотреть все возможные стратегии и оценить их математическое ожидание.

Пример 8.1

Мы находимся на большом блайнде за столом \$5-\$10. Игра - безлимитный Холдем. У баттона (которого мы хорошо знаем) осталось \$200 в стэке. Все игроки делают фолд, баттон рейзит до \$30. Малый блайнд сбрасывает карты.

Об оппоненте на баттоне мы знаем следующее:

- Он делает рейз с диапазоном: {22+, A2+, KT+, K9s+, QTs+, QJ+, JTs, T9s}.
- Если мы пойдем в олл-ин (ему придется вложить в банк еще \$170), то он сделает колл с AA-JJ и AK, а все остальные руки скинет в пас.

Когда мы сделаем колл, у нас будет какое-то эквити на постфлопе, в зависимости от ширины нашего диапазона. Например, если мы уравнием с тем же диапазоном, с которым оппонент делает рейз на префлопе, мы можем рассчитывать примерно на 45% эквити (с поправкой на то, что мы без позиции).

Какая стратегия эксплуатации для нас будет наиболее прибыльной?

Оппонент делает рейз с $\frac{350}{1326}$ всех рук:

- 6 комбинаций для каждой из тринадцати пар = 78
- 16 комбинаций для двенадцати рук вида Ax = 192
- 12 комбинаций для каждой из четырех разномастных рук = 48
- 4 комбинации для каждой из восьми одномастных рук = 32

С другой стороны, олл-ин он уравнивает только с 40 комбинациями. Кроме того, эти цифры будут меняться в зависимости от нашей собственной руки (если у нас окажется туз, то количество комбинаций AA и Ax в диапазоне оппонента уменьшится и т.п.). Однако в этом примере мы будем использовать базовую пропорцию, без учета блокеров.

Если мы пойдем в олл-ин, то мы будем рисковать \$190 (эффективный стэк в раздаче минус большой блайнд, который уже не принадлежит нам), чтобы выиграть банк в \$45. Мы можем так делать со всеми нашими руками, и тогда выиграем банк $\frac{310}{350}$ раз (или 88.57%). Плюс даже когда оппонент уравнивает наш олл-ин, у нас будет какое-то эквити, пусть и небольшое - случайная рука выиграет у диапазона {AA-JJ, AK} около 24.95% раз.

Таким образом, мы можем рассчитать математическое ожидание от олл-ина:

$$\langle \text{Олл-ин} \rangle = p(\text{оппонент делает фолд}) (\text{банк}) + p(\text{оппонент делает колл}) (p(\text{мы выигрываем}) (\text{итоговый банк}) - (\text{цена олл-ина}))$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Олл-ин} \rangle &= (0.8857) (\$45) + (1 - 0.8857) ((0.2495) (\$200 + \$200 + \$5) - \$190) \\ \langle \text{Олл-ин} \rangle &= \$29.69 \end{aligned}$$

Итак, олл-ин для нас будет прибыльным действием. Мы можем просто ставить в банк все свои деньги с любой случайной рукой, даже 72о. Как оказалось, стратегия нашего оппонента имеет существенный изъян - он слишком часто скидывает в ответ на рейз.

Теперь представьте, что у нас 32о. У этой руки 21.81% на победу против диапазона {JJ+. AKs, AKo}. Получим:

$$\langle 32о, \text{олл-ин} \rangle = p(\text{оппонент делает фолд}) (\text{банк}) + p(\text{оппонент делает колл}) (p(\text{мы выигрываем}) (\text{итоговый банк}) - (\text{цена олл-ина}))$$

$$\begin{aligned} \langle 32о, \text{олл-ин} \rangle &= (0.8857) (\$45) + (0.1143)((\$405)(0.2181) - \$190) \\ \langle 32о, \text{олл-ин} \rangle &= \$28.24 \end{aligned}$$

Теперь мы можем сравнить это ожидание со случаем, когда мы делаем колл \$20 на префлопе. Здесь «х» означает наше эквити на постфлопе.

$$\langle \text{Колл} \rangle = x(\text{банк}) - \text{цена колла}$$

$$\langle \text{Колл} \rangle = x(\$65) - \$20$$

Чтобы колл со случайной рукой был настолько же хорошим решением как и пуш, ожидаемый выигрыш от колла должен быть больше \$29.69.

$$\begin{aligned} x(\$65) - \$20 &> \$29.69 \\ x &> 76.45\% \end{aligned}$$

Понятно, что даже самый одаренный в мире игрок никогда не будет иметь 76% эквити в банке без позиции со случайной рукой против оупен-рейза из баттона.

Но что если у нас оказались тузы? Теперь у нас есть блокеры на некоторые руки из диапазона оппонента, так что самое время применить теорему Байеса. Получим, что в этом случае оппонент делает рейз с 249 комбинациями, а уравнивает олл-ин только с 27. Наше эквити против его диапазона колла олл-ина будет равно 83.43%.

$$\langle \text{AA, олл-ин} \rangle = p(\text{оппонент делает фолд}) (\text{банк}) + p(\text{оппонент делает колл}) (p(\text{мы выигрываем}) (\text{итоговый банк}) - (\text{цена олл-ина}))$$

$$\begin{aligned} \langle \text{AA, олл-ин} \rangle &= (222/249) (\$45) + (27/249) ((0.8343)(\$405) - \$190) \\ \langle \text{AA, олл-ин} \rangle &= \$56.16 \end{aligned}$$

Для прибыльного колла с тузами необходимо соблюдение следующего неравенства:

$$\begin{aligned} x(\$65) - \$20 &> \$56.16 \\ x &> 117.2\% \end{aligned}$$

Такой сценарий не является невозможным, особенно если мы играем против агрессивного оппонента. Однако важно понимать, что здесь мы говорим о лучшей руке, которая только может у нас оказаться.

Что в итоге? Олл-ин с любыми двумя картами против такого баттона оказывается гораздо более прибыльным решением, чем колл или фолд. Исключением будет случай, когда у нас очень сильная рука - тогда все зависит от того, насколько хорошо мы и наш оппонент играем на постфлопе.

Такой анализ может дать очень хорошее представление о пробелах в стратегиях наших оппонентов. В этом примере игрок на баттоне слишком часто скидывал руки из своего диапазона оупен-рейза, однако мы смогли убедиться в этом только после полного расчета математического ожидания. За столом же к похожему выводу можно прийти несколько более простым путем:

"Оппонент открывает 25% рук, но делает колл только с парой комбинаций. Если я поставлю олл-ин, то я рискую примерно четвертьми размерами банка (4 к 1). Если оппонент будет уравнивать олл-ин реже, чем один раз из пяти, то я могу так делать с любой рукой, и еще иногда я выиграю банк после его колла."

*Примечание переводчика: Почему оппонент должен делать колл реже, чем один раз из пяти? Мы рискуем четвертьми единицами (текущий размер банка), чтобы выиграть одну. Если оппонент четыре раза скинет свои карты (+4 * 1) и один раз уравнивает (-1 * 4) то мы ничего не выиграем, но ничего и не проиграем - как можно понять, уравнивать в таком случае он будет 1 раз из 5 (четыре плюс один).*

Поиск уязвимостей в игре оппонента - главный элемент в стратегии эксплуатации. В примере выше мы обнаружили дисбаланс между диапазоном рейза и диапазоном колла. Это позволяет нам эксплуатировать игрока на баттоне, ставя олл-ин с любыми двумя картами. Если бы наш оппонент хотел исправить свою ошибку, он мог бы либо сузить свой диапазон для оупен-рейза, либо расширить диапазон для колла олл-ина.

Но оппонентов также можно эксплуатировать и на различных флопах, которые на первый взгляд могут показаться неподходящими для нас.

Пример 8.2

Представьте себе следующую ситуацию в лимитном Холдеме:

Вы делаете рейз с 99 из позиции UTG за полным столом (скажем, что ваш диапазон для рейза состоит из AA-99, АК, АQ, и АJs). Оппонент слева от вас делает ре-рейз (вы полагаете, он так делает с AA-ТТ, АК и АQs). Все остальные игроки скидывают свои карты, вы делаете колл.

Флоп А72, разномастный. На ваш взгляд, оппонент будет разыгрывать весь свой диапазон на таком флопе следующим образом (мы не будем учитывать вероятность попадания в сет на терне, чтобы упростить расчеты):

Если вы сделаете чек, он поставит со всеми руками

Если вы сделаете бет, он уравнивает со всеми руками

Если вы сделаете чек-рейз на флопе, он уравнивает со всеми руками

Таблица стратегий для терна выглядит следующим образом:

Ваши действия на флопе	Ваши действия на терне					
		AA	KK/QQ	JJ/TT	AK	AQs
Чек-рейз						
	Бет	Рейз	Фолд	Фолд	Рейз	Колл
	Чек-колл	Бет	Бет	Бет	Бет	Бет
	Чек-рейз	Бет/Ре-рейз	Бет/Фолд	Бет/Фолд	Бет/Колл	Бет/Колл
Чек-колл						
	Бет	Рейз	Колл	Колл	Рейз	Рейз
	Чек-колл	Бет	Чек	Бет	Бет	Бет
	Чек-рейз	Бет/Ре-рейз	Чек	Бет/Фолд	Бет/Колл	Бет/Колл
Бет						
	Бет	Рейз	Колл	Колл	Рейз	Рейз
	Чек-колл	Бет	Чек	Бет	Бет	Бет
	Чек-рейз	Бет/Ре-рейз	Чек	Бет/Фолд	Бет/Колл	Бет/Колл

Как нам следует разыграть свои 99?

Как правило, думающий игрок заметит, что его пара не бьет ни одну руку из диапазона оппонента, и при этом у нее всего два аута. Ситуация не из лучших, поэтому план «чек и фолд на флопе» выглядит наиболее предпочтительным.

Однако правильный подход к этой задаче предполагает вычисление ожидаемого выигрыша для различных стратегий. Как вы уже знаете, чек/фолд на флопе обладает нейтральным математическим ожиданием - с этой линией мы и будем сравнивать все остальные стратегии.

Для начала, давайте определим количество комбинаций для каждой руки оппонента. С учетом туза на флопе, структура его диапазона выглядит следующим образом:

AA: $\frac{3}{42}$
 KK, QQ, JJ, TT: $\frac{6}{42}$ на каждую пару
 AK: $\frac{12}{42}$
 AQs: $\frac{3}{42}$

Рассмотрим несколько возможных стратегий:

- 1) Чек/фолд на флопе
- 2) Чек/колл на флопе, а затем чек/рейз на терне. Если оппонент ответит на рейз, то мы просто сдадимся и не будем больше вкладывать деньги в банк.
- 3) Чек/рейз на флопе и бет на терне. Если оппонент сделает ре-рейз на флопе или терне, мы скинем свою руку, если же он уравнивает на терне, то мы не будем ставить на ривере.
- 4) Бет на флопе и терне

Стратегия 1) Математическое ожидание равно 0.

Стратегия 2) Получим следующее математическое ожидание:

vs AA, AK, AQs: -5 ставок

vs JJ-ТТ: +10.5 ставок (7.5 из банка на префлопе, 1 на флопе и 2 на терне)

vs KK-QQ: -3 ставки

$$<\text{Стратегия 2}> = p(\{AA, AK, AQs\})(-5) + p(\{JJ, TT\})(10.5) + p(\{KK, QQ\})(-3)$$

$$<\text{Стратегия 2}> = (\frac{3}{7})(-5) + (\frac{2}{7})(10.5) + (\frac{2}{7})(-3)$$

$$<\text{Стратегия 2}> = 0$$

Стратегия 3) Получим следующее математическое ожидание:

vs. AA, AK, AQs: - 4 ставки

vs. KK-ТТ: +9.5 ставок

$$<\text{Стратегия 3}> = p(\{AA, AK, AQs\})(-4) + p(\{KK, QQ, JJ, TT\})(9.5)$$

$$<\text{Стратегия 3}> = (\frac{3}{7})(-4) + (\frac{4}{7})(9.5)$$

$$<\text{Стратегия 3}> = 3.71$$

Стратегия 4) Получим следующее математическое ожидание:

vs AA, AK, AQs, KK, QQ: -3 ставки

vs JJ, ТТ: +8.5 ставок

$$<\text{Стратегия 4}> = p(\{AA, AK, AQs, KK, QQ\})(-3) + p(\{JJ, TT\})(8.5)$$

$$<\text{Стратегия 4}> = (\frac{5}{7})(-3) + (\frac{2}{7})(8.5)$$

$$<\text{Стратегия 4}> = \$0.29$$

Оказывается, что интуиция изначально подсказала нам стратегию с наименьшим ожиданием!

Явным фаворитом здесь, конечно же, является стратегия чек/рейза на флопе с последующей ставкой на терне - с такой линией наш ожидаемый выигрыш составит почти четыре ставки. Против оппонента, использующего такую комбинацию стратегий, фолд девяток на флопе был бы грубейшей ошибкой. Но давайте разберемся, почему чек/рейз на флопе и ставка на терне настолько прибыльны.

Наш оппонент раздул банк на префлопе до шести ставок. Однако на доске с тузом он готов скинуть более половины своего диапазона всего против четырех ставок с нашей стороны. Иными словами, следуя этой линии, мы вкладываем в банк четыре ставки, чтобы выиграть шесть, а другой игрок скидывает свои карты более чем в половине случаев. Таким образом, этот флоп для девяток превратился из очень плохого (так бы и было, если бы мы показали оппоненту свою руку) в очень хороший, исключительно благодаря структуре диапазона оппонента, а также выбранной им стратегии.

К слову, он может избежать эксплуатации на такой текстуре доски, но в этом случае ему придется уравнивать наши ставки с KK и QQ.

Пример 8.3 (возвращаемся к раздаче 5.1)

Последний пример для этой главы мы уже рассматривали ранее - это рука из Стада Хай-Лоу (пример 5.1 из пятой главы).

Давайте освежим в памяти ход раздачи:

Мы: (5♠A♥) 4♥ 8♠ J♥ A♠
Оппонент: (??) 6♣ T♦ K♣ 3♣

Анте составляет \$5, лимит \$30-60. В банке лежит \$345, мы говорим свое слово первыми. Нам удалось сузить диапазон оппонента до следующего набора комбинаций:

AA	1
Q♣ Qx	3
Qx Qy	3
J♣ Jx	2
Jx Jy	1
X♣ Y♣	6

Наша задача - проанализировать игру против этих рук на шестой улице. В каждом случае мы будем делать предположения о том, какие действия предпримет наш оппонент, исходя из того, что в его распоряжении будет не так много равноценных вариантов. Правда, стоит отметить, что против сильных игроков стратегия игры на поздних улицах значительно усложняется из-за появления рейзов с полу-блефами и т.п. Мы также будем считать, что с нашей рукой мы

даже не рассматриваем возможность чек/рейза - такая линия здесь полностью лишена смысла.

В ходе анализа мы будем делать множество допущений об игре оппонента на следующих улицах торговли. И хотя мы не можем быть полностью уверены в таких вещах, возможные ошибки в наших суждениях почти никак не повлияют на ответ, если только мы не будем систематически недооценивать или переоценивать эквити нашей руки.

Против AA:

Когда мы выбираем между чеком и бетом против близкой по силе руки, важно понимать, что, скорее всего, ход раздачи от нашего решения никак не изменится - одна ставка зайдет в банк в любом случае.

Если мы сделаем бет, то оппонент не решится ответить рейзом с AA - у нас вполне может оказаться готовая лоу-рука (и это будет отрицательный фриролл для него, ведь мы уже не можем проиграть банк), плюс иногда мы переставим его с натсом. С другой стороны, если мы сделаем чек, то пара тузов с флэш-дро наверняка поставит. Таким образом:

$$\langle \text{Бет} \rangle = \langle \text{Чек} \rangle$$

Заметьте, что нам на самом деле не очень важно знать точное математическое ожидание для каждого действия - достаточно просто определить, какая из линий лучше. Очевидно, что в этой ситуации у нас будет необходимое эквити для колла, так что мы даже не будем думать том, чтобы скинуть свои карты; а разницы между бетом и чеком, как мы уже определили, не будет никакой.

Против Q♣ Qх и J♣ Jх:

Здесь у нас как лучшая хай-рука, так и лучшая лоу-рука. Если бы это был обычный Стад, мы бы без лишних разговоров сделали ставку, чтобы получить вэлью от дро. Однако в Хай-Лоу наша комбинация еще сильнее - даже если оппоненту зайдет на следующей улице флэш или две пары, 12 из оставшихся 39 карт гарантируют нам половину банка. Мы можем использовать эквити нашей руки вместо общего эквити в раздаче (с учетом ривера), поскольку иногда оппонент попадет в свой флэш и одновременно получит лучшую лоу-руку, или же наше лоу-дро не закроется на ривере. Против Q♣ Q♦, у нас около 70% на победу:

$$\langle \text{Бет} \rangle = p(\text{выигрываем})(\text{банк на ривере}) - \text{ставка}$$

$$\langle \text{Бет} \rangle = (0.70) (\$345 + \$120) - \$60$$

$$\langle \text{Бет} \rangle = \$265.50$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = p(\text{выигрываем})(\text{банк})$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = (0.70) (\$345)$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = \$241.50$$

Таким образом, ставка на шестой улице позволит нам получить дополнительные \$24.

Против Qx Qu и Jx Ju:

В этом случае мы стоим против еще более слабой руки, поэтому бет - единственно верное решение.

С другой стороны, теперь оппоненту придется решать, что делать со своей парой дам или валетов. Поскольку у нас часто окажутся как минимум тузы (плюс вероятные две пары, тузы с лоу-дро, лоу-рука со слабым хай-дро и т.п.), он, скорее всего, сдастся.

Если же мы сделаем чек, то оппонент возможно положит нас на пару младше тузов и уравнивает одну ставку на ривере.

$$\langle \text{Бет} \rangle = \$345$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = p(\text{выигрываем})(\text{банк на ривере}) - \text{ставка}$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = (0.85)(\$345 + \$120) - \$60$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = \$335.25$$

Здесь бет принесет нам дополнительные \$10, так как мы заберем весь банк прямо сейчас и не позволим нашему оппоненту попасть в дро.

Против X♣ Y♣:

Если мы решим сделать ставку, то окажемся в непростой ситуации. У оппонента на руках готовый флэш и лоу-дро, так что мы наверняка получим рейз. С учетом нашего лоу-дро, а также вероятности полублефа, нам придется делать колл. Таким образом, мы либо поставим в банк две ставки на шестой улице и одну на седьмой (если попадем в две пары или лоу-дро), либо только две ставки на шестой улице (если нам ничего не зайдет).

С другой стороны, вполне очевидно, что против такой руки мы должны делать чек. Тогда на шестой улице оппонент поставит, а мы уравниваем.

Если мы попадем в свои ауты на ривере, у нас будет 13% эквити против диапазона оппонента. Аутами мы считаем двух тузов и все карты от двойки до восьмерки,

плюс три валета. То есть 26 раз из 34 у нас будет следующее ожидание:

$$\langle \text{Бет} \rangle = p(\text{выигрываем}) (\text{итоговый банк}) - \text{инвестиции в банк}$$

$$\langle \text{Бет} \rangle = (0.13) (\$345 + \$360) - \$180$$

$$\langle \text{Бет} \rangle = \$-88.35$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = p(\text{выигрываем}) (\text{итоговый банк}) - \text{инвестиции в банк}$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = (0.13) (\$345 + \$240) - \$120$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = \$-43.95$$

И $\frac{8}{34}$ раз мы не попадем в свои ауты и потеряем все деньги, вложенные на шестой улице:

$$\langle \text{Бет} \rangle = \$-120$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = \$-60$$

Рассчитаем математическое ожидание для каждой из линий:

$$\langle \text{Бет} \rangle = p(\text{не попали в ауты}) (\text{ожидание}) + p(\text{попали в ауты}) (\text{ожидание})$$

$$\langle \text{Бет} \rangle = \frac{26}{34} (\$-88.35) + \frac{8}{34} (\$-120)$$

$$\langle \text{Бет} \rangle = \$-95.80$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = p(\text{не попали в ауты}) (\text{ожидание}) + p(\text{попали в ауты}) (\text{ожидание})$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = \frac{26}{34} (\$-43.95) + \frac{8}{34} (\$-60)$$

$$\langle \text{Чек} \rangle = \$-47.73 \sim \$-48$$

Составим сводную таблицу для всех рук в диапазоне оппонента:

Карты оппонента	Вероятность	$\langle \text{Бет} \rangle - \langle \text{Чек} \rangle$	Взвешенное ожидание
AA	1/16	+	0
$Q\clubsuit Qx$ и $J\clubsuit Jx$	5/16	\$24	\$7.50
$Qx Qy$ и $Jx Jy$	4/16	\$10	\$2.50
$X\clubsuit Y\clubsuit$	6/16	\$-48	\$-18
Итого	1		\$-8 за раздачу

Теперь мы можем добавить в диапазон оппонента несколько нестандартных рук, против которых, как правило, бет будет лучшим решением. Однако для любого адекватного диапазона мы все равно получим схожий ответ - ставка, которую многие игроки бы сделали здесь без лишних разговоров, на проверку оказывается

хуже своей альтернативы.

Примечание от переводчика: Здесь мы нашли не математическое ожидание от ставки (или чека), которое якобы составляет \$-8 за раздачу, а лишь разницу между ожидаемым выигрышем в случае бета и в случае чека. Проще говоря, мы доказали предпочтительность чека на шестой улице, а не его прибыльность.

Как вы могли заметить, в этой раздаче мы сделали достаточно большое количество допущений. Можно не соглашаться с нашими догадками о действиях оппонента, о том, что происходило бы на следующих улицах и т.п. Однако здесь главное совсем не это. На примере простой раздачи из Стада мы продемонстрировали, как следует читать руки, как работает теорема Байеса, как с получением новой информации может меняться наше представление о диапазоне, и как стоит учитывать действия на прошлых улицах. Затем мы использовали все полученные сведения для подробного анализа математического ожидания от розыгрыша нашей руки против диапазона оппонента.

Нужно запомнить

- После определения диапазона и стратегии оппонента, мы можем использовать полученную информацию, чтобы рассчитать математическое ожидание различных линий и выбрать наиболее предпочтительную из них.
- Качественное определение слабых сторон в игре оппонента поможет нам подобрать правильную стратегию эксплуатации непосредственно за столом, где у нас нет возможности произвести необходимые вычисления.
- Мы должны развивать нашу интуицию для ситуаций, которые обычно подразумевают возможность эксплуатации оппонента - так нам будет проще принимать правильные решения в игре.
- Зачастую мы бы хотели играть по-разному против разных частей диапазона оппонента. Чтобы выбрать верную линию против всего диапазона, мы должны взвесить наше математическое ожидание против каждого типа рук в соответствии с их долями в диапазоне.
- Шоудаун эквити отражает ожидаемый выигрыш, если бы раздача закончилась на текущей улице торговли, и на стол вышли оставшиеся карты. Экс-шоудаун эквити показывает наше ожидание от ставок на постфлопе.

Глава 9

Подстройки и баланс: диапазон против диапазона

В предыдущих четырех главах мы предложили простой алгоритм розыгрыша отдельных рук против статичных стратегий. Мы определяли диапазон, делали предположения о возможных линиях розыгрыша, и на основании этих данных затем искали стратегию с максимальным математическим ожиданием. Такой подход позволяет получить максимум вэлью с конкретной рукой против любого оппонента, который играет по статичной стратегии, либо отклоняется от нее в предсказуемой манере.

Но что если оппонент - сильный игрок? Тогда он тоже будет пытаться читать наши руки и стратегии, чтобы затем использовать найденные слабые места. Это значит, что мы должны очень осторожно подходить к эксплуатации такого игрока. Если мы будем это делать в слишком очевидной манере, то ему не составит труда подстроить свою стратегию и перейти к **контрэксплуатации**.

Представьте себе, что мы оказались в некой ситуации, где по нашим данным оппонент блефует на 10% реже, чем должен. Мы можем эксплуатировать эту слабость фолдом со всеми нашими руками, способными побить только блеф, поскольку здесь мы будем проигрывать вэлью бетам оппонента больше, чем выигрывать у блефов.

Однако наш компетентный оппонент не оставит такую подстройку без внимания. Используя тот же самый алгоритм, он найдет только что появившуюся уязвимость в нашей стратегии - мы стали слишком часто скидывать свои руки. Так что теперь он может начать блефовать чаще, чем раньше. Мы же, в свою очередь, ответим на это повышением частоты колл и т.д. Стратегия эксплуатации в каждой из этих ситуаций предполагает достаточно радикальные перемены в наших тенденциях - от «никогда не делать колл» до «всегда делать колл». Однако такая резкая смена стратегии открывает нас для контрэксплуатации со стороны оппонента.

Альтернативой может стать плавная подстройка стратегии - так оппонент не сможет сразу понять что происходит, но в то же время мы потеряем часть ожидания от эксплуатации. Или мы можем продолжить играть в подстройки и контрподстройки, стараясь оказаться на шаг впереди. В таком случае, в выигрыше окажется только игрок, которому удастся правильно предсказать смену стратегии своего оппонента.

Играем против сильных дро

Как вы можете помнить, в одной из прошлых глав мы подробно разобрали игру с конкретной рукой против диапазона оппонента. Однако наш собственный

диапазон зачастую оказывается не менее важным. Когда мы эксплуатируем других игроков, мы используем информацию, которую получаем из их действий. Теперь представьте, что мы играем против оппонента, который старается эксплуатировать нас. Получается, он также может использовать любые подсказки, которые получает из наших линий розыгрыша. То есть против такого игрока мы должны постоянно задумываться о том, как он будет применять такую информацию, и по возможности стараться минимизировать риск контрэксплуатации в нашей собственной стратегии.

Давайте рассмотрим достаточно специфичный тип рук в безлимитном Холдеме - сильные дро. Как правило, такая рука включает в себя флэш-дро, а также несколько дополнительных дро (оверкарты, гатшоты, открытые стрит-дро), что обеспечивает ей от 12 до 15 чистых аутов (около 45% эквити на флопе) против любой топ пары.

В главе, где мы анализировали игру с открытыми картами, мы показали, что сильные дро должны стремиться дойти до олл-ина на ранних улицах торговли, поскольку с выходом новых карт их эквити значительно уменьшалось, а готовые руки получали возможность устанавливать свою цену за просмотр ривера. Однако в случае олл-ина на флопе, такие дро получали возможность реализовать свое эквити.

Давайте установим несколько простых правил, касающихся размеров ставок. Мы еще вернемся к этой теме в следующих главах, поэтому сейчас мы не станем вдаваться в теорию. Во-первых, вам не следует делать ставки размером намного больше банка. Иначе оппонент сможет просто дождаться сильной руки, попутно сбрасывая все свои слабые комбинации, причем даже несколько его коллов сделают овербет убыточным. Наверняка вы встречали игроков, которые ставят олл-ины на десятки (и иногда сотни) больших блайндов с АJ на ранних стадиях турнира. Вполне очевидно, что правильным ответом в такой ситуации будет колл с сильнейшими руками. Так что мы будем считать, что ставки должны делаться меньшего размера, но с более широким диапазоном рук.

Сильные дро, на первый взгляд, как раз относится к этому «более широкому диапазону», однако не все так просто. С хорошей готовой рукой, например двумя парами или сетом, мы бы сделали бет, получили колл от оппонента и с радостью бы продолжили ставить на терне, надеясь получить еще больше вэлью. Однако если у нас сильное дро, и на флопе оппонент уравнивает, мы окажемся в незавидном положении - ведь именно такая линия и нужна любой готовой руке. Поэтому зачастую лучшим решением при коротких стэках с комбо-дро будет пуш на флопе.

Поставьте себя на место оппонента - обычно его стратегией против овербета будет колл с сильнейшими руками. Но даже если он будет уравнивать только с сетами, стритами и т.п., у дро все равно окажется как минимум 30% эквити, и это

создаст определенные проблемы. К примеру, мы ставим олл-ин на \$300 при текущем банке в \$100, наше эквити против диапазона колла составляет 33%. Даже если оппонент будет отвечать нам с 25% своих рук, пуш все равно окажется прибыльным. Так, 75% раз мы заберем \$100 из банка, а в остальных случаях мы будем проигрывать менее 67\$. С другой стороны, наш оппонент может начать делать колл с обычными парами, и здесь нам нужно вернуться к определению сильных дро. Например, против пар даже натсовое флэш-дро имеет очень хорошее эквити, поскольку туз также является нашим аутом; а стрит-флэш дро иногда и вовсе окажется впереди. Чем чаще оппонент будет уравнивать, тем больше эквити будет у дро. Так что олл-ин для нас все равно будет прибыльным, но если оппонент будет выкидывать какую-то часть своих рук (какую именно - зависит от ситуации).

Получается, что при соотношении стэка к банку около 3:1, мы должны идти в олл-ин со своими сильными дро и ставить мало с готовыми руками и слабыми полублефами. Но эту стратегию весьма просто эксплуатировать - наш оппонент может начать уравнивать олл-ины со всеми руками, способными побить дро, при этом зная, что когда мы делаем небольшой бет, сильного дро у нас почти никогда не окажется.

Однако если оппонент принимает олл-ины с достаточно слабыми руками, рассчитывая на свое эквити против дро, мы можем включить в диапазон пуша и сильные готовые руки (сеты и две пары, например). Тогда ему придется выбирать. Либо он будет делать колл и оплачивать все наши натсы, но собирать какое-то взлёт с сильных дро, либо он будет скидывать свои карты, при этом теряя значительную долю в банке против неготовых рук. И хотя наш оппонент может попытаться подстроиться, на первый взгляд очевидного способа эксплуатации такой стратегии нет.

Здесь стоит обратить внимание на две темы. Во-первых, когда мы рассматриваем ситуации вида «диапазон против диапазона», особую значимость приобретает **сокрытие информации**. Когда мы играли руки различной силы по-разному, нас было легко эксплуатировать, поскольку оппонент мог без труда прочесть нас. По-настоящему сильные стратегии предполагают розыгрыш многих рук по одной линии - тем самым мы не позволяем другим игрокам точно определить наш диапазон. Так, в примере с сильными дро оппоненту очень будет сложно придумать стратегию эксплуатации против пуша на флопе с диапазоном, состоящим из дро и сильных готовых рук.

Важность сокрытия информации можно объяснить и по-другому. Подумайте, какая ситуация будет наилучшей для эксплуатации оппонента? Когда мы имеем дело с узким диапазоном и очевидной стратегией. Однако против оппонента, который разыгрывает большое количество рук в одинаковой манере, мы вряд ли сможем быстро подобрать стратегию эксплуатации, ведь его диапазон будет очень размытым и неопределенным.

Что касается второй темы, представьте, что в вашем диапазоне есть две руки с равными распределениями, А и В, причем вы можете выбрать линию для розыгрыша с каждой из них (Х и Y). Мы решили, что ради сокрытия информации хотим играть с А и В одинаково. Для руки А чуть лучше подходит стратегия Х, а для руки В стратегия Y гораздо лучше Х. Тогда при прочих равных условиях мы должны играть обе руки по стратегии Y. Точно к такому же выводу мы пришли и в примере выше, когда задались вопросом о линии с сильными готовыми руками. Вполне очевидно, что в вакууме с натсами нам стоит делать небольшие ставки. Однако пуш с этими руками на флопе (наряду с дро) пошел всему диапазону на пользу - в результате оппонент потерял возможность эксплуатировать нашу стратегию. Еще одним примером этой идеи является дилемма розыгрыша АК и АА на префлопе. Зачастую АК окажутся фаворитом в префлоп олл-ине (особенно на поздних стадиях турнира). Однако если дело дойдет до постфлопа, и мы вложим в банк, скажем, треть стэка, то приятного будет мало. С другой стороны, АА хорошо играют в любой ситуации. Так что если мы захотим разыгрывать АА и АК в одном ключе, то правильным решением на префлопе будет олл-ин.

Контрэксплуатация часто подразумевает наличие достоверных фактов о стратегии оппонента. В то же время, непосредственно за столом мы всегда будем опираться только на неполную информацию. Так что нам придется найти золотую середину между эксплуатацией конкретных слабостей оппонента и извлечением максимального вэлью из широкого спектра возможных стратегий, когда мы не знаем об их недостатках или у нас нет надежной информации, чтобы оправдать чистую эксплуатационную стратегию.

В третьей части мы сконцентрируемся на анализе вспомогательных игр и поиске *оптимальных* стратегий - с ними мы сможем максимизировать свое ожидание против стратегий максимальной эксплуатации. Однако нам не обязательно полностью решать какую-то игру, чтобы сформулировать так называемую *сбалансированную* стратегию.

Баланс

Этот термин, в отличие от тех, что мы употребляем в книге, никак не связан с теорией игр. Однако чтобы дать ему определение, нам придется ввести еще одно понятие.

Цена стратегии - это ожидание для заданной стратегии в случае, когда ей противостоит стратегия максимальной эксплуатации. Тогда стратегию можно назвать сбалансированной, если ее цена приближается к ее математическому ожиданию против оптимальной стратегии. Фактически, баланс показывает, насколько эксплуатируема рассматриваемая стратегия.

Приведем пример. Представьте себе игру, где на ривере у игрока А либо воздух, либо закрывшееся флэш-дро (причем дро скрыто). У игрока В две пары. Игрок А

поставит со всеми флэшами, а также с блефами. Считаем, что игрок А попадет во флэш 20% раз, размер банка составляет 3 ставки.

Рассмотрим несколько возможных стратегий для игрока А и найдем ожидание стратегии максимальной эксплуатации (СМЭ) против них для игрока В.

Здесь СМЭ для игрока В предполагает фолд со всем диапазоном, если игрок А блефует менее 5% раз. В этом случае его экс-шоудаун вэлью составит «3х», где «х» - частота блефа:

$$\langle V, \text{фолд} \rangle = -3x$$

Если игрок А блефует более 5% раз, то игрок В должен начать всегда уравнивать на ривере:

$$\langle V, \text{колл} \rangle = x - 0.2$$

Примечание от переводчика: Это первое применение концепции экс-шоудауна в книге, поэтому оно требует подробного объяснения, тем более что условия задачи неполные. Итак, банк составляет 3 единицы, при этом авторы забыли указать размер ставки - это 1 единица. Оптимальная частота блефа для игрока А предполагает, что его оппонент будет безразличен к коллу или фолду, то есть математическое ожидание от этих действий для него будет одинаковым. Тогда:

$$\langle V, \text{фолд} \rangle = \langle V, \text{колл} \rangle$$

$$0 = 0.2 * (-1) + x * 4$$

$$x = 5\%$$

Эту формулу следует читать так: 20% раз мы проигрываем флэшу одну ставку, а «х» раз мы выигрываем три ставки из банка на ривере плюс одну ставку от блефа.

Что касается уравнения $\langle V, \text{колл} \rangle$, то тут важно понимать, что мы говорим об экс-шоудауне, то есть только о ставках, которые будут делаться игроками на ривере. Так что « $x - 0.2$ » получились следующим образом:

$$\langle V, \text{колл} \rangle = 0.2 * (-1) + x * 1$$

То есть 20% раз мы проиграем одну ставку, а «х» раз (когда оппонент блефует) выиграем одну ставку. Банк здесь не учитывается - мы говорим только о ставках (объяснение этого подхода будет в следующей главе).

Что касается уравнения $\langle B, \text{фолд} \rangle$, то тут нам стоит обратиться к определению экс-шоудауна в восьмой главе. Когда мы скидывали руку в примере со слабым дро, мы теряли свою долю в банке, равную (эквити * размер банка до ставки). Если у игрока А флэш, то игрок В ничего не «теряет» (его эквити против флэша составляет 0%). Если же у игрока А оказался блеф, то скинув свою руку, игрок В потеряет весь банк (поскольку его эквити против блефа - 100%).

Тогда ожидание для фолда с позиции экс-шоудауна фактически означает, сколько в среднем игрок В будет «проигрывать», выкидывая лучшую руку:

$$\langle B, \text{фолд} \rangle = -100\% * 3 * x$$

$$\langle B, \text{фолд} \rangle = -3x$$

% диапазона, с которым игрок А блефует	$\langle B, \text{СМЭ} \rangle$ (экс-шоудаун)
0%	0
2%	- 0.06
4.8%	- 0.144
5%	- 0.15
5.2%	- 0.148
10%	- 0.1
20%	0
50%	0.3
80%	0.6

Здесь оптимальной стратегией для игрока А будет блеф с 5% рук. Однако как вы можете видеть, математическое ожидание его оппонента не сильно изменяется около этой точки. При этом чтобы улучшить свое экс-шоудаун вэлью при «х» равном 4.8% и 5.2%, игроку В нужно каждый раз угадывать стратегию своего оппонента, то есть точно следовать СМЭ (либо всегда уравнивать, либо всегда падать).

В этой игре всего одна стратегическая переменная, так что степень сбалансированности стратегии напрямую зависит от близости «х» к оптимальному значению. Но в реальности в нашем диапазоне никогда не будет только двух типов рук, следовательно и переменных будет больше. Например, мы можем ставить с 30% нашего диапазона на вэлью и балансировать это с 10% блефов, хотя оптимальной стратегией вполне может оказаться 50% вэлью бетов и 17% блефов. В таком случае, хоть наша стратегия и теряет в ожидании, она все равно остается сбалансированной и почти неэксплуатируемой.

В покере практически невозможно вывести оптимальные стратегии (ввиду вычислительных барьеров и т.п.). Однако нам под силу сконструировать сбалансированные стратегии, которые будет сложно эксплуатировать. Их можно будет применять в ситуациях, где у нас нет достаточной информации, чтобы эксплуатировать оппонента. При этом мы не сильно потеряем в вэлью по сравнению с чистой стратегией эксплуатации. Плюс сбалансированная стратегия не позволит оппоненту эксплуатировать нас - его наилучшим ответом в такой ситуации будет игра по собственной сбалансированной стратегии. Если же он попытается отклониться от нее, то чаще всего только потеряет часть своего математического ожидания.

Нужно запомнить

- Стратегии максимальной эксплуатации часто подразумевают резкие перемены в наших действиях и линиях розыгрыша. Некоторые игроки это обязательно заметят и попытаются использовать против нас. Поэтому формулируя свою стратегию, мы всегда должны думать о возможной контрэксплуатации со стороны наших оппонентов.
- Существуют так называемые оптимальные стратегии. Они не всегда обладают наибольшим математическим ожиданием (то есть не всегда извлекают максимум вэлью из оппонентов), однако их невозможно эксплуатировать.
- Соккрытие информации - важный принцип построения стратегий, который позволяет нашим оппонентам эксплуатировать нас в наиболее очевидных ситуациях.
- «Баланс» описывает степень эксплуатируемости стратегии. Стратегии, которые можно легко эксплуатировать, являются несбалансированными, и наоборот - стратегии, которые сложно эксплуатировать, являются сбалансированными. При этом «сбалансированный» не всегда означает «прибыльный».
- Оптимальные стратегии идеально сбалансированы.

Mathematics of Poker

Bill Chen, Jerrod Ankenman

Математика покера

Блок №2

(главы 10 - 21)

Перевод: OlegK

Вычитка: Sun_Tczy

Оглавление

Часть III: Оптимальная игра

Глава 10. Встреча с идеальным оппонентом: Теория игр	3
Глава 11. Покер пополам: Игры на половине улицы	18
Глава 12. Хэдс-ап с коротким стэками: Пуш или Фолд	34
Глава 13. Элементарный покер: Игра AKQ	58
Глава 14. Хватит гадать: Размеры ставок в безлимитном покере	70
Глава 15. Игрок X наносит ответный удар: Игры на полной улице	84
Глава 16. Маленькие ставки, большие банки: [0,1] игры без фолдов	103
Глава 17. Вспоминаем про блеф: [0,1] игры с конечным банком	127
Глава 18. Цена имеет значение: Возвращаемся к [0,1] играм	149
Глава 19. На пути к покеру: Статичные игры на нескольких улицах	171
Глава 20. Тянем дро: Игры с дро на нескольких улицах	193
Глава 21. Практическое занятие: Применяем теорию игр	215

Глава 10

Встреча с идеальным оппонентом: Теория игр

До этого момента мы разбирали различные способы эксплуатации уязвимых мест в стратегиях наших оппонентов. Вполне может быть, что в какой-то момент мы окажемся за одним столом с игроками, которые даже не подумают о подстройках - тогда нам останется только продолжать эксплуатировать их и готовить сумки для денег. Однако чаще всего нам будут противостоять как слабые, так и сильные оппоненты, не говоря уже о турнирах, где у нас нет никакой возможности выбрать состав стола. И в худшем случае мы можем оказаться в игре с люлями, которые гораздо сильнее нас.

Что тогда? Мы можем и дальше пытаться сл эксплуатации, но за таким столом это вряд ли окажется хорошей идеей. С другой стороны, большинство игроков используют эту стратегию попросту ввиду отсутствия лучших альтернатив.

Теперь представьте себе другую ситуацию: мы столкнулись с оппонентом, которого раньше никогда не видели. И снова многие предпочтут играть в обычной эксплуатационной манере, попутно пытаясь получить новую информацию и подстроиться соответствующим образом.

Однако в подобных случаях мы рекомендуем использовать несколько иной подход. Действительно, против неизвестных или сильных игроков имеет смысл вывести «стандартную» стратегию, при которой мы хоть и потеряем незначительную часть ожидаемого выигрыша (по сравнению со стратегией эксплуатации), но все попытки оппонентов эксплуатировать нас ни к чему не приведут.

Этот подход к покеру берет свои начала из теории игр, применение которой мы будем изучать в этом разделе книги. Во второй части мы говорили об *играх* и *стратегиях* - фактически, вся теория игр как раз и сосредоточена в этих двух понятиях. К слову, данный раздел математики весьма обширен и применяется во многих других областях знания. Однако поскольку наша книга посвящена покеру, мы не будем затрагивать многие интересные проблемы, которые изучает теория игр, и сосредоточим ваше внимание исключительно на тех ее разделах, которые могут найти свое применение за покерным столом.

Как вы можете помнить, во второй части мы дали следующее определение понятию «игра»:

- Присутствуют два или более участников
- Как минимум одному из участников предоставлен выбор действий
- Игра обладает определенным набором исходов для каждого из участников
- Исход игры зависит от действий, предпринятых участниками

Совокупность действий, совершаемых игроком, и есть определение **стратегии**, а «исход» на языке теории игр означает **выплату** (результат). Каждое возможное действие игрока называется **стратегическим выбором** (или стратегической возможностью).

Примечание от переводчика: Выплата (также встречаются определения платеж, выигрыш) является ключевым понятием в теории игр. Она составляет основу так называемой платежной матрицы, которая говорит о том, какой результат получит каждый из участников при игре по определенной стратегии.

Таким образом, выплата есть результат игры по одной из стратегий для каждого из участников

Поясним и другие понятия. Так, если на флоре мы можем сделать Колл, Чек или Рейз, то каждое из этих действий будет называться стратегическим выбором. А совокупность выбранных действий (например, Колл на флоре и Бет на терне) будет называться стратегией.

В качестве примера давайте рассмотрим одну из простейших игр - «Четное и Нечетное». Участвуют два игрока, каждый из них прячет за спиной руку и либо кладет в нее 1 рубль, либо оставляет пустой. Затем они одновременно раскрывают ладони. Игрок А выигрывает 1 единицу, если сумма оказывается четной, а его оппонент - если нечетной.

Таблица ниже называется **матрицей выплат** (или платежной матрицей) для рассматриваемой нами игры. Стратегии игрока Б отражены сверху, а игрока А - слева. На пересечении находятся выплаты для каждого из игроков (первой идет выплата для игрока А, второй - для игрока Б).

Пример 10.1 - Четное и Нечетное

Игрок А	Игрок Б	
	Ничего	1 рубль
Ничего	(1, -1)	(-1, 1)
1 рубль	(-1, 1)	(1, -1)

Игры обладают интересными свойствами. Некоторые из них, как например «Четное и Нечетное» или покер без рейка, называются играми с постоянной суммой. В них сумма всех выплат всегда равна определенной константе. Все подобные игры можно свести к так называемым **играм с нулевой суммой**, где сложение выплат дает ноль. К слову, покер как раз относится к этому классу игр.

Также игры могут быть *последовательными* или *одновременными*. В рассмотренной нами игре «Четное и Нечетное», действия участников являются одновременными, однако, например, в шахматах игроки действуют один за другим. В теории, мы можем упростить последовательную игру до одновременной, обязав всех игроков детально описать свои стратегии (включая все возможные деревья решений). Однако различие между этими двумя классами игр играет первостепенную роль в таком понятии как «смешанные стратегии» (мы поговорим о них чуть ниже).

Еще одно важное свойство, которое следует отметить - *скрытая информация*. Это информация, которая доступна только ограниченному количеству игроков. Например, в шахматах оба участника знают о ходе игры абсолютно все. Это детерминированная игра, поскольку в теории мы можем просчитать каждое возможное дерево решений и выбрать оптимальный ход. С другой стороны, нарды - это недетерминированная игра, но тоже с полной информацией. Так, при каждом броске кубиков в дереве решений появляются новые ветви, однако вероятностная сторона этого события не является тайной для игроков. Иными словами, идеальная игра в нардах не гарантирует победу исключительно из-за элемента случайности, при этом здесь нет информации, которая была бы известна только одному игроку.

Покер, в свою очередь, основан на скрытой информации, поскольку знание руки оппонента является «Граалем» для любого игрока. Таким образом, в покере наша цель заключается в извлечении прибыли с использованием скрытой информации. Самая важная черта подобных игр заключается в том, что они могут содержать *смешанные стратегии*. Иными словами, это стратегии, которые допускают два или более действий в отдельно взятой ситуации (например, «рейз 20% раз, фолд 80% раз»). Смешанные оптимальные стратегии присущи только последовательными играм, а также играм с неполной информацией.

В этой главе мы будем изучать игры с нулевой суммой с двумя участниками (наподобие «Четного и Нечетного»), поскольку с точки зрения теории игр именно они являются наиболее интересными и показательными. Как мы уже отмечали выше, сумма выплат игроков будет равна нулю - игрок А выиграет столько же, сколько игрок Б проиграет, и наоборот. Приведенное ниже определение для «оптимальных стратегий» применимо только для игр с нулевой суммой с двумя участниками.

Введем понятие *пары стратегий* - это совокупность стратегий игрока А и игрока Б. В игре с нулевой суммой пара стратегий считается *оптимальной*, если ни один из игроков не может увеличить свое математическое ожидание путем одностороннего изменения своей стратегии. Стратегия для одного из игроков считается оптимальной, если она входит в любую из пар оптимальных стратегий.

Представьте, что вы играете против сверхчеловека. Для удобства, мы будем

называть его *идеальным оппонентом*. Он знает абсолютно все о вашей игре и всегда действует против вас по стратегии максимальной эксплуатации. Если вы решите изменить свою стратегию, идеальный оппонент сразу же подстроится и продолжит вас эксплуатировать. Стратегия, обладающая наибольшим математическим ожиданием против такого игрока, и называется оптимальной. Иными словами:

Пара оптимальных стратегий включает в себя стратегии, которые максимально эксплуатируют друг друга.

Стоит отметить, что мы с особой тщательностью вывели определение оптимальности для целей этой главы, поскольку многие науки вкладывают в этот термин несколько иной смысл. Здесь и далее мы будем использовать его только в описанном выше узком контексте и только применительно к стратегиям.

Здесь стоит сделать важную оговорку, хотя мы и сказали, что будем применять термин «оптимальная стратегия» только к играм с нулевой суммой. Дело в том, что мы можем вывести стратегии, при которых ни один из игроков не сможет улучшить свое ожидание и для игр с плавающей суммой, а также многопользовательских игр. Стратегии, удовлетворяющие этому условию, называются *равновесием Нэша*. Доказано, что все игры с большим количеством участников с конечными матрицами выплат обладают как минимум одной точкой равновесия. Более того, в некоторых играх точек равновесия настолько много, что их анализ становится практически невозможным. Мы еще вернемся к этой теме в пятой части нашей книги.

Оптимальные стратегии в *играх с нулевой суммой с двумя игроками* обладают следующими свойствами:

- Если условия игры допускают использование смешанных стратегий (игрок может выбрать действие X в 60% случаев, а действие Y - в оставшихся 40%), то всегда можно вывести пару оптимальных стратегий.
- Как следствие, если оптимальная стратегия содержит в себе смешанную стратегию, то все ее ветви должны иметь одинаковое ожидание против оптимальной стратегии оппонента. Поэтому оптимальные стратегии в покере никогда не подразумевают совершение действий, которые жертвуют часть математического ожидания в определенной ситуации ради «запутывания» оппонента. Если найденная нами смешанная стратегия подразумевает несколько линий розыгрыша в раздаче, все они будут обладать одинаковым математическим ожиданием. В противном случае мы могли бы просто начать играть по линии с более высоким ожиданием, и таким образом улучшили бы свою стратегию, при том, что стратегия оппонента останется неизменной (что противоречит определению оптимальной стратегии).

Часто в очень простых играх оптимальная стратегия гарантирует нам лишь нулевое ожидание. Это происходит из-за того, что такие игры полностью симметричны.

Вернемся к нашей игре «Четное и Нечетное». Первое, что стоит отметить - в ней игрок А должен стараться повторить стратегию своего оппонента.

Примечание переводчика: Игроку А необходимо повторить стратегию своего оппонента, поскольку в таком случае сумма рук будет равна четному числу. Например, если игрок Б решает оставлять свою руку пустой всегда, то игрок А должен делать то же самое.

Однако существует несколько подходов к этой игре. Первый, естественно, предполагает, что участники будут стараться «передумать» друг друга, и тогда преимущество получит тот, кому лучше удастся читать мысли своего оппонента.

Однако давайте предположим, что игрок Б значительно уступает своему визави и уж точно не сможет предсказать его действия. Тогда он может обратиться к оптимальной стратегии - для этого достаточно найти стратегию с максимальным математическим ожиданием для случая, когда ему противостоит идеальный оппонент.

Для начала нужно отметить, что игрок Б может играть по любой смешанной стратегии, состоящей из $X\%$ случаев, когда он оставляет руку пустой, и $(1-X)\%$ случаев, когда он кладет в нее один рубль. Очевидно, что чистые стратегии фактически являются частными случаями смешанных (где одно из действий совершается 0% раз).

Мы могли бы посчитать математическое ожидание для каждой возможной контрстратегии игрока А (которого мы будем считать идеальным оппонентом), однако, как мы уже показали во второй главе, наилучший результат может быть достигнут, если он будет следовать некой чистой стратегии. Так, например, ему следует всегда класть в свою руку один рубль, когда его оппонент делает то же самое более чем в 50% случаев.

Используя уравнение 1.11, получим формулу математического ожидания для игрока Б, если он оставляет свою руку пустой более чем в половине случаев:

Примечание от переводчика: Здесь «х» означает процент раз, когда игрок Б оставляет свою руку пустой. Все уравнения аналогичны уже рассмотренным в предыдущей части книги. Они предполагают игру против идеального оппонента, который будет играть по одной из чистых стратегий, максимально эксплуатирующих стратегию игрока Б.

$$\langle B, x > 0.5 \rangle = (-1)(x) + (1)(1-x)$$

$$\langle B, x > 0.5 \rangle = 1 - 2x$$

Его ожидание в случае, когда он кладет в руку один рубль в половине случаев или чаще:

$$\langle B, x < 0.5 \rangle = (-1)(1-x) + (1)(x)$$

$$\langle B, x < 0.5 \rangle = 2x - 1$$

Как вы можете заметить, ожидаемый выигрыш игрока В против идеального оппонента почти всегда окажется отрицательным.

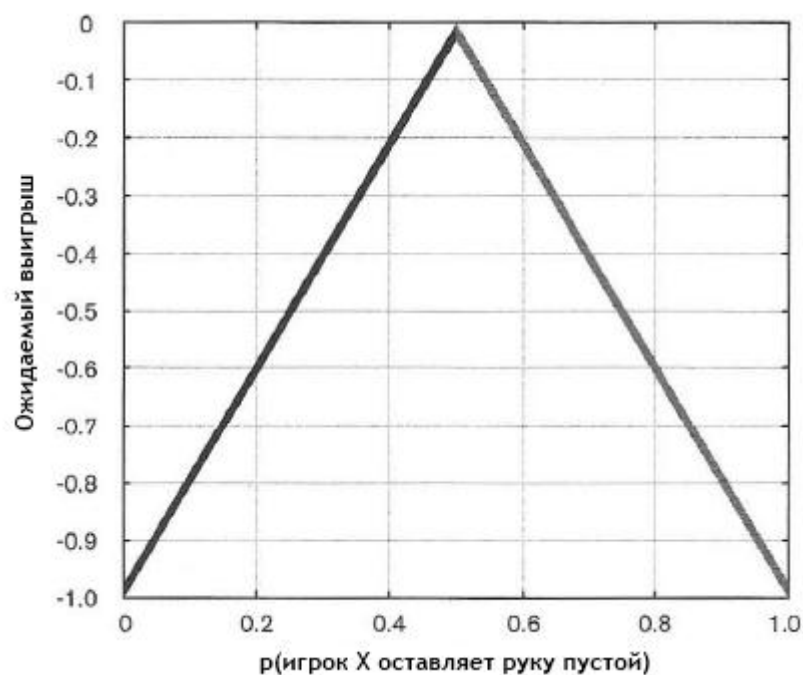


Рисунок 10.1. Ожидание игрок X в игре «Четное и Нечетное»

Так, когда $x > 0.5$, « $1 - 2x$ » меньше нуля, то же самое происходит и с « $2x - 1$ » при $x < 0.5$.

Однако в точке $x = 0.5$, оппонент может делать что угодно, при этом его математическое ожидание никак не изменится:

$$\langle \text{Оппонент, пустая рука} \rangle = (-1)(0.5) + (1)(0.5)$$

$$\langle \text{Оппонент, пустая рука} \rangle = 0$$

$$\langle \text{Оппонент, один рубль} \rangle = (-1)(0.5) + (1)(0.5)$$

$$\langle \text{Оппонент, один рубль} \rangle = 0$$

Это наивысшее ожидание, на которое игрок Б может рассчитывать против

идеального оппонента. Таким образом, оптимальная стратегия для него состоит в том, чтобы оставлять свою руку пустой 50% раз, а остальные 50% - класть в нее один рубль. В этом случае он гарантирует себе нулевое ожидание вне зависимости от стратегии оппонента. При этом обязательное условие - случайность выбора действия. Здесь он может обратиться к монетке, костям или же к осцилляциям частиц и радиоактивному распаду, если он по-настоящему хочет избежать эксплуатации.

Пример 10.2 - Камень, ножницы, бумага

Теперь давайте обратимся к похожей, но несколько более сложной игре - «Камень, ножницы, бумага». В ней каждый из участников может показать либо камень, либо ножницы, либо бумагу. Платежная матрица для нее выглядит следующим образом:

Игрок А	Игрок Б		
	Камень	Бумага	Ножницы
Камень	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
Бумага	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
Ножницы	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

В этой книге мы будем иметь дело преимущественно с играми с нулевой суммой. Если же на нашем пути попадется игра, где сумма выплат не равна нулю, мы специально поясним это.

Примечание от переводчика: Авторы посчитали важным сделать такое замечание, поскольку простейшие игры с нулевой суммой симметричны, и мы можем в платежной матрице указывать выплаты не для обоих участников, а только для одного, поскольку выплата для его оппонента будет точно такой же, но с противоположным знаком.

Эта матрица идентична той, что мы привели выше, однако теперь во всех ячейках мы указываем только выплаты для игрока А:

Игрок А	Игрок Б		
	Камень	Бумага	Ножницы
Камень	0	-1	1
Бумага	+1	0	-1
Ножницы	-1	+1	0

Если игрок Б хочет гарантировать себе нулевое ожидание, он может применять стратегию $\{1/3, 1/3, 1/3\}$ - ее можно вывести точно также, как оптимальную стратегию для «Четного и Нечетного». Тогда вне зависимости от того, что будет

показывать игрок А, он выиграет 1 единицу $\frac{1}{3}$ раз, проиграет 1 единицу $\frac{1}{3}$ раз, а оставшиеся $\frac{1}{3}$ будет ничья. Любая другая стратегия даст возможность идеальному оппоненту эксплуатировать его стратегию.

В подобных играх у идеального оппонента часто есть выбор из нескольких стратегий эксплуатации. Однако при некой стратегии S (со стороны игрока Б) достигается **точка безразличия**, где математическое ожидание различных стратегических выборов для идеального оппонента становится одинаковым. Иными словами, он становится безразличным к выбору стратегии эксплуатации. Таким образом, стратегия для игрока Б в точке безразличия будет оптимальной.

Почему это понятие так важно? Фактически, точка безразличия позволяет нам говорить о том, что мы уже никак не можем улучшить свою стратегию. Как вы можете помнить, одним из требований к оптимальной стратегии была невозможность одностороннего увеличения ожидания любым из игроков. Когда нашему оппоненту все равно, какую стратегию применять (как в точке безразличия) это условие не может быть нарушено.

Примечание от переводчика: Этот абзац очень важен для понимания оптимальных стратегий. Для объяснения я буду использовать игру «Четное и Нечетное», так как она немного проще.

Сначала отметим, что при поиске оптимальной стратегии мы всегда думаем, что играем против «идеального оппонента», который в каждый момент времени знает о нашей стратегии и эксплуатирует ее соответствующим образом.

Как уже было отмечено при разборе игры «Четное и нечетное» наилучшей стратегией эксплуатации, когда мы точно знаем, что делает наш оппонент, является некая чистая стратегия. В «Четном и Нечетном» таких чистых стратегий было две: всегда оставлять руку пустой или всегда класть в нее рубль.

В точке безразличия (для той игры это была точка 0.5) идеальному оппоненту становится все равно, по какой из этих чистых стратегий играть. Действительно, в этой точке ожидание от каждой из них одинаково, то и разницы совсем нет. Таким образом, идеальный оппонент не может улучшить свою стратегию.

Для нас же точка безразличия будет значить, что если мы хоть немного отклонимся от такой стратегии, то идеальный оппонент моментально этим воспользуется, ведь в таком случае его стратегические опции больше не будут равны по математическому ожиданию. Проще говоря, и мы в этой точке также никак не можем

улучшить свою стратегию.

В итоге, в точке безразличия мы получили главное условие для пары оптимальных стратегий - ни один из участников игры не может улучшить свою стратегию в одностороннем порядке.

Давайте рассмотрим несколько усложненную версию игры «Камень, Ножницы, Бумага», где за выигрыш с ножницами игроку причитается бонус. Назовем ее «Камень, Ножницы, Бумага (S)». Новая платежная матрица примет вид:

Пример 10.3 - Камень, Ножницы, Бумага (S)

	Игрок Б		
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы
Камень	0	-1	+1
Бумага	+1	0	-2
Ножницы	-1	+2	0

Теперь стратегия $\{1/3, 1/3, 1/3\}$ может быть эксплуатирована оппонентом, играющим по $\{0, 0, 1\}$ - такая стратегия обеспечит ему математическое ожидание в $+1/3$. Однако игрок А может гарантировать нулевое ожидание, если сделает своего оппонента безразличным к выбору стратегического варианта.

Пусть стратегия игрока А - некая $\{a, b, c\}$ (а - камень, b - бумага, c - ножницы). Тогда он должен стремиться сделать математическое ожидание от разных стратегических выборов для игрока Б одинаковым. Используем уравнение 1.11, получим:

$$\langle \text{Б, камень} \rangle = (0)(a) + (-1)(b) + (1)(c)$$

$$\langle \text{Б, камень} \rangle = c - b$$

$$\langle \text{Б, бумага} \rangle = (1)(a) + (0)(b) + (-2)(c)$$

$$\langle \text{Б, бумага} \rangle = a - 2c$$

$$\langle \text{Б, ножницы} \rangle = (-1)(a) + (2)(b) + (0)(c)$$

$$\langle \text{Б, ножницы} \rangle = 2b - a$$

Мы можем составить систему уравнений и решить ее для каждого из неизвестных. Получим $a = 2b = 2c$, что фактически равно стратегии $\{1/2, 1/4, 1/4\}$. Мы также можем косвенно доказать, что это оптимальная стратегия. Во-первых, «Камень, Ножницы, Бумага» - симметричная игра, так что игрок А может использовать в точности такую же стратегию, как и его оппонент. Поскольку сумма выплат равна нулю, ни одна стратегия в таком случае не будет иметь преимущества (ожидание

обоих участников будет равно нулю). Если бы это было не так, то игра обладала бы ненулевой суммой. Таким образом, найденная нами стратегия является оптимальной.

Как вы могли заметить, хотя новая игра и предлагает дополнительный бонус за выигрыш с ножницами, оптимальная стратегия отнюдь не отдает им предпочтение. Когда правила игры поощряют определенное действие, оптимальные стратегии требуют не применять его чаще, а играть в противоположной манере. В покере, например, этот парадокс проявляется в том, что в больших банках нам следует блефовать реже, поскольку ценность успешного блефа существенно возрастает.

В рассмотренных нами случаях все стратегические варианты имели одинаковую силу - они являлись ключевыми элементами стратегии или контрстратегии. При этом ни одна опция не была настолько слабой, что нам бы пришлось в принципе отказаться от ее использования. Однако в более сложных играх такое случается достаточно часто. Стратегия S называется **доминируемой**, если существует некая стратегия S' , для которой верно неравенство $\langle S' \rangle \geq \langle S \rangle$ для всех стратегий оппонента и $\langle S' \rangle > \langle S \rangle$ хотя бы для одной стратегии оппонента. В таких случаях также говорят, что S' **доминирует** S . Не стоит путать этот термин с доминацией в покере.

Это определение должно быть интуитивно понятно - если у нас есть две стратегические возможности, причем одна из них в большинстве случаев имеет идентичное ожидание против большинства стратегий оппонента, а против некоторых - более высокое, нам всегда стоит выбирать именно это действие. Рассмотрим еще одну вариацию игры «Камень, Ножницы, Бумага». В ней, вместо того чтобы увеличивать выплату для определенных ситуаций, мы добавим новый стратегический выбор - «Цветок». Он проигрывает камню и ножницам, а если оппонент покажет бумагу или тоже цветок, то будет ничья.

Пример 10.4 - Камень, Ножницы, Бумага (F)

	Игрок Б			
	Камень	Бумага	Ножницы	Цветок
Камень	0	-1	+1	+1
Бумага	+1	0	-1	0
Ножницы	-1	+1	0	+1
Цветок	-1	0	-1	0

Очевидно, что никакая стратегия, включающая в себя цветок, не будет насколько же прибыльна, насколько стратегия с бумагой (вместо цветка). Таким образом, цветок оказывается доминирован бумагой. Введем еще один термин - **сильная доминация**; мы будем использовать его, когда математическое ожидание S'

строго больше (и никогда не равно) ожидания от S против всех возможных стратегий оппонента. Примером сильной доминации в покере может быть ситуация, когда вам сдают АА в большом блайнде, а оппонент ставит олл-ин на префлопе - здесь вне зависимости от стратегии оппонента колл будет всегда обладать большим ожиданием, чем фолд. Также должно быть ясно, что оптимальная стратегия не может содержать в себе сильно доминированные действия. В противном случае мы могли бы отказаться от них в пользу более прибыльных альтернатив и таким образом улучшили бы свое математическое ожидание в одностороннем порядке.

У каждого стратегического выбора есть своя ценность. Более того, можно сказать, что в игре с нулевой суммой для двух участников эта ценность всегда неотрицательна. Иными словами, добавление нового стратегического выбора не может уменьшить ожидание одного из участников, поскольку он может просто продолжать играть, как если бы все осталось по-прежнему. Однако построение стратегии с использованием нового действия может увеличить его ожидаемый выигрыш.

Еще один термин, который мы часто используем в отношении стратегий - «ко-оптимальный» (то есть близкий к оптимальному). Иногда оптимальная пара включает в себя множество различных стратегий, в том числе и доминируемые. Представьте, что мы играем в «Камень, Ножницы, Бумага, Цветок», но с дополнительным стратегическим выбором - «тупыми ножницами» (они выигрывают у бумаги, но проигрывают цветку и камню). Очевидно, что здесь тупые ножницы сильно доминированы обычными ножницами. С другой стороны, стратегии, использующие тупые ножницы вполне могут оказаться ко-оптимальными, поскольку могут входить в оптимальную пару стратегий. Объяснение простое: оптимальные стратегии никогда не включают в себя цветок, поэтому в теории тупые ножницы ничем не отличаются от обычных.

Однако в покере нас будут интересовать в основном недоминируемые оптимальные стратегии, поскольку одной из наших главных задач будет извлечение прибыли из ошибок оппонента.

Если в игре обнаруживаются доминируемые стратегии, мы можем упростить исходную платежную матрицу. Например, в предыдущем примере с тупыми ножницами она имела следующий вид:

	Игрок Б				
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы	Цветок	Ножницы 2
Камень	0	-1	+1	+1	-1
Бумага	+1	0	-1	0	-1
Ножницы	-1	+1	0	+1	0
Цветок	-1	0	-1	0	+1
Ножницы 2	-1	+1	0	-1	0

Тупые ножницы - явно доминируемая стратегия, поскольку обладает меньшими (или равными) выплатами по сравнению со стратегией для ножниц. Таким образом, можно говорить о доминации со стороны обычных ножниц. Тогда мы можем упростить эту игру, сказав, что ни один из игроков не может выбрать тупые ножницы (поскольку мы ищем именно оптимальную стратегию):

	Игрок Б			
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы	Цветок
Камень	0	-1	+1	+1
Бумага	+1	0	-1	0
Ножницы	-1	+1	0	+1
Цветок	-1	0	-1	0

Мы получили матрицу для игры «Камень, Ножницы, Бумага, Цветок». Можем повторить алгоритм, определив цветок как доминируемый выбор:

	Игрок Б		
Игрок А	Камень	Бумага	Ножницы
Камень	0	-1	+1
Бумага	+1	0	-1
Ножницы	-1	+1	0

В конечном счете, мы вернемся к исходной матрице для игры «Камень, Ножницы, Бумага». Это значит, что решение для расширенной игры (с цветком и тупыми ножницами), идентично решению для ее оригинальной версии. Этот алгоритм еще не раз поможет нам при анализе игр, поскольку такие упрощения существенно уменьшают количество стратегий, требующих рассмотрения.

Игра G может быть упрощена до некой игры G' путем удаления доминируемых стратегических выборов для обоих игроков. Оптимальная пара стратегий для G' будет тождественна таковой для G.

Последняя игра, которую мы разберем в этой главе (а затем перейдем непосредственно к покерным играм), называется «Полицейский и Грабитель». В

ней один участник будет «Полицейским» с двумя стратегическими возможностями - патрулировать или остаться дома. Другой же будет «Грабителем», который может либо отправиться грабить магазин, либо также остаться дома. В случае вылазки он выиграет 1 единицу, когда полицейский остается дома, и проиграет 1 единицу, если последний все же решит патрулировать. В свою очередь, полицейский потеряет 1 единицу, если никого не найдет, и ничего не потеряет, если ограбление не состоится, а он останется дома. И поскольку это игра с нулевой суммой, грабитель будет выигрывать 1 единицу, если останется дома, а полицейский решит патрулировать.

Платежная матрица для этой игры будет выглядеть следующим образом:

Пример 10.5 - Полицейский и Грабитель

	Грабитель	
	Грабить	Остаться дома
Полицейский		
Патрулировать	(1, -1)	(-1, 1)
Остаться дома	(-1, 1)	(0, 0)

Для того, чтобы найти оптимальные стратегии для этой игры, для начала нам нужно выбрать одного участника. Пусть это будет полицейский. По аналогии с нашими прошлыми расчетами, он будет $x\%$ раз патрулировать, а оставшееся время $(1-x)\%$ - оставаться дома:

$$\langle \text{Грабитель, грабит} \rangle = (-1)(x) + (1)(1 - x)$$

$$\langle \text{Грабитель, грабит} \rangle = 1 - 2x$$

$$\langle \text{Грабитель, остается дома} \rangle = (1)(x) + 0(1 - x)$$

$$\langle \text{Грабитель, остается дома} \rangle = x$$

Точка безразличия для грабителя наступает тогда, когда эти два выражения равны. Получим:

$$1 - 2x = x$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Примечание от переводчика: Почему мы выбрали полицейского, но решаем уравнения для грабителя? Дело в том, что наша основная задача - найти точку безразличия для оппонента. Но наша стратегия зависит от того, что делает оппонент. Поэтому после выбора полицейского мы обозначаем его элементы стратегии (патрулировать или остаться дома), и решаем уравнения для грабителя исходя из этих предположений. Таким образом, мы получим точку безразличия для грабителя, а вместе с ней и значения для названных параметров, при которых стратегия полицейского будет оптимальной.

Оптимальная стратегия для полицейского - патрулировать $\frac{1}{3}$ раз.

Теперь давайте разберем случай с грабителем. Если он $x\%$ раз решит грабить, то $(1-x)\%$ раз он останется дома. Получим:

$$\langle \text{Полицейский, патрулирует} \rangle = (1)(x) + (-1)(1 - x)$$

$$\langle \text{Полицейский, патрулирует} \rangle = 2x - 1$$

$$\langle \text{Полицейский, остается дома} \rangle = (-1)(x) + 0(1 - x)$$

$$\langle \text{Полицейский, остается дома} \rangle = -x$$

Найдем точку безразличия:

$$2x - 1 = -x$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Как оказалось, оптимальная стратегия для грабителя - делать вылазку $\frac{1}{3}$ раз.

Найденные нами значения (полицейский патрулирует $\frac{1}{3}$ раз, грабитель делает вылазку в $\frac{1}{3}$ случаев) и являются оптимальными стратегиями для этой игры. Такие смешанные стратегии становятся возможными, когда участники могут эксплуатировать чистые стратегии друг друга. В этой игре, если грабитель всегда решает грабить, полицейский может ответить стратегией патрулирования. Но в то же время, грабитель может подстроиться и остаться дома. Такие цепочки из эксплуатационных стратегий говорят о том, что оптимальная стратегия всегда будет смешанной.

Примечание от переводчика: Смешанные стратегии здесь понимаются не в контексте того, что грабитель и полицейский должны предпринимать определенные действия треть раз. Смешанная стратегия - это найденная нами оптимальная стратегия для полицейского, когда только он треть раз патрулирует, а две трети раз остается дома. То же самое верно и для грабителя.

Представьте, что два игрока, X и Y, составляют свои стратегии на игру. Первый собирается использовать чистую стратегию A, а его оппонент будет эксплуатировать ее с помощью чистой стратегии B. Однако игрок X подстроится и начнет играть по стратегии C, на что получит ответ в виде стратегии D, которую можно эксплуатировать стратегией A. Такая цепочка свидетельствует о том, что для игрока X оптимальная стратегия будет включать в себя как A, так и C, а для игрока Y - B и D.

Если нам известно, какие действия будут являться частью смешанной оптимальной стратегии, мы легко можем решить такую игру, последовательно определяя точки безразличия для каждой из сторон. Однако если мы этого не

знаем (такое тоже случается), то нам придется делать предположения о структуре оптимальной стратегии. Такие догадки иногда называются параметризацией - мы еще поговорим о ней в главах, где будем работать над решениями для $[0,1]$ игр.

Нужно запомнить

-
Оптимальные стратегии в играх с нулевой суммой и двумя участниками обладают следующими свойствами: 1) если правилами разрешены смешанные стратегии, то всегда можно вывести оптимальную стратегию; 2) если оптимальная стратегия является смешанной, то ожидание от каждого всех входящих в нее стратегических выборов должно быть одинаковым (против оптимальной стратегии оппонента).
.....
- Если пара найденных стратегий является оптимальной, ни один из игроков не имеет возможности улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.
.....
- Пара оптимальных стратегий состоит из стратегий, которые максимально эксплуатируют друг друга.
.....
- Оптимальные стратегии обладают максимальным математическим ожиданием против идеального оппонента.
.....
- Оптимальные стратегии не содержат в себе сильно доминированные действия.
.....
- Когда мы наблюдаем цикл чистых стратегий, это значит, что оптимальная стратегия будет смешанной.
.....
- Мы можем свести сложные игры к простым, последовательно исключая доминированные стратегии.
.....
- Как в играх с нулевой суммой с двумя игроками, так и в других играх, сочетания стратегий, при которых ни один из игроков не может увеличить свое ожидание в одностороннем порядке, называются равновесием Нэша. Все многопользовательские игры с конечными платежными матрицами имеют как минимум одну точку равновесия.
.....

Глава 11

Покер пополам: Игры на половине улицы

Мы приступаем к изучению решаемых покерных игр с серии вспомогательных игр, которые здесь и далее будем называть «играми на половине улицы». Им присущи следующие свойства:

- Первый игрок (игрок X) всегда делает чек
- Второй игрок (игрок Y) может либо сделать чек, либо сделать ставку, размер которой оговаривается в правилах игры
- Если ставка была сделана, то игрок X может ее уравнять, после чего происходит шоудаун. Кроме того, игрок X может скинуть свои карты (но не сделать рейз). Если игрок Y сделал чек, то участники игры вскрывают свои карты.

Здесь мы воспользуемся данным ранее определением цены игры. Это математическое ожидание для игрока Y при условии, что он и его оппонент играют оптимально. Также мы будем принимать в расчет только деньги, которые в результате неких действий в игре перешли от одного участника к другому. Иными словами, предмет нашего анализа в большинстве случаев будет *экс-шоудаун вэлью*. Оно включает в себя ставки и коллы, сделанные на рассматриваемой улице, а также переход банка от одного игрока к другому в результате успешного блефа.

Дело в том, что нас не интересует ни ожидание игроков «до того как», ни то как строился банк. Скорее, мы будем стараться определить математическое ожидание от действий участников в анализируемой ситуации.

Также стоит отметить, что игрок Y не может иметь отрицательное ожидание в играх на половине улицы, поскольку ему всегда гарантировано как минимум нулевое экс-шоудаун вэлью в случае чека (в этом случае деньги не переходят от одного игрока к другому, и ни один из них не забирает банк после успешного блефа).

Игры на половине улицы обладают исключительно важным свойством: их можно решить. Более того, мы можем вывести оптимальные стратегии фактически для любой игры на половине улицы, поскольку в целом они достаточно примитивны. Как мы покажем несколько позже, игры на нескольких улицах часто окажутся неразрешимыми, и для них мы сможем получить лишь весьма приблизительные ответы. Сейчас же важно понять, что возможность решить даже простую игру является огромным преимуществом, поскольку полученные результаты можно затем использовать для анализа более сложных ситуаций.

В качестве введения мы рассмотрим *игру против ясновидящего*. Мы будем называть участников игры *частично ясновидящими*, если они могут видеть

карты оппонентов, но не могут знать, какие карты выйдут на стол, и просто *ясновидящими*, если им известно и то, и то. В нашем первом примере новые карты на стол выкладываться не будут, так что выбор конкретного определения не столь важен.

Пример 11.1 - Игра с ясновидящим

- Игра на половине улицы
- Размер банка - P единиц
- Размер ставки - 1 единица
- Игрок Y ясновидящий

Скрытая рука игрока Y случайным образом сдается из диапазона, состоящего наполовину из натсов (которые всегда выиграют), наполовину из блефов (которые всегда проигрывают руке игрока X).

Очевидно, что в этой игре участникам нужно принять только одно решение. Так, игрок Y должен определиться, с каким диапазоном он будет делать бет, а его оппонент - решить, с какими руками он будет уравнивать. Стоит отметить, что «диапазон» игрока X будет состоять из одной единственной руки. Причем никакого противоречия здесь нет - смешанные стратегии в равной степени применимы как для отдельных рук, так и для диапазонов.

Игрок Y обладает значительным информационным преимуществом - он может делать вэлью беты со всеми натсами, и блефовать со своими слабейшими руками. Причем каждый раз он будет точно знать, что ему нужно делать.

Матрица экс-шоудаун выплат для этой игры будет выглядеть следующим образом (для игрока Y):

Игрок Y	Игрок X	Чек-Колл	Чек-Фолд
Натсы	Бет	+1	0
	Чек	0	0
Блефы	Бет	-1	+P
	Чек	0	0

Для начала рассмотрим несколько чистых стратегий. Предположим, что игрок Y ставит на вэлью со всеми сильными руками, но делает чек со всеми блефами. Тогда игрок X ответит стратегией фолда со всеми своим диапазоном. Однако его оппонент может начать ставить все свои руки без исключения. В таком случае игрок X может предложить контрстратегию: колл со всем диапазоном, а игроку Y останется лишь вернуться к своей первоначальной стратегии (бет со всеми натсами, чек со всеми блефами).

В результате получаем уже знакомый нам цикл чистых стратегий, который, в свою очередь, означает, что оптимальные стратегии в рассматриваемой игре будут смешанными. Для того, чтобы определить эти стратегии, нам нужно ответить на два вопроса: как часто игрок X должен уравнивать, и как часто игроку Y стоит блефовать.

Пусть c - процент рук, с которыми игрок X будет делать колл, а b - частота блефа для игрока Y.

Когда игрок X следует оптимальной стратегии, его оппонент должен быть безразличен к блефу. Иными словами, в этом случае чек и блеф с мертвой рукой для игрока Y должны обладать одинаковым ожиданием. Если блеф сработает, игрок Y заберет весь банк (P ставок), но потеряет одну единицу в случае колла. Тогда:

$$(\text{банк}) (\text{частота фолда игрока X}) = (\text{ставка}) (\text{частота колла игрока X})$$

$$P (1 - c) = 1 c$$
$$c = P / (P + 1)$$

Как вы можете заметить, частота колла игрока X будет расти вместе с увеличением размера банка. Это следствие более привлекательных шансов банка, а также ограниченного размера ставки - фактически, игрок X должен будет чаще уравнивать, чтобы помешать оппоненту забрать большой банк маленькой ставкой.

В свою очередь, игрок Y должен блефовать достаточно часто, чтобы игроку X было все равно: уравнивать или скидывать свою руку. Игрок X будет терять одну ставку против вэлью рук и выигрывать $P + 1$ против блефов.

$$1 = (P + 1) b$$
$$b = 1 / (P + 1)$$

Величина $1 / (P + 1)$ чрезвычайно важна в покерном анализе. Мы введем для нее специальное обозначение, которое будем использовать и в дальнейшем: α (альфа).

$$\alpha = 1 / (P + 1) \text{ (для лимитных игр)} \tag{11.1}$$

Игрок X должен сделать своего оппонента безразличным к блефу, для этого он будет уравнивать ставки $P / (P + 1)$ раз или $1 - \alpha$. Соответственно, мы можем сказать, что α - это частота фолда игрока X на ставку оппонента.

Игрок Y должен блефовать α раз со своими мертвыми руками, а поскольку с натсами он будет ставить абсолютно всегда, то α также задает отношение блефов

к вэлью бетам при котором оппоненту (в нашем случае, игроку X) будет все равно, что делать: фолд или колл.

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= 1 - 1/(P + 1) \\ 1 - \alpha &= P / (P + 1) \text{ (для лимитных игр)} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Мы можем обобщить полученные выражения для случаев со ставками произвольного размера:

$$\alpha = s / (1 + s) \text{ (для ставок произвольного размера)} \quad (11.3)$$

Здесь s - это отношение размера ставки к банку (например, ставя \$50 в банк \$100, получаем $s = 1/2$)

Из формулы расчета α следует, что игрок Y должен редко блефовать в больших банках. На первый взгляд, это противоречит здравому смыслу, однако такая закономерность является важным принципом оптимальной игры:

Блеф в оптимальной стратегии часто не является прибыльным действием сам по себе. Вместо этого, комбинация блефов и вэлью бетов должна гарантировать оптимальной стратегии некое ожидание вне зависимости от того, как реагирует оппонент. Частые фолды сделают блефы в оптимальной стратегии более прибыльными, а частые коллы - напротив, вэлью беты.

Мы получили пару оптимальных стратегий для рассматриваемой игры:

- Игрок Y ставит со всеми натсами и блефует с α мертвых рук (или $\alpha/2$ от всего диапазона).
- Игрок X уравнивает с $1 - \alpha$ всех рук.

Экс-шоудаун ожидание для игрока Y будет следующим. Он выигрывает одну ставку, когда ставит на вэлью (таких рук в его диапазоне ровно половина) и получает колл. Кроме того, удачный блеф заработает ему весь банк, в противном случае он проиграет одну единицу. Как мы уже определили, игрок X будет уравнивать достаточно часто, чтобы игрок Y был безразличен к блефу (ожидание от них будет равно нулю). Получим:

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= (\text{частота вэлью бетов}) (\text{размер ставки}) (\text{частота колла}) \\ \langle Y \rangle &= (1/2) (P / (P + 1)) \\ \langle Y \rangle &= P / 2(P + 1) \end{aligned}$$

Как видите, с увеличением размера банка преимущество игрока Y становится все более весомым. Дело в том, что игроку X придется делать колл чаще (мы уже отмечали это выше), причем блефов в диапазоне его оппонента будет все меньше и меньше.

Распределение $[0,1]$

На протяжении всей третьей части книги мы будем анализировать различные игры, использующие **распределение $[0,1]$** . В них в качестве покерных рук вместо отдельных карт используются случайные числа от 0 до 1. При этом каждый игрок имеет одинаковый шанс получить абсолютно любое число из этого диапазона. Для упрощения расчетов мы будем считать, что на вскрытии выиграют «руки», которые ближе к нулю. Соответственно, сильнейшей рукой окажется 0, а слабейшей - 1.

Основное отличие $[0,1]$ игр от игр с ясновидящим заключается в том, что оптимальные стратегии не обязательно являются смешанными. Действительно, поскольку мы имеем дело с бесконечным множеством возможных рук, применение смешанных стратегий для некоторых из них будет лишено всякого смысла.

Поэтому мы будем рассматривать несколько отрезков, где применяются определенные чистые стратегии. Разделяют эти области так называемые **пороги** - точки на диапазоне $[0,1]$, которые фиксируют границы между различными действиями.

Примечание от переводчика: Например, с руками от 0 до 0.4 мы будем ставить на вэлью, с руками от 0.4 до 1 - делать чек. Порогом здесь будет считаться точка 0.4 на отрезке от 0 до 1 (который задает силу рук).

Решая $[0,1]$ игры, мы часто будем применять следующий алгоритм:

- 1) Делаем догадку о структуре решения
- 2) Решаем игру, предполагая, что наша догадка является верной
- 3) Проверяем полученный ответ - если мы нашли оптимальную стратегию, то ни один из игроков не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

Для наших предположений о структуре решения игры, мы будем использовать термин **параметризация**. Например, решение гипотетической $[0,1]$ игры может выглядеть следующим образом: игрок У ставит со своими лучшим руками между 0 и u_1 , чекает со средними руками между u_1 и u_0 , и блефует с худшими руками между u_0 и 1. Другая параметризация может быть такой: игрок У ставит с руками средней силы, но делает чек своими лучшими и худшими руками. В принципе, мы можем делать абсолютно любые предположения о структуре решения (задавать любую параметризацию).

Примечание от переводчика: Не стоит пугаться термина «параметризация». Фактически, авторы говорят, что мы должны попытаться угадать, как будет выглядеть решение игры, а затем составить соответствующие уравнения. Естественно, если окажется, что наши предположения оказались неверными, нам придется составлять новые уравнения для новой параметризации, и решать уже их. Но каждый раз в основе вычислений может лежать только один набор предположений о решении рассматриваемой игры.

После того, как мы определили параметризацию, следует составить уравнения, основанные на принципе безразличия на всех порогах и найти оптимальные стратегии. Иными словами, теперь каждый игрок будет стараться сделать своего оппонента безразличным к выбору действия на каждом из порогов.

Примечание от переводчика: Пусть в $[0,1]$ игре порог 0.4 для игрока Y разделяет действия чек и бет. Тогда его оппонент, игрок X будет стараться уравнивать ставки настолько часто, чтобы игроку Y было все равно, что делать в точке 0.4.

Почему? Во-первых, из определения диапазона $[0,1]$ очевидно, что сила какой-то конкретной руки будет близка к силе бесконечного множества ее соседей. Тогда и ожидание от розыгрыша всех рук должно подчиняться таким же законам, поскольку оно складывается из шоудаун и экс-шоудаун вэлю (последнее является константой). Проще говоря, математическое ожидание от Чек/Колла с рукой 0.6 окажется очень близким к ожиданию от руки 0.60000001.

Любой порог на интервале $[0,1]$ разделяет две чистых стратегии, область одной из них находится слева, область другой - справа. Предположим, что мы рассматриваем некий порог R , причем на нем одно из действий имеет более высокое ожидание (то есть безразличие не достигается). Тогда можно утверждать, что в области второго действия (справа от R) мы можем найти несколько рук бесконечно близких к рассматриваемому порогу, с которыми мы можем начать играть по альтернативной линии (поскольку она приносит больше денег). Однако если это действительно так, то найденная стратегия (порог) не будет оптимальной, поскольку у нас будет возможность увеличить свой ожидаемый выигрыш в одностороннем порядке. Следовательно, оптимальные стратегии предполагают безразличие игрока к выбору действия на каждом из порогов.

Примечание от переводчика: Представьте, что у нас есть некая рука 0.6, и она является порогом на распределении $[0,1]$, который отделяет чистую стратегию Чек от чистой стратегии Бет. То есть с руками из отрезка $[0, 0.6]$ мы будем ставить, а со всеми остальными - делать чек. Однако при проверке решения оказывается, что именно для руки 0.6 ожидание от действия Бет выше, чем ожидание от действия Чек.

Причем не имеет значения насколько - скажем, на 0.00001 блайнда. Тогда мы можем найти некую руку из диапазона $[0.6, 1]$, с которым согласно найденному решению мы должны делать чек, которая будет бесконечно близка к 0.6 - пусть это будет 0.6000000000000000000002. И для нее ожидание от ставки также окажется выше ожидания от чека. Следовательно, найденная нами стратегия не является оптимальной, а точка 0.6 не является порогом для оптимальной стратегии, и нам нужно проверить свои расчеты.

В большинстве наших параметризаций будет присутствовать фиксированное количество порогов (между разными стратегиями). Для каждого порога мы составим **уравнения безразличия** - решая системы таких уравнений, мы сможем найти значения самих порогов и вывести оптимальную стратегию при заданной параметризации.

Если мы ошиблись с параметризацией, то в наших уравнениях будут встречаться различные противоречия, в том числе невозможные значения для порогов (например, порог в точке 1.5, которая выходит за рамки распределения $[0,1]$ и т.п.).

Кроме того, иногда мы сможем найти оптимальную стратегию и доказать ее правильность, однако окажется, что для другой параметризации существует решение с еще более высоким математическим ожиданием. Поэтому для каждой параметризации также необходимо доказать, что именно полученный результат является лучшим выбором для каждого из игроков.

Пример 11.2 - $[0,1]$ Игра #1

Это очень простая игра, состоящая из половины улицы, на которой игрок X всегда должен делать Чек/Колл против ставки фиксированного размера. Вполне очевидно, что в подобных играх размер банка не имеет никакого значения.

Здесь игрок X не принимает никаких решений, а стратегия игрока Y состоит только из одного выбора - бет или чек. Он знает, что его оппонент всегда сделает колл, так что в диапазоне ставки должны оказаться все руки с положительным или нулевым ожиданием против случайной руки.

Математическое ожидание (мы снова рассматриваем только экс-шоудаун) от ставки с некой рукой у будет следующим:

Руки игрока X	Исход
$[0, y]$	-1 (игрок X уравнивает с рукой лучше)
$[y, 1]$	+1 (игрок X уравнивает с рукой хуже)

Поскольку все числа в диапазоне $[0,1]$ равномерно распределены, вероятность того, что у игрока X окажется некая рука x , равна длине рассматриваемого отрезка.

Примечание от переводчика: Очень важно понять смысл уравнения ниже. Фактически, мы считаем, что рука игрока Y фиксирована - он делает ставку с рукой y . Ставка сделана, теперь игрок X принимает решение. Как часто у него окажется рука лучше? Ровно y раз. Как часто у него окажется рука хуже? Ровно $(1 - y)$ раз.

$$\langle Y, \text{бет} \rangle = p(\text{у игрока } X \text{ лучшая рука}) \cdot (-1) + p(\text{у игрока } X \text{ худшая рука}) \cdot (+1)$$

$$\langle Y, \text{бет} \rangle = (y - 0) \cdot (-1) + (1 - y) \cdot (1)$$

$$\langle Y, \text{бет} \rangle = 1 - 2y$$

Теперь мы найдем все руки игрока Y , для которых математическое ожидание больше или равно 0 (альтернатива - чек, ожидание которого по экс-шоудауну равно нулю):

$$1 - 2y \geq 0$$

$$y \leq \frac{1}{2}$$

Таким образом, игрок Y должен ставить с лучшей половиной своих рук. Когда рука игрока X будет попадать в интервал $[0, \frac{1}{2}]$, суммарное ожидание его оппонента будет равно нулю (поскольку вероятность получить руку из этого диапазона для каждого из игроков абсолютно одинаковой), а когда в интервал $[\frac{1}{2}, 1]$, то игрок Y будет выигрывать одну ставку.

Полученный результат можно отобразить на графике:

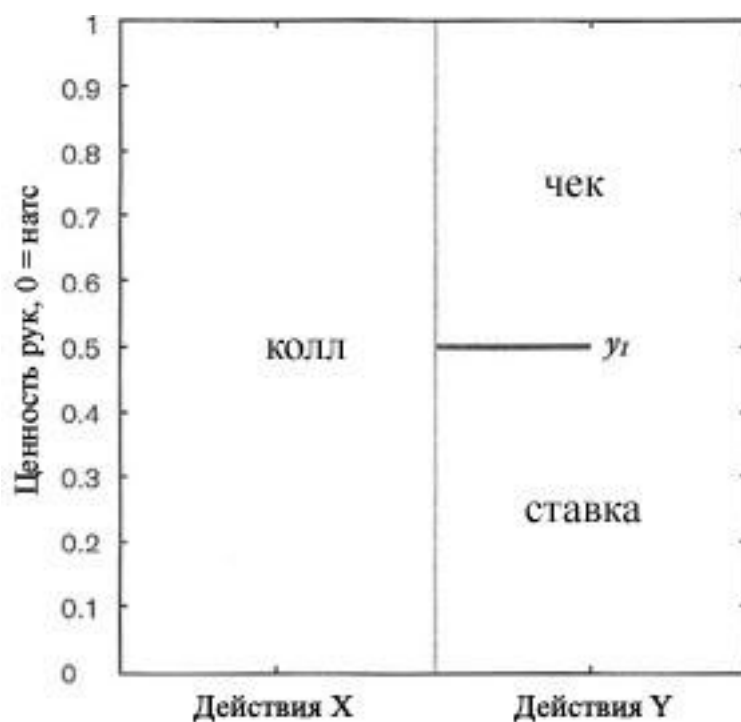


Рисунок 11.1. Игра #1 - Половина улицы, без фолдов

Цена игры (то есть ожидание игрока Y при условии, что он играет оптимально) равна $\frac{1}{4}$.

Эта простая игра отлично показывает идею распределения $[0,1]$, а также дает некоторую пищу для размышлений. Так, из нее становится очевидным, что если наш оппонент не принимает никаких решений и играет по некой заранее определенной чистой стратегии, то оптимальной стратегией для нас будет максимизация собственного ожидания. Более того, если наш диапазон такой же сильный, как и диапазон оппонента (при условии, что мы не можем получить рейз, только колл), мы должны ставить с лучшей половиной рук.

Пример 11.3 - $[0,1]$ Игра #2

В предыдущем примере мы установили специальное правило, которое обычно не встречается в покере - игрок X не имел возможности скинуть свою руку. Мы показали, что в игре «без фолдов» не существует блефов, а диапазон для ставки игрока Y просто состоит из лучших 50% его рук.

Однако покер - это игра, которая всегда ассоциируется с блефом, поэтому мы немного изменим условия из примера 11.2, разрешив игроку X делать фолд.

Как вы уже, наверное, поняли, размер банка снова начинает играть первостепенную роль, поскольку решение игрока X о колле полностью зависит от ожидаемого выигрыша (фактически - от шансов банка). Условимся, что банк составляет P единиц, а размер ставки равен одной единице.

В прошлом примере стратегия игрока Y выражалась одним единственным порогом. Однако в этой игре все будет несколько сложнее. Здесь и далее мы будем использовать следующие условные обозначения:

- x_n - порог между стратегиями, которые делают n -ую ставку и стратегиями, которые делают $(n - 1)$ ставку на вэлью.
- x_0 - порог между блефом и чеком
- x_n^* - порог между коллом n -ой ставки и фолдом на нее.

Так, в примере 11.2 стратегия игрока Y включала в себя только порог y_1 (между бетом и чеком), а порога y_0 не существовало (или мы можем считать, что он был равен 1). В то же время x_1^* был равен 1, поскольку игрок X должен был каждый раз делать чек, а затем колл.

Примечание от переводчика: Мы можем считать, что y_0 в первой игре равно 1, поскольку диапазон для блефа всегда будет находиться справа от диапазона чека.

Объяснение весьма простое: мы можем делать чек с более сильными руками (и иногда выигрывать), в то время как блефовать в играх $[0,1]$ имеет смысл с безнадежными руками. То есть диапазон для блефа будет находиться ближе к единице, а диапазон чека - к нулю.

Поскольку в предыдущем примере мы никогда не блефовали, то значения справа от 1 будут невозможными, соответственно и диапазона для блефа существовать не будет.

То же самое касается и порога колла для игрока X .

В этом примере в стратегии игрока X будет присутствовать порог x_1^* , отделяющий диапазон колла (от сильнейшей руки, то есть 0, до x_1^*) от диапазона фолда (от x_1^* до слабейшей руки, то есть 1).

Мы можем показать, что в стратегию игрока Y войдут блефы, следующим образом.

Если оба игрока следуют оптимальным стратегиям, то x_1^* будет выбран таким образом, чтобы максимизировать математическое ожидание против стратегии игрока Y . Давайте посмотрим, что произойдет, если игрок Y будет использовать точно такую же стратегию, как в предыдущей игре, ставя на интервале от 0 до y_1 . Тогда лучшим ответом игрока X будет колл со всеми руками, которые имеют положительное ожидание против диапазона ставки.

Ожидание игрока X определяется его порогом колла. Так, он будет выигрывать ставку, когда у его оппонента окажется рука из интервала между y_1 и x_1^* . И

наоборот, если у игрока Y будет рука из интервала от 0 до x_1^* , то игрок X потеряет одну ставку.

$$\langle X \rangle = (\text{размер банка в случае выигрыша}) (\text{вероятность выигрыша}) - \\ - (\text{одна ставка}) (\text{вероятность проигрыша})$$

$$\langle X \rangle = (P + 1) (y_1 - x_1^*) - 1(x_1^* - 0)$$

Примечание от переводчика: И снова мы имеем дело с тем же типом уравнения, которое было прокомментировано ранее. Игрок Y сделал ставку, и игрок X собирается его уравнивать. Как часто он выиграет? Когда его рука лучше, чем порог для ставки (поскольку вероятность получить любую руку одинакова для обоих игроков). Как часто он проиграет? Когда рука его оппонента лучше, чем его порог колла, а вероятность этого составляет x_1^* .

Важно понимать, что мы решаем это уравнение именно для ставки с пороговой рукой.

Очевидно, что уравнивать игрок X будет только когда его ожидание выше нуля:

$$(P + 1)(y_1 - x_1^*) - 1(x_1^*) > 0$$

$$(P + 1)(y_1) - (P + 2) x_1^* > 0$$

$$x_1^* < y_1(P + 1) / (P + 2)$$

Таким образом, игрок X будет уравнивать с некой частью диапазона для ставки его оппонента, причем отношение количества коллов игрока X к ставкам игрока Y задается выражением $(P + 1) / (P + 2)$.

Легко показать, что это верно. Пусть размер банка равен размеру ставки и составляет одну единицу. Для нулевого колла игроку X нужно иметь лучшую руку в трети случаев (согласно его шансам банка). В таком случае порог x_1^* должен составлять две трети от интервала от 0 до y_1 .

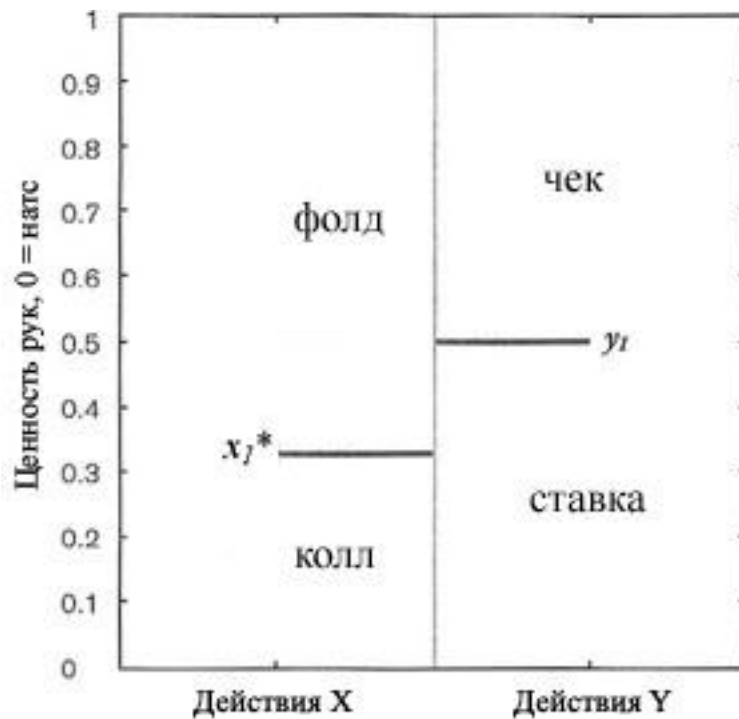


Рисунок 11.2. Неоптимальная стратегия для игрока Y в [0,1] Игре #2

Однако если игрок X будет следовать такой стратегии, то его оппонент сможет улучшить свое ожидание в одностороннем порядке. Для этого ему достаточно начать делать чек с руками в промежутке от x_I^* до y_I , заменив их на равное количество рук в районе единицы. Поступая таким образом, он улучшает свое ожидание, заставляя игрока X скидывать значительно более сильную руку (по отношению ко всему диапазону ставки).

Значит, найденная нами стратегия не может считаться оптимальной и у игрока Y должен присутствовать диапазон для блефа.

Введем следующую параметризацию для игрока Y:

- Бет с диапазоном сильных рук от 0 до y_I .
- Чек с диапазоном средних рук от y_I до y_0 .
- Бет с диапазоном слабых рук от y_0 до 1.

Также, для этой параметризации мы предполагаем, что x_I^* лежит правее y_I .

Примечание от переводчика: Здесь есть очень существенное отличие от предыдущих игр - из-за вероятности блефа со стороны оппонента, игрок X вынужден делать колл с более широки диапазоном, чем диапазон для ставки у игрока Y.

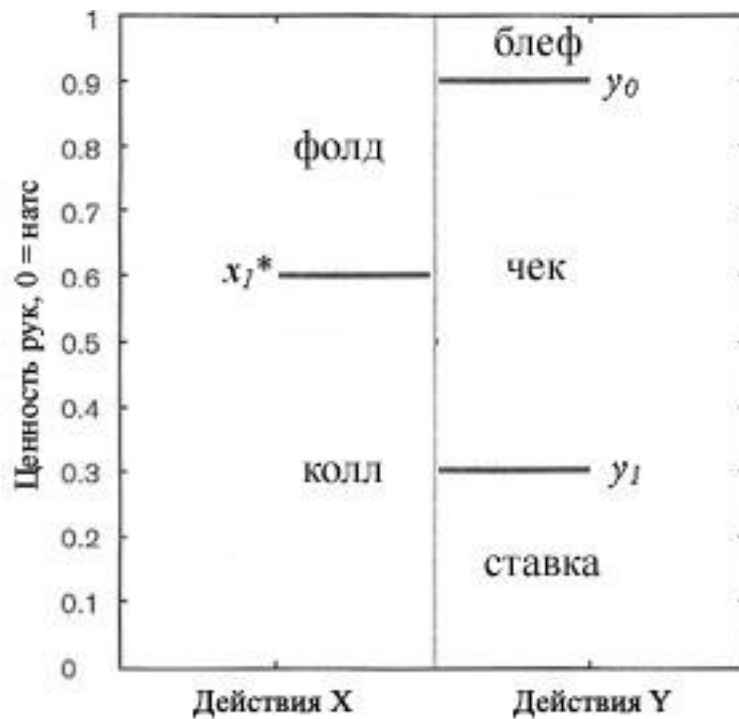


Рисунок 11.3. Оптимальная стратегия для [0,1] Игры #2

Мы знаем, что если оба участника игры будут следовать оптимальным стратегиям, то игроку X в точке x_1^* будет все равно, что делать: колл или фолд.

Безразличие в x_1^* можно описать следующим образом:

Рука Y	$p(\text{руки Y})$	$\langle X, \text{колл} \rangle$	Ожидание	$\langle X, \text{фолд} \rangle$	Ожидание
$[0, y_1]$	y_1	-1	$-y_1$	0	0
$[y_0, 1]$	$1 - y_0$	$P + 1$	$(P + 1)(1 - y_0)$	0	0
Итого			$-y_1 + (P + 1)(1 - y_0)$		0

Заметьте, что мы не учитываем руки игрока Y на интервале $[y_1, y_0]$, так как с ними он не делает ставку, а значит, игрок X не должен принимать никакого решения. Суммы в колонках «Ожидание» должны быть равны:

$$-y_1 + (P + 1)(1 - y_0) = 0$$

$$y_1 = (P + 1)(1 - y_0)$$

$$1 - y_0 = y_1 / (P + 1)$$

$$1 - y_0 = \alpha y_1 \tag{11.4}$$

В нашей параметризации $1 - y_0$ представляет длину интервала блефа, также как y_1 представляет интервал рук для вэлью бета. Как вы могли заметить, соотношение между этими величинами задается коэффициентом α , также как и в игре с ясновидающим.

Теперь рассчитаем пороги игрока Y.

Безразличие в y_1 (порог между вэлью бетом и чеком):

Рука X	$p(\text{руки X})$	<Y, бет>	Ожидание	<Y, чек>	Ожидание
$[0, y_1]$	y_1	-1	$-y_1$	0	0
$[y_1, x_1^*]$	$x_1^* - y_1$	+1	$x_1^* - y_1$	0	0
$[x_1^*, 1]$	$1 - x_1^*$	0	0	0	0
Итого			$x_1^* - 2y_1$		0

Получим уравнение:

$$x_1^* - 2y_1 = 0$$

$$y_1 = x_1^* / 2 \quad (11.5)$$

Безразличие в y_0 (порог между чеком и блефом):

Рука X	$p(\text{руки X})$	<Y, бет>	Ожидание	<Y, чек>	Ожидание
$[0, x_1^*]$	x_1^*	-1	$-x_1^*$	0	0
$[x_1^*, y_0]$	$y_0 - x_1^*$	+P	$(y_0 - x_1^*)P$	0	0
$[y_0, 1]$	$1 - x_1^*$	0	0	0	0
Итого			$Py_0 - (P + 1)x_1^*$		0

$$Py_0 - (P + 1)x_1^* = 0$$

Как мы уже знаем из уравнения 11.4, $(1 - \alpha)y_1 = \alpha y_0$, тогда:

$$P(1 - \alpha y_1) = (P + 1)x_1^*$$

$$x_1^* = (1 - \alpha y_1)P / (P + 1)$$

В то же время $(1 - \alpha) = P / (P + 1)$:

$$x_1^* = (1 - \alpha)(1 - \alpha y_1) \quad (11.6)$$

$$x_1^* = (1 - \alpha)y_0$$

Этот результат также важен, поскольку он определяет частоту колла в $[0, 1]$ играх. Чтобы игрок Y был безразличен к блефу в y_0 , его оппонент должен уравнивать с $(1 - \alpha)$ рук, способных побить блеф.

Соединив три уравнения безразличия, мы можем найти решение игры.

$$x_1^* = (1 - \alpha)(1 - \alpha y_1) \quad (11.6)$$

$$y_1 = x_1^* / 2 \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned}
x_1^* &= 2y_1 \\
2y_1 &= (1 - \alpha y_1) (1 - \alpha) \\
2y_1 &= 1 - \alpha y_1 - \alpha + \alpha 2y_1 \\
1 - \alpha &= 2y_1 + \alpha y_1 - \alpha 2y_1 \\
1 - \alpha &= y_1 (2 - \alpha) (\alpha + 1) \\
y_1 &= (1 - \alpha) / (2 - \alpha) (\alpha + 1)
\end{aligned}$$

Учитывая, что $x_1^* = 2y_1$:

$$\begin{aligned}
x_1^* &= 2(1 - \alpha) / (2 - \alpha) (\alpha + 1) \\
1 - y_0 &= \alpha y_1 \\
1 - y_0 &= \alpha (1 - \alpha) / (2 - \alpha) (\alpha + 1)
\end{aligned}$$

Джон фон Нейманом и Оскар Моргенштерн рассмотрели подобную игру в работе «Теория Игр и Экономическое Поведение» (1944).

Какие выводы можно сделать из этого примера? Во-первых, возможность выбора между коллом и фолдом у игрока X изменяет структуру стратегии игрока Y. В примере 11.2 он просто ставил на вэлью с вершиной своего диапазона, и этого было достаточно. Однако здесь игрок X может делать фолд со своими слабейшими руками, тем самым эксплуатируя стратегию своего оппонента. Ответом игрока Y становится блеф с нижней частью диапазона, так он заставляет игрока X уравнивать с руками слабее порога вэлью бетов.

Снова коэффициент α играет важную роль. Также как и в игре с ясновидящим, игрок X должен скидывать α рук, способных побить блеф, а игрок Y ставит на вэлью и блеф в соотношении α .

У этой игры есть еще одна важная сторона. Каково ожидание от блефа? В игре с ясновидящим оно было равно нулю - если Y делал чек, то он просто проигрывал банк. Однако здесь ответ не так очевиден.

В y_0 игроку Y все равно: блефовать или чекать, эта ситуация совпадает с той, что мы решили в игре с ясновидящим (с точки зрения экс-шоудауна). Но, например, в точке 1 ожидание Y от блефа такое же, как его ожидание в y_0 (поскольку игрок X будет уравнивать только с руками до x_1^*). Получается, что Y не безразличен к блефу в 1! Более того, он повышает свое ожидание, блефуя со всеми руками хуже, чем y_0 .

Примечание от переводчика: Здесь имеется ввиду, что при блефе в точке y_0 и 1 ожидание игрока Y будет одинаковым. Однако рука в y_0 значительно сильнее единицы. Соответственно, мы имеем то же ожидание, хотя сила нашей руки наоборот уменьшилась.

В этой главе мы представили несколько сравнительно простых игр на половине улицы. Мы увидели, что ясновидящий ставит на ценность и блефует в абсолютно точном оптимальном соотношении, в то время как игрок, чья рука известна, коллирует и падает в связанном соотношении, которое делает ясновидящего безразличным к блефу. В первой $[0,1]$ игре мы ввели распределение $[0,1]$ и показали, что когда у одного из игроков нет стратегического выбора, его оппонент должен стремиться максимизировать свое ожидание (это и будет его оптимальной стратегией). В третьей игре мы столкнулись с важностью диапазона блефов, который заставлял игрока X значительно расширить свой диапазон колла - его порог лежал значительно левее порога для ставки игрока Y .

Нужно запомнить

- В играх на половине улицы вэлью беты и блефы (для оптимальных стратегий) находятся в соотношении $\alpha = 1(P + 1)$. Блефуя ровно с такой долей мертвых рук, мы можем сделать своего оппонента безразличным к колла.
- В играх на половине улицы частота фолда для игрока X задается коэффициентом α . Скидывая такое количество своих блеф-кэтчеров, он делает оппонента безразличным к блефу.
- Если у одного из игроков нет стратегических альтернатив, его оппонент должен стараться максимизировать свое ожидание, это и будет оптимальной стратегией.
- Правильный баланс между вэлью бетами и блефами гарантирует нам положительное ожидание против оппонента вне зависимости от его стратегии. Если он будет скидывать слишком часто, наши блефы станут более прибыльными, и наоборот, если начнет чаще уравнивать, то наши вэлью беты будут чаще проплачиваться.
- Оптимальные стратегии не всегда по-настоящему безразличны к блефам - это верно только для пороговых рук. В то же время блефы с нашими со слабейшими руками часто будут иметь положительное ожидание (по сравнению с чеком).

Глава 12

Хэдс-ап с короткими стэками: Пуш или Фолд

В главе 11 мы разобрали три вспомогательные игры на половине улицы и для каждой из них нашли оптимальные стратегии. Подобный анализ окажется весьма полезным и в реальных покерных ситуациях - каждая мини-игра несет в себе определенный урок, который можно использовать за столом. К тому же, более полной и точной информации мы в любом случае не получим, поскольку полное решение покера сегодня не представляется возможным.

В этой части мы поговорим о решении для ситуации, с которой вы регулярно сталкиваетесь в безлимитном покере. Речь пойдет о хэдс-апе, *где игрок на позиции дилера должен либо поставить олл-ин, либо скинуть свои карты.*

Примечание от переводчика: Эта глава фактически является решением для игры против коротких стэков

Может показаться странным, почему мы решили обратиться к этой проблеме посреди нашего экскурса в игры на половине улицы. На самом деле здесь есть веская причина. При анализе игры «Пуш или Фолд» мы будем рассматривать не экс-шоудаун вэлью, а цену игры (то есть общий выигрыш или проигрыш в раздаче). Таким образом, у игрока, который говорит свое слово первым, будут ровно те же варианты действий, что и у игрока Y в предыдущих примерах. Он может скинуть свои карты (что в определенной мере сродни чеку) и получить нейтральное ожидание. Или он может сделать ставку, а затем возможно получить колл от оппонента. Так что по своей сути «Пуш или Фолд» мало чем отличается от уже рассмотренных нами игр на половине улицы.

Перед тем как мы приступим к обсуждению первой игры, мы предлагаем нашим читателям проверить свою интуицию и попытаться угадать ответ на следующий вопрос. Безлимитный холдем, два игрока, по правилам баттон должен либо поставить олл-ин, либо скинуть свои карты. В стеке каждого из них находится по 16 фишек, блайнды составляют 1 фишку на баттоне и 2 на большом блайнде. С какой долей стартовых рук игрок на баттоне должен ставить олл-ин, если он играет оптимально?

Начнем с рассмотрения вспомогательной игры - в ней у каждого игрока будет некая статичная рука из диапазона $[0,1]$, правила те же (пуш или фолд).

Пример 12.1 - $[0,1]$ Пуш или Фолд #1

- Оба игрока имеют равные стэки (S единиц в каждом).
- Каждый из игроков получает случайное число из диапазона $[0,1]$.
- Игрок на большом блайнде (игрок X) ставит блайнд в 1 единицу.

- Игрок на баттоне (игрок Y) ставит блайнд 0.5 единиц и действует первым.
- Игрок Y может поставить олл-ин на 5 единиц, либо скинуть свои карты.
- Игрок X может либо принять олл-ин, либо скинуть свои карты.
- На шоудауне выигрывает рука, которая ближе к нулю.

Первое, что нужно здесь отметить - у игрока Y есть всего два стратегических выбора: либо вложить деньги в банк (пуш), либо сбросить карты. Стратегия пуша с диапазоном слабее, чем диапазон фолда всегда будет доминируемой. Таким образом, стратегия игрока Y будет состоять всего из двух областей: сильные руки, с которыми он поставит олл-ин, и слабые руки, которые он выкинет. То же самое верно и для его оппонента - сильные руки будут составлять диапазон колла, слабые - диапазон фолда.

Важное отличие от игр, которые мы рассматривали ранее, состоит в том, что здесь мы не можем ставить олл-ин как с сильными, так и слабыми руками. Если наш диапазон для пуша составляет $x\%$, то пуш с $x\%$ сильнейших комбинаций всегда будет доминировать любую другую конфигурацию нашего диапазона.

Стратегии обоих участников игры можно выразить всего двумя числами - сила руки, необходимая для пуша (y), и сила руки, необходимая для колла (x). Это пороговые значения. Иными словами, игрок Y должен ставить олл-ин со всеми руками лучше y , а игрок X должен уравнивать со всеми руками лучше x .

Кроме того, как мы уже знаем, y и x для пары оптимальных стратегий будут являться точками безразличия. Это значит, что у игрока Y оказывается некая рука y , то ему все равно, что делать: пуш или фолд. То же самое верно и для игрока X и соответствующего значения x . Также очевидно, что игрок X никогда не уравнивает олл-ин с рукой хуже, чем y , поскольку тогда он просто никогда не сможет выиграть банк.

Теперь мы можем использовать эту информацию для того, чтобы найти точки безразличия, как мы это уже делали в предыдущей главе. Однако здесь мы будем принимать в расчет все деньги, которые оказываются в центре стола, включая блайнды.

Итак, математическое ожидание для игрока Y от фолда составляет $-1/2$ единицы (он теряет свой малый блайнд).

$$\langle Y, \text{фолд} \rangle = -1/2$$

Поскольку игрок X никогда не уравнивает олл-ин с руками хуже, чем y , он всегда будет выигрывать, если сделает колла. Тогда математическое ожидание от пуша с рукой y составит:

$$\langle Y, \text{пуш} \mid y \rangle = (\text{игрок } X \text{ делает колл}) (-5) + (\text{игрок } X \text{ делает фолд}) (+1)$$

Поскольку мы имеем дело с равномерным распределением $[0,1]$, вероятность попадания в какой-либо интервал равна длине этого интервала. Игрок X уравнивает с вероятностью x и скинет свою руку с вероятностью $(1 - x)$.

Примечание от переводчика: Это определение может показаться излишне запутанным, но его легко объяснить на примере. Представьте, что есть некий интервал, состоящий из чисел от 0 до 1. Скажем, мы хотим узнать, какова вероятность попадания в отрезок от 0.3 до 0.5. Очевидно, что если все числа равномерно распределены в нашем исходном диапазоне, то и вероятность попадания в отрезок от 0.3 до 0.5 будет равна 20% (длина интервала составляет 0.2).

$$\langle Y, \text{пуш} \mid -y \rangle = (x) (-5) + (1 - x) (+1)$$

$$\langle Y, \text{пуш} \mid y \rangle = -x5 + 1 - x$$

Мы также знаем, что в пороговой точке игрок Y будет безразличен к пушу, то есть в ней ожидание от олл-ина будет равно ожиданию от фолда. Решим простое уравнение:

$$-x5 + 1 - x = -1/2$$

$$x(1 + 5) = 3/2$$

$$x = 3 / (2 + 25) \tag{12.1}$$

Теперь посмотрим на эту ситуацию со стороны игрока X . Ожидание от фолда для него составит -1 единицу, в то время как ожидаемые выигрыш от колла олл-ина с рукой x будет равен:

$$\langle X, \text{колл} \mid x \rangle = (y \text{ игрока } Y \text{ рука лучше}) (-5) + (y \text{ игрока } Y \text{ рука хуже}) (+5)$$

Игрок Y будет ставить олл-ин с y рук (при этом $x < y$). Из них $(y - x)/y$ рук окажутся хуже порога x , а x/y - лучше. Предположим, что игрок Y ставит олл-ин с 50% от общего диапазона, тогда как его оппонент уравнивает с 30% ($y = 0.5$, $x = 0.3$). Следовательно, $(y - x)/y = 2/5$ рук, с которыми игрок Y делает пуш будут хуже, чем диапазон колла игрока X , а $x/y = 3/5$ - лучше.

Примечание от переводчика: Игрок Y будет ставить олл-ин с y рук потому что с некой пороговой рукой y он будет безразличен к пушу. Соответственно, со всеми более сильными руками он предпочтет пуш. Мы имеем дело с равномерным распределением от 0 до 1, и если, скажем, точка безразличия достигается в $y = 0.2$, то игрок Y будет ставить олл-ин со всеми руками от 0 до 0.2.

$$\begin{aligned} \langle X, \text{колл} \mid x \rangle &= p(\text{у игрока } Y \text{ рука лучше}) (-S) + p(\text{у игрока } Y \text{ рука хуже}) (+S) \\ \langle X, \text{колл} \mid x \rangle &= (x/y)(-S) + [(y - x)/y](+S) \\ \langle X, \text{фолд} \rangle &= -1 \end{aligned}$$

Уравняем эти два выражения, чтобы найти точку безразличия для игрока X:

$$\begin{aligned} (S)(y-2x)/y &= -1 \\ Sy - 2Sx &= -y \\ S - 2Sx/y &= -1 \end{aligned}$$

$$y = 2Sx / (S + 1) \quad (12.2)$$

Обратимся к уравнению 12.1:

$$x = 3 / (2 + 2S)$$

Произведем соответствующую замену в уравнении 12.2 и получим:

$$y = 3S / (1 + S)^2 \quad (12.3)$$

Мы получили два уравнения, которые описывают пару оптимальных стратегий для заданной игры. Так, игрок Y должен делать пуш с $3S/(1 + S)^2$ всех рук, а игрок X будет уравнивать с $3/(2 + 2S)$. Можем сразу проверить полученные значения. При стэках размером в 5 единиц, игрок Y будет ставить олл-ин $(3(5)/(1 + 5)^2) = 15/36$ раз, а игрок X будет делать колл $(3/(2 + 2(5)) = 1/4$ раз. При стэке в 10 единиц, получим $(3(10)/(1 + 10)^2) = 30/121$ и $3/(2 + 2(10)) = 3/22$ соответственно. Если же мы возьмем экстремальные значения, например, стэки по миллиону единиц, диапазоны обоих игроков будут близки к нулю.

Также мы можем ответить на вопрос: на чьей стороне находится перевес в этой игре? Определим цену игры для игрока Y. Ниже приведена таблица с возможными комбинациями диапазонов в раздаче:

X →	[0, x]	[x, y]	[y, 1]
Y			
[y, 1]	-0.5	-0.5	-0.5
[x, y]	-S	1	1
[0, x]	0	1	1

Примечание от переводчика: В таблице выше указаны диапазоны «рук», которые могут оказаться у каждого из игроков. Так, [0, x] по горизонтали значит, что мы рассматриваем для игрока X все руки от 0 (сильнейших) до порогового значения x. В свою очередь, у игрока Y этому диапазону могут противостоять руки [y, 1] (от порога y до слабейших рук) и т.п.

Когда игрок Y скидывает свои карты, игрок X выигрывает 0.5 единицы. Это происходит 1- y раз.

Когда игрок Y ставит олл-ин, а его оппонент скидывает карты, он выигрывает 1 единицу. Такой исход мы будем наблюдать $y(1 - x)$ раз.

Если игрок Y ставит олл-ин и получает колл, то возможны два сценария. Первый - у обоих игроков оказались руки в диапазоне от 0 до x. В этом случае ни один из них преимущества не получит, поскольку как мы уже знаем, все руки в наших диапазонах распределены равномерно, так что количество поражений и побед будет одинаково. Второй - игрок Y поставил олл-ин с рукой слабее, чем x, тогда его оппонент, игрок X, выиграет S единиц. Этот сценарий будет реализован в $(y - x)(x)$ случаев.

Получим:

$$\langle Y \rangle = p(Y \text{ фолд}) \left(-\frac{1}{2}\right) + p(Y \text{ пуш, } X \text{ фолд}) (+1) + p(Y \text{ пуш, } X \text{ колл при } x > y) (-S) + p(Y \text{ пуш, } X \text{ колл при } x < y) (0)$$

$$\langle Y \rangle = -\frac{(1 - y)}{2} + (y)(1 - x)(1) + (y - x)x(-S)$$

$$\langle Y \rangle = -\frac{1}{2} + y \left[\frac{1}{2} + 1 - x - Sx \right] + Sx^2$$

$$\langle Y \rangle = -\frac{1}{2} + y \left[\frac{3}{2} - (1 + S)x \right] + S \left(\frac{3}{2(1 + S)} \right)^2$$

$$\langle Y \rangle = -\frac{1}{2} + y \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right] + \frac{9S}{4(1 + S)^2}$$

$$\langle Y \rangle = \frac{9S}{4(1 + S)^2} - \frac{1}{2}$$

Теперь мы можем использовать полученную функцию для анализа цены игры при различных размерах стэков (от 1 до бесконечности). Так, если стэки в раздаче составляют от 1 до 2 единиц, игрок Y будет иметь ощутимый перевес в ожидании, в то время как при стэках больше двух преимущество перейдет к его оппоненту. Однако при размере стэков стремящемся к бесконечности, ожидание игрока X сводится к 0.5 единицы, которые он выигрывает после фолда игрока Y.

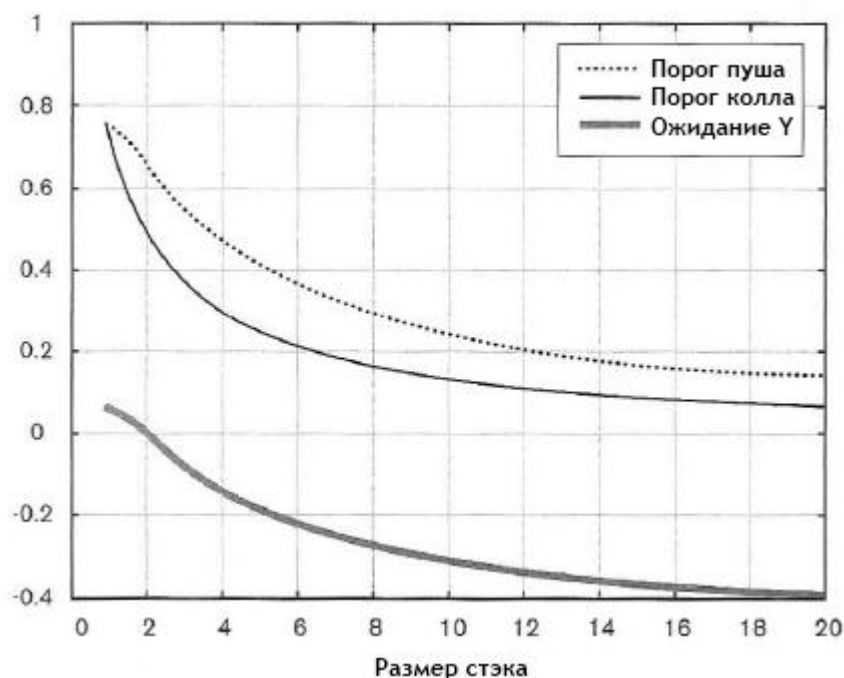


Рисунок 12.2. Пуш или Фолд #1

Однако когда мы играем в покер, лучшая рука на префлопе далеко не всегда выигрывает раздачу. Даже если игрок X будет уравнивать олл-ин с достаточно сильным диапазоном, у его оппонента редко когда окажется менее 33% эквити в банке. В следующей вспомогательной игре мы рассмотрим случай, где у худшей руки на префлопе есть 33% шанс выиграть на шоудауне.

Пример 12.2 - [0,1] Пуш или Фолд #2

- Оба игрока имеют равные стэки (S единиц в каждом).
- Каждый из игроков получает случайное число из диапазона $[0,1]$.
- Игрок на большом блайнде (игрок X) ставит блайнд в 1 единицу.
- Игрок на баттоне (игрок Y) ставит блайнд 0.5 единиц и действует первым.
- Игрок Y может поставить олл-ин на S единиц, либо скинуть свои карты.
- Игрок X может либо принять олл-ин, либо скинуть свои карты.
- На шоудауне рука, которая ближе к нулю, выигрывает $\frac{2}{3}$ раз.

Эта игра очень похожа на ту, что мы рассмотрели чуть выше, однако нужно отметить два важных отличия. Во-первых, в предыдущей игре при очень маленьких стэках (например, $S = 1$) игрок Y ставил олл-ин с 75% своих рук, в то время как его оппонент отвечал с 75% своего диапазона. Это происходило из-за того, что руки, близкие к единице не имели никакой ценности. В то же время, в этой игре даже самая плохая рука ровно $\frac{1}{3}$ раз выигрывает банк на шоудауне. Так что при стэках в 1 единицу для игрока Y пуш с любой рукой будет обладать большим ожиданием, чем фолд. Во-вторых, раньше игрок X должен был делать колл с руками строго лучше диапазона пуша своего оппонента. Здесь же ему

всегда гарантирована как минимум треть банка, так что это правило выполняться не будет.

Рассмотрим два возможных случая в этой игре.

Случай 1: $S < 3$

При стэках меньше трех единиц мы без труда найдем стратегию для игрока Х. Если его оппонент поставит олл-ин, то игрок Х получит шансы банка как минимум 2 к 1, а это, в свою очередь, значит, что он всегда должен делать колл (то есть $x = 1$). Иными словами, для игрока Х колл будет доминировать фолд во всех случаях без исключения. Тогда игроку Y останется лишь максимизировать свое ожидание против такой предсказуемой стратегии оппонента.

$$\begin{aligned} \langle Y, \text{пуш} \rangle &= p(\text{у игрока Y лучшая рука}) (\text{банк}) (\text{эквити}) + \\ &+ p(\text{у игрока Y худшая рука}) (\text{банк}) (\text{эквити}) - (\text{размер ставки}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Y, \text{пуш} \rangle &= p(\text{у игрока Y лучшая рука}) (2S) \left(\frac{2}{3}\right) + \\ &+ p(\text{у игрока Y худшая рука}) (2S) \left(\frac{1}{3}\right) - (S) \end{aligned}$$

Игрок Х уравнивает олл-ин со всеми руками. Таким образом, если игрок Y сделает пуш с y_1 , у его оппонента окажется рука лучше с вероятностью y_1 , и рука хуже с вероятностью $(1 - y_1)$.

$$\begin{aligned} p(\text{у игрока Y лучшая рука}) &= 1 - y_1 \\ p(\text{у игрока Y худшая рука}) &= y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Y, \text{пуш} \mid y_1 \rangle &= (1 - y_1) (2S) \left(\frac{2}{3}\right) + y_1 (2S) \left(\frac{1}{3}\right) - (S) \\ \langle Y, \text{пуш} \mid y_1 \rangle &= S/3 - 2Sy_1/3 \\ \langle Y, \text{фолд} \mid y_1 \rangle &= -1/2 \end{aligned}$$

Игрок Y должен ставить олл-ин каждый раз, когда:

$$\begin{aligned} S/3 - 2Sy_1/3 &> -1/2 \\ 2S - 4Sy_1 &> -3 \\ y_1 &< (2S + 3)/4S \end{aligned}$$

Тогда пороговое значение y составит:

$$y = (2S + 3)/4S$$

Мы получили, что оптимальными стратегиями для игры со стэками меньше трех единиц будет пуш со стороны игрока Y со всеми руками, удовлетворяющими приведенному выше уравнению, и колл со стороны игрока Х со всеми руками без исключения. Представьте, что стэки в раздаче составляют 1.5 единицы - пуш

игрока Y получит колл от оппонента 100% раз, но и олл-ин он также поставит со всеми своим диапазоном.

При стэках в 3 единицы игрок Y должен ставить олл-ин с $\frac{3}{4}$ своих рук. С рукой 0.75 его математическое ожидание составит -0.5 единицы, что в точности равно ожиданию от фолда.

Случай 2: $S > 3$

При стэках больше трех единиц, игрок X получает шансы банка хуже, чем 2 к 1. А это значит, что он уже не может уравнивать со всем своим диапазоном - для каких-то рук фолд становится предпочтительным решением. Более того, он уже не может уравнивать с руками хуже, чем порог олл-ина его оппонента (поскольку фолд при больших стэках все равно будет лучше колла с 33% эквити в банке). Таким образом, мы фактически имеем дело с игрой пуш или фолд из примера 12.1, с той лишь разницей, что лучшей руке принадлежит всего $\frac{2}{3}$ банка.

Мы можем найти оптимальные стратегии для этого случая, используя те же самые уравнения с поправкой на эквити каждого игрока. Если они увидят шоудаун, то лучшая рука выиграет $S/3$ единицы, а худшая проигрывает $S/3$.

$$\langle Y, \text{пуш} \mid y \rangle = (\text{игрок X делает колл}) (-S/3) + (\text{игрок X делает фолд}) (+1)$$

Примечание от переводчика: $S/3$ это лишь упрощение подсчета математического ожидания. Действительно, если мы говорим об уравнении выше, то в «традиционной» форме оно будет выглядеть так:

$$\langle Y, \text{пуш} \mid y \rangle = (x) (-S * 2/3 + S * 1/3) + (1-x) (+1)$$

Как вы можете помнить из примера 12.1, если игрок X уравнивает олл-ин, то он делает это с рукой лучше. Тогда игрок Y две трети раз проиграет банк, а одну треть (согласно правилам игры) выиграет. Но в скобках после упрощения получится $S/3$.

Таким образом, мы можем упростить рассматриваемую задачу до игры со стэками $S/3$.

Игрок X уравнивает олл-ин с вероятностью x и скинет свои карты с вероятностью $(1 - x)$.

$$\langle Y, \text{пуш} \mid y \rangle = (x) (-S/3) + (1 - x) (+1)$$

$$\langle Y, \text{пуш} \mid y \rangle = (-xS/3) + 1 - x \tag{12.4}$$

$$\langle Y, \text{фолд} \rangle = -1/2$$

Снова приравняем эти два выражения. Получим:

$$-xS/3 + 1 - x = -1/2$$

$$xS + 3x = 9/2$$

$$x = 9/2(S + 3) \quad (12.5)$$

Для игрока X ожидание от фолда составляет -1 единицу. Посчитаем ожидание от колла с пороговой рукой x .

Как и в примере 12.1, игрок Y поставит олл-ин с y своих рук (и, как нам уже известно, $x < y$). Из этих рук $(y - x)/y$ будут хуже, чем x , а x/y - лучше.

$$\begin{aligned} \langle X, \text{колл} \mid x \rangle = & p(\text{у игрока Y лучшая рука}) (-S/3) + \\ & + p(\text{у игрока Y худшая рука}) (+S/3) \end{aligned}$$

$$\langle X, \text{колл} \mid x \rangle = (-S/3)(x/y) + (+S/3)(y - x)/y$$

$$\langle X, \text{колл} \mid x \rangle = (S/3)(y - 2x)/y$$

$$\langle X, \text{фолд} \rangle = -1$$

Найдем точку безразличия:

$$(S/3)(y - 2x)/y = -1$$

$$S(y - 2x) = -3y$$

$$y = 2xS/(S + 3)$$

$$y = 9S/(S+3)^2 \quad (12.6)$$

Таким образом, оптимальная стратегия для игрока Y - пуш с $9S/(S+3)^2$ всех рук, а для игрока X - колл с $9/2(S+3)$ всех рук.

Как вы можете помнить, в примере 12.1 оптимальные диапазоны оказались достаточно узкими - при стэках в 10 единиц игроку Y нужно было идти в олл-ин примерно с четвертью своих рук. Однако в этой игре он должен ставить олл-ин $(9(10)/(10+3)^2) = 90/169$ раз, то есть больше, чем в половине случаев при таком же размере стэка! В свою очередь, игрок X будет уравнивать $(9/(6 + 2(10))) = 9/26$ всех рук. На первый взгляд может показаться, что в наши расчеты закралась ошибка - как можно рисковать десятью блайндами ради того, чтобы забрать один, и при этом в случае колла иметь всего 33% на победу?

На самом деле, интуиция подсказывает вам неправильный ответ. Многие привыкли думать, что они рискуют A долларами, чтобы выиграть B , причем все переменные строго определены (размер ставки, процент фолда оппонента или

выигрыша на шоудауне и т.п.). При такой логике наши расчеты действительно кажутся ошибочными - мы хотим рисковать десятью единицами, чтобы выиграть одну, когда оппонент уравнивает наш олл-ин примерно в трети случаев. Однако важно понимать, что в случае колла мы проигрываем не S , а лишь $S/3$. Так что в реальности мы инвестируем в банк три целых и одну треть единицы, чтобы выиграть полторы (мертвые деньги в банке).

Если мы сравним решения для игры из примера 12.1 и 12.2 (для стэков больше трех единиц), то эта закономерность станет еще более очевидной:

Пример 12.1:

$$x = 3/(2 + 2S)$$

$$y = 3S/(1 + S)^2$$

Пример 12.2:

$$x = 9/(2S + 6)$$

$$y = 9S/(S + 3)^2$$

Как видите, решение для второй игры можно получить из уравнений для примера 12.1 просто подставив $S/3$ вместо S . Действительно, эффективный размер стэка для игры в примере 12.2 составляет всего $S/3$ (как уже было показано выше). Мы можем использовать это значение для того, чтобы рассчитать цену новой игры для игрока Y .

$$\langle Y \rangle = -1/2 + 3/4 S/((S/3+1)^2)$$

$$G = -\frac{1}{2} + \frac{27S}{4(S + 3)^2}$$

Однако это уравнение охватывает только ситуации, где размер стэков больше трех единиц.

Есть и два других случая, каждый со своим решением. Так, когда $S < 3/2$, оба участника будут разыгрывать все свои руки без исключения, цена игры будет равна нулю. А в промежутке между $3/2$ и 3 будет действовать решение из первого случая, рассмотренного нами для примера 12.2:

$$y = \frac{2S+3}{4S} \text{ при } x = 1, \text{ так что}$$

$$\langle Y \rangle = p(\text{игрок } Y \text{ скидывает карты}) (-1/2) + \\ + p(\text{игрок } Y \text{ ставит олл-ин}) p(x_1 > y) (S/3)$$

$$\langle Y \rangle = -\frac{1}{2}(1 - y) + y(1 - y)\frac{S}{3}$$

$$\langle Y \rangle = (1 - y) \left[-\frac{1}{2} + y \frac{S}{3} \right]$$

$$\langle Y \rangle = \frac{2S - 3}{4S} \left[-\frac{1}{2} + \frac{2S + 3}{12} \right]$$

$$\langle Y \rangle = \frac{(2S - 3)^2}{48S}$$

Как вы можете заметить, мы получили цену игры для трех взаимодополняющих интервалов

$$\langle Y \rangle = 0, \text{ для } S \leq 3/2$$

$$\langle Y \rangle = (2S - 3)^2 / 48S, \text{ для } 3/2 \leq S \leq 3$$

$$\langle Y \rangle = -1/2 + (27S) / (4(S+3)^2), \text{ для } 3 \leq S$$

Обратите внимание на пороговые значения x и y . При $S < 3$ x равен 1, однако как только S становится немного больше трех, оптимальная частота колла падает до $3/4$. Это показывает, что стратегии не обязательно должны быть непрерывными при изменении стэков и размера банка.

С помощью этих двух примеров мы выяснили как наличие эквити меняет стратегию в играх «Пуш или Фолд». Когда лучшая рука на префлопе вне зависимости ни от чего выигрывала банк, оптимальная стратегия была достаточно тайтовой, а игрок X имел значительное преимущество практически при любом размере стэков. Но как только у худшей руки появилось эквити (пример 12.2), оптимальная стратегия стала диктовать игру с гораздо более широким диапазоном. Более того, преимущество перешло на сторону игрока Y при любом размере стэка менее шести единиц.

Как мы узнаем из следующего примера, оптимальная стратегия в безлимитном покере также будет весьма лузовой и агрессивной.

Пример 12.3 - Пуш или Фолд в безлимитном Холдеме

- Оба игрока имеют равные стэки (S единиц в каждом).
- Каждый из игроков получает две карты
- Игрок на большом блайнде (игрок X) ставит блайнд в 1 единицу.
- Игрок на баттоне (игрок Y) ставит блайнд 0.5 единиц и действует первым.
- Игрок Y может поставить олл-ин на S единиц, либо скинуть свои карты.
- Игрок X может либо принять олл-ин, либо скинуть свои карты.
- Если игрок X уравнивает олл-ин, то на стол выкладываются пять карт и выигрывает лучшая комбинация.

На первый взгляд может показаться, что мы имеем дело с вариацией уже рассмотренной нами игры. Однако Холдем не укладывается в диапазон $[0,1]$, который мы применяли ранее. Так, здесь почти нет мертвых рук на префлопе, а 80% против случайной комбинации есть всего у двух стартеров. Кроме того, сила нашей руки будет постоянно меняться. Самое время обратиться к методу перебора, что мы и сделаем чуть позже. А пока давайте рассмотрим два крайних случая: при бесконечно больших и малых стэках.

В наших рассуждениях ниже вы встретите термин *фиктивная игра*. Мы уже использовали его в прошлых главах, и, стоит отметить, он оказывается абсолютно незаменимым при решении игр с помощью компьютера. Тема фиктивных игр достаточно хорошо описывается в пособиях по теории игр, так что мы не будем вдаваться в подробности и просто предложим краткое определение. Если нам известны правила игры, а также стратегия идеального оппонента (то есть стратегия максимальной эксплуатации для каждого нашего действия), мы можем использовать эту информацию для поиска оптимальной стратегии.

Для начала мы должны сделать предположение о вероятных стратегиях каждого из игроков. Чем реалистичнее будет наша догадка, тем проще будет решить игру. Представьте, что перед нами два игрока (А и В). Скажем, мы определились с их стратегиями. Теперь нам нужно вычислить стратегию максимальной эксплуатации для игрока В при условии, что игрок А следует заданной нами стратегии. Затем мы соединяем найденную СМО с изначальной стратегией для игрока В используя специальную константу смешивания. Она задается некой последовательностью чисел, сводящейся к нулю, но имеющей достаточное количество членов, так что стратегии могут меняться произвольным образом.

Смешивание стратегий работает следующим образом. Допустим, задана константа m . Тогда мы будем сочетать старую стратегию $S_{старая}$ с найденной стратегией максимальной эксплуатации $S_{новая}$ следующим образом:

$$S_{смешанная} = (1 - m) S_{старая} + m S_{новая}$$

Доказано, что при многократном повторении такие «фиктивные розыгрыши» (где мы становимся на сторону обоих игроков) в конечном счете приведут нас к оптимальной стратегии. При этом число повторений будет конечным.

Очень большие S

Когда стэки участников раздачи стремятся к бесконечности, единственной верной стратегией будет розыгрыш только тузов. Игрок Y не сможет ставить олл-ин ни с одной другой рукой, поскольку тогда его оппонент может просто дожидаться тузов и выиграть гигантский банк. Однако с уменьшением стэка, игроку Y придется добавлять в свой диапазон все новые и новые руки, иначе он будет терять деньги, упуская возможность украсть блайнды. Очевидно, что если игрок Y не станет этого делать, то его оппоненту стоит придерживаться стратегии колла с тузами.

Итак, если стэки станут больше некой критической отметки, игрок Y не сможет получить вэлью от пуша с широким диапазоном, поскольку даже если его оппонент уравнивает только с тузами, в среднем он будет проигрывать слишком много. Можно подумать, что с уменьшением размера стэков первым делом игроку Y следует начать ставить олл-ин с КК, однако это не совсем верно. Дело в том, что при игре с большими стэками руки с **блочерами** оказываются особенно ценными. Так, комбинации с тузом уменьшают вероятность АА у оппонента и имеют больше эквити против его диапазона, чем КК. В игре «Пуш или Фолд» лучшей рукой против оппонента, который уравнивает олл-ин только с тузами будет АТs.

Если игрок Y идет в олл-ин с АТs при стэке в 2000 единиц, его ожидание составит:

$$\begin{aligned} \langle \text{АТs, пуш 2000} \rangle &= p(\text{игрок X скидывает}) (\text{банк}) + \\ &+ p(\text{игрок X уравнивает}) p(\text{эквити игрока Y}) \\ &(\text{размер банка}) - \text{пуш} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \text{АТs, пуш 2000} \rangle &= (1222/1225) 1.5 + (3/1225) ((0.13336) (4000) - 2000) \\ \langle \text{АТs, пуш 2000} \rangle &= -2.09525 \end{aligned}$$

Или примерно минус 2 единицы за пуш. Мы можем использовать эту же формулу, чтобы найти размера стэка x, при котором АТs становится прибыльным пушем против оппонента, уравнивающего только с парой тузов:

$$\langle \text{АТs, пуш } x \rangle = 1.5(1222/1225) + (3/1225) ((0.13336) (x) - x)$$

Приравниваем к нулю:

$$\begin{aligned} 1.5(1222/1225) + (3/1225) ((0.13336) (x) - x) &= 0 \\ x &= 833.25 \end{aligned}$$

Это значит, что при стэке в 833.25 единиц игрок Y может начать ставить олл-ин не только с тузами, но также и с АТs. Как вы могли уже догадаться, при большем размере стэка, в его диапазоне должны остаться только тузы, а 833.25 является точкой безразличия для АТs (иными словами, именно при таком стэке игроку Y все равно, что делать с этой рукой).

Теперь давайте посмотрим на эту ситуацию с точки зрения игрока X, если его оппонент начал ставить олл-ины не только с АА, но и с АТs. Может ли он расширить свой диапазон? Лучше рукой (помимо АА) против {АА, АТs} будет АКs с 41.442% эквити, однако даже с ней игрок X будет терять деньги в случае колла.

Интересно отметить, что как только эффективные стэки достигают 833.25 единиц,

стратегия игрока Y резко меняется от {Пуш 100% раз с AA} до {Пуш 100% раз с AA и ATs}. Здесь нет никакого плавного перехода, например {Пуш с 1% ATs} - как только пуш с ATs становится прибыльным, игрок Y обязан перейти к новой стратегии.

В некотором смысле этот парадокс похож на изменение агрегатного состояния в физике. При определенной температуре вещество стремительно преобразуется из твердого в жидкое. Это происходит из-за того, что точка равновесия может резко сместиться даже при незначительных изменениях в рассматриваемой системе. Несложно проследить аналогию с размерами стэков и банка - чем меньше это соотношение, тем быстрее становится игра. А нулевые блайнды фактически равносильны абсолютному нулю в физике, когда прекращается всякое движение.

Давайте сделаем нашу игру еще «быстрее» и уменьшим стэки до 833.12. В этой точке мы получим еще одного кандидата в диапазон пуша - A5s (с эквити в 13.331% против тузов). Важно заметить, что чем больше рук мы включаем в диапазон, тем скорее игрок X сможет начать уравнивать олл-ины с руками слабее AA.

И снова для игрока X лучшей рукой против диапазона {AA, ATs, A5s} окажется AKs, более того, на этот раз она будет иметь более 50% эквити (если быть точными, 50.9%). Таким образом, если игрок Y решит ставить олл-ины с AA, ATs и A5s, игрок X может начать уравнивать с AKs, и ожидаемый выигрыш его оппонента станет отрицательным. В свою очередь, игрок Y может исключить A5s из своего диапазона, но тогда и игрок X вправе вернуться к стратегии колла исключительно с тузами (и в этом случае игрок Y упустит часть потенциальных выигрышей). Таким образом, игроку Y нужно найти правильное сочетание рук, при котором его ожидание против лучшей стратегии оппонента будет максимальным. Для этого достаточно только найти точку безразличия для AKs.

Предположим, что стэки обоих игроков равны 833 единицам - чуть меньше, чем 833.12, о которых мы говорили ранее (точка, в которой пуш с A5s становится прибыльным). Определим разницу в ожидании между двумя стратегиями игрока X (колл с AA, и колл с AA и AKs).

Рука игрока Y	Разница в ожидании ($\langle \text{AKs, колл} \rangle = p(\text{колл})p(\text{AKs выигрывают})$ - цена колла)
AA	$(3/1225)((0.12141)(1666)-833) = -1.5447$
ATs	$(3/1225)((0.70473)(1666)-833) = 0.8353$
A5s	$(3/1225)((0.69817)(1666)-833) = 0.8085$

Как видите, пуш с A5s более предпочтителен, чем с ATs, если оппонент уравнивает с диапазоном из AA и AKs.

Найдем точку безразличия для AKs у игрока X. В ней ожидание от стратегии колла

с AKs должно быть равно нулю:

$$(-1.5447) (AA\%) + (0.8353) (ATs\%) + (0.8085) (A5s\%) = 0$$

Примечание от переводчика: Здесь мы сначала нашли ожидание стратегии колла с AKs против каждой из возможных рук оппонента. Это и есть отклонение от стратегии колла только с тузами, поскольку чтобы найти ожидание от стратегии колла с AA и AKs, нам, очевидно, нужно просто сложить ожидаемые выигрыши от колла с AA и колла с AKs.

В точке безразличия игроку X все равно, что делать со своими AKs. Иными словами, ожидание игрока X от колла с AKs должно быть равно нулю. Тогда ожидаемый выигрыш от стратегии {Колл с AA и AKs} будет равен ожидаемому выигрышу от стратегии {Колл с AA}.

Естественно, частота пуша с AA будет равна 100%, получим:

$$0.8353 ATs\% + 0.8085 A5s\% = 1.5447$$

Поскольку A5s имеет более высокое ожидание для игрока Y, то и с ней мы также будем ставить олл-ин 100% раз:

$$\begin{aligned} 0.8353 ATs\% &= 0.70935 \\ ATs\% &= 87.73\% \end{aligned}$$

Значит, при стэке в 833 единицы, если игрок Y будет ставить олл-ин с диапазоном {AA-100%, ATs - 87.73%, A5s - 100%}, то его ожидание будет максимальным, а игроку X будет безразличен к коллу с AKs.

Обратите внимание, что раньше мы предлагали идти в олл-ин с ATs абсолютно всегда, однако как только эффективный размер стэка сократился менее чем на 0.5 единицы, частота пуша с ней снизилась почти на четверть. Более детальный анализ этой игры даст еще больше таких же необычных результатов - при определенных размерах стэков мы будем вынуждены исключить некоторые руки из диапазона игрока Y и заменить их на те, что лучше стоят против нового диапазона колла оппонента.

Очень маленькие S

Итак, мы получили весьма неплохое представление о решении рассматриваемой игры для очень больших S. Теперь давайте посмотрим, что происходит при маленьких стэках.

Для начала поговорим о ситуации, в которой оказывается игрок X. Мы уже знаем, что он будет уравнивать только с руками, которые имеют положительное

ожидание против диапазона пуша. Каждый раз он должен будет принимать решение о колл ставки размером $(S - 1)$ при банке $(S + 1)$. Пусть его эквити в случае колл равно некому x , тогда:

$$\begin{aligned} x(2S) - (S-1) &> 0 \\ x(2S) &> S-1 \\ x &> (S-1)/(2S) \end{aligned}$$

Значит, игрок X обязан делать колл всякий раз, когда эквити его руки больше $(S-1)/(2S)$.

Например, при стэках в 1.1 единицу, ему нужно будет уравнивать с комбинациями, эквити которых превышает $1/22$. Проще говоря, если бы игрок Y ставил олл-ин со всеми стартерами, игроку X должен бы был отвечать с любой рукой, поскольку даже 32о имеет 32.3% эквити против двух случайных карт.

Давайте представим, что игрок X действительно уравнивает со всеми руками. Тогда его оппоненту нужно будет идти в олл-ин с любой комбинацией, чье ожидание от пуша выше ожидания от фолда. Очевидно, что ожидание от пуша есть ни что иное как результат олл-ина против диапазона колла, а ожидание от фолда всегда равно нулю.

$$\begin{aligned} <\text{Игрок } Y, \text{ все руки}> \quad (2S) - (S - 0.5) > 0 \\ <\text{Игрок } Y, \text{ все руки}> > (S - 0.5)/2S \end{aligned}$$

Итак, игрок Y , в свою очередь, будет ставить олл-ин со всеми руками, чье эквити больше $(S - 0.5)/2S$. При стэках в 1.1 единицу этот порог равен $3/11$. Такое эквити против диапазона колла игрока X есть у любой случайной руки, так что оптимальной стратегией здесь будет пуш с любыми двумя картами.

И поскольку ни один из игроков не может улучшить свою стратегию в одностороннем порядке, то при заданных стэках найденная нами пара стратегий (пуш с любыми двумя и колл с любыми двумя) будет оптимальной.

Однако как только стэки начнут расти, игрок Y первым столкнется с проблемой недостатка эквити для пуша.

Худшая рука, 32о имеет 32.3% эквити в олл-ине против двух случайных карт. Подставив это значение в формулу получим:

$$\begin{aligned} 0.323 &> (S - 0.5)/(2S) \\ S &> 1.412 \end{aligned}$$

То есть, как только стэки вырастут до 1.412 единиц, игрок Y уже не сможет

ставить олл-ин с 32о. Подумайте, насколько это отличается от игры при больших стэках, где игрок Y всегда ставил олл-ин с более широким диапазоном, чем диапазон колла его оппонента.

Мы можем использовать метод фиктивной игры, чтобы оценить оптимальные стратегии при различных размерах стэков. Возьмем стэк в 2 единицы. Используя формулу для определения эквити, получим, что игрок X должен уравнивать каждый раз, когда эквити его руки больше, чем $\frac{1}{4}$. Но представьте, вместо этого он будет уравнивать со всеми своими руками. Тогда лучшей контрстратегией для игрока Y будет пуш со стартерами, чье эквити превышает $\frac{3}{8}$. Как следствие, в его диапазон не войдут 13 рук: 32о, 42о, 52о, 62о, 72о, 82о, 43о, 53о, 63о, 73о, 83о, 32s, и 42s.

Самое время вернуться к игроку X и подумать о подходящей подстройке. Против диапазона, который не включает в себя 13 вышеназванных комбинаций, самой слабой рукой все также окажется 32о с 31.72% на победу. И, как результат, ему все равно придется уравнивать со всеми стартерами. Таким образом, оба участника максимизировали свое ожидание против соответствующей стратегии оппонента, и путей для дальнейшего улучшения нет ни у одного из них.

Некоторые наши читатели сейчас могут подумать, что мы сошли с ума. Действительно, в большинстве ситуаций (и этому обычно учат всех начинающих игроков), нужно уравнивать олл-ин с диапазоном уже, чем диапазон пуша. Причина, по которой это правило не соблюдается в нашем случае кроется в исключительно маленьком размере стэков - блайнд игрока Y (0.5 единицы) составляет немалую долю его стэка. Но с увеличением количества денег у каждого из участников раздачи, этот эффект постепенно сойдет на нет.

Пусть теперь стэки у обоих игроков составляют 3 единицы. Игроку Y нужно выигрывать со своей рукой $\frac{5}{12}$ раз, при условии, что его оппонент отвечает с любыми двумя. Так что на префлопе ему придется расстаться с 34 комбинациями:

32о и 32s
42о-43о и 42s-43s
52о-54о и 52s-54s
62о-65о и 62s-64s
72о-75о и 72s-73s
82о-85о и 82s-83s
92о-94о

С другой стороны, игроку X потребуется $\frac{1}{3}$ эквити в банке для нулевого колла. Против найденного диапазона оппонента следующие руки не обладают требуемым эквити:

32o
42o
52o
62o-63o
72o-73o
82o-83o

Теперь вернемся к игроку Y. Только что мы определили новый диапазон для его оппонента, а это значит, что изменится и функция математического ожидания от пуша. Теперь она будет выглядеть следующим образом:

$$(\% \text{ игрок X уравнивает}) (p(\text{игрок Y выигрывает}) (\text{банк после колла}) - \text{цена колла} + (\% \text{ игрок X скидывает}) (\text{банк}) > 0$$

Это неравенство даст нам новый диапазон для олл-ина. В ответ игрок X изменит свой диапазон и так далее. В общих чертах это и есть алгоритм фиктивной игры. Ответом для стэков в 3 единицы будет:

Диапазон пуша (игрок Y):

{22, A2s, A2, K2s, K2, Q2s, Q2, J2s, J2, T2s, T2, 92s, 95, 84s, 85, 74s, 76, 64s, 54s}

Диапазон фолда (игрок X):

{32, 42, 52, 63-, 73-, 83-}

Примечание от переводчика: Имеется ввиду, что игрок Y ставит олл-ин со всеми руками, которые лучше указанных в скобках. Для игрока X «63-» значит, что он должен скинуть руки слабее 63.

Фактически, с помощью фиктивной игры мы можем решить «Пуш или Фолд» для любых стэков. Ниже вы можете найти таблицы с оптимальными стратегиями пуша и колла при стэках менее 50 блайндов.

Цифры в таблицах - пороговые значения стэков, ниже которых пуш (или колла, в зависимости от таблицы) становится прибыльным. С другой стороны, отметки CALL и JAM означают, что с заданной рукой можно без лишних раздумий ставить или уравнивать олл-ин при стэках до 50 блайндов. Как мы уже доказали выше, некоторые руки могут то появляться, то исчезать из диапазонов, в зависимости от размера стэка. И хотя в большинстве случаев это не будет иметь решающего значения для нашей стратегии, мы поместили знаком «*» несколько стартеров, на которые стоит обратить внимание.

Стэки в таблицах указаны до внесения блайндов в банк.

Таблица Пуша для NLH

(одномастные руки - справа сверху)

	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
A	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	47.5
K	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	49.2	36.2	32.2	26.4	19.9	19.3
Q	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	30.2	29.4	24.2	16.3	13.5	12.7
J	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	JAM	49.8	32.3	18.6	16.2	13.5	10.6	8.8
T	JAM	JAM	44.7	46	JAM	JAM	JAM	35.6	24.7	11.9	10.5	7.7	6.5
9	44.9	24.2	24.3	29.2	31.9	JAM	JAM	36.1	26.8	14.4	6.9	4.9	3.7
8	42.6	18.6	13	14.1	18.4	20.5	JAM	43.2	30.9	18.8	10.1	2.7	2.5
7	40.8	16.1	10.3	8.5	9.9	10.8	15.6	JAM	35.7	23.8	13.9	2.5	2.1
6	34.6	15.3	9.8	6.5	5.7	5.2	7.1	11.2	JAM	29.3	16.3	*	2
5	36.9	14.4	8.9	6	4.1	3.5	3	2.6	2.4	JAM	23.5	**	2
4	34.5	13.1	8.3	5.4	3.8	2.7	2.3	2.1	2	2.1	JAM	***	1.8
3	31.9	12.5	7.5	5	3.4	2.5	1.9	1.8	1.7	1.8	1.6	JAM	1.7
2	29.2	11.6	7	4.6	3	2.2	1.8	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	JAM

Руки со звездочкой следует играть следующим образом:

* 63s = пуш при стэке менее 2.3, а также в промежутке от 5.1 - 7.1

** 53s = пуш при стэке менее 2.4, а также в промежутке от 4.1 - 12.9

*** 43s = пуш при стэке менее 2.2, а также в промежутке от 4.8 - 10.0

Таблица Колла для NLH

(одномастные руки - справа сверху)

	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
A	CALL	CALL	CALL	CALL	CALL	47.3	40.7	35.6	30.9	30.1	25.6	24.7	23.2
K	CALL	CALL	CALL	44.9	31.9	24.2	17.8	15.3	14.4	13.3	12.2	11.4	10.8
Q	CALL	46	CALL	29.1	24.3	16.2	13	10.6	10	8.9	8.5	7.8	7.2
J	CALL	27.4	19.9	CALL	18.4	13.5	10.7	8.8	7.1	6.9	6.2	5.8	5.6
T	CALL	24.1	15.6	13.2	CALL	11.6	9.3	7.4	6.3	5.2	5.2	4.8	4.5
9	39.7	17.5	11.8	9.9	8.5	CALL	8.3	7	5.8	5	4.3	4.1	3.9
8	34.5	14.1	8.8	7.7	6.7	6.1	CALL	6.5	5.6	4.8	4.1	3.6	3.5
7	29.2	12.5	8	6.4	5.5	5	4.7	CALL	5.4	4.8	4.1	3.6	3.3
6	21.9	11.1	7.4	5.4	4.7	4.2	4.1	4	CALL	4.9	4.3	3.8	3.3
5	20.9	10.3	6.8	5.1	4	3.7	3.6	3.6	3.7	CALL	4.6	4	3.6
4	18.6	9.2	6.3	4.8	3.8	3.3	3.2	3.2	3.3	3.5	CALL	3.8	3.4
3	16.8	8.8	5.9	4.5	3.6	3.1	2.9	2.9	3	3.1	3	CALL	3.3
2	16	8.3	5.6	4.2	3.5	3	2.8	2.6	2.7	2.8	2.7	2.6	CALL

Практическое применение и комментарии

За покерным столом мы редко встретим ситуации, соответствующие рассмотренным выше экстремальным примерам. Скажем, мы никогда и не подумаем играть в «Пуш или Фолд» со стэками по 500 блайндов. Однако как мы уже доказали, при бесконечно больших стэках имеет смысл разыгрывать лишь очень узкий диапазон, и наоборот. При этом с уменьшением размера стэка, диапазоны игроков расширяются достаточно плавно.

Теперь давайте обратимся к примеру 12.2, где худшей руке причиталась треть банка. Здесь при стэках в 10 единиц игроку Y необходимо было идти в олл-ин с $90/169$ (53.2%) всех рук, а его оппонент должен был уравнивать $9/26$ (34.6%) раз. В то же время в нашем примере с безлимитным Холдемом при стэках в 10 единиц игроку Y следует делать пуш с $774/1326$ (58.3%) рук, а игроку X - колл с $494/1326$ (37.3%). Как видите, эти результаты мало чем отличаются. Более того, более агрессивные стратегии в Холдеме являются следствием еще более незначительной разницы в эквити между лучшей и худшей рукой.

Интересно, что в большинстве случаев в диапазоне пуша предпочтение отдается рукам, имеющим наибольшее эквити против случайной руки (например, старшие карманные пары являются частью оптимальной стратегии даже при очень больших стэках). Однако чем меньше размер эффективного стэка, тем чаще мы будем вынуждены ставить олл-ин даже со стартерами, проигрывающими случайной руке. Например, при стэках менее 36 единиц, в диапазоне пуша оказывается 97s, при том, что она не является фаворитом против любых двух. Но в этом случае игроку Y важно лишь эквити, которое его рука имеет против диапазона колла, а не против случайной руки. И как раз средние одномастные коннекторы весьма неплохо стоят против карт, которые составляют основу диапазона игрока X (старших пар и тузов). Кроме того, таблица пуша подчеркивает важность одномастных рук - те 2.5% преимущества в эквити, которые имеют одномастные стартеры, ставят их значительно выше разномастных аналогов.

Внимательный читатель может спросить: «Зачем мне эти таблицы? Я никогда не окажусь в играх, где можно только скидывать карты или идти в олл-ин». Однако мы готовы утверждать, что игра в пуш или фолд при маленьких стэках будет оптимальной стратегией (или, по крайней мере, близкой к ней) для хэдс-апа в безлимитный Холдем. С учетом того, что в SNG-турнирах, саттелитах, а также в поздних стадиях МТТ такие ситуации встречаются более чем часто, знание приведенных выше таблиц является обязательным для любого серьезного игрока. Давайте рассмотрим ситуации, где таблицы пуша и фолда могут найти свое применение.

Для начала введем следующие допущения:

- В целях сокрытия информации, нам необходимо играть все руки в одинаковой манере, будь то небольшие рейзы, лимпы или фолды
- Диапазон, разыгрываемый на баттоне, всегда будет сильнее диапазона игрока на большом блайнде (состоящего из двух случайных карт). Поэтому для игрока на баттоне рейз будет более выгодным действием, чем лимп

Примечание от переводчика: Имеется ввиду, что если игрок на баттоне делает рейз, то до того, как большой блайнд сказал свое слово, его диапазон состоит из двух случайных карт. И поскольку диапазон баттона никаким образом не может оказаться слабее, то он получает преимущество в силе руки, а также позицию.

Пусть J - некая стратегия «Пуш или Фолд» для игрока Y (баттона). Тогда игрок X может максимизировать свое ожидание против J , играя по той же самой стратегии. Теперь возьмем альтернативную стратегию, J_1 , по которой игрок на баттоне делает рейз с каким-то определенным диапазоном до 2 единиц (блайндов).

Давайте предположим, что игрок X отвечает на это некой стратегией J_2 (далекой от оптимальной):

- Он делает пуш со всеми руками, с которым бы уравнивал олл-ин сам
- Он скидывает все руки, которые бы скинул на пуш

Против J_2 , стратегия J_1 окажется сильнее стратегии J , поскольку в таком случае игрок Y рискует лишь 1.5 блайндами (а не всем стэком) и получает ровно то же количество фолдов от своего оппонента. Более того, он может даже скинуть некоторые свои руки, если ему будет не хватать эквити для колла олл-ина.

Однако при очень мелких стэках это, естественно, никогда не произойдет. К примеру, с эффективным стэком в 4 блайнда, игрок X поставит олл-ин в ответ на минирейз с 115 из 169 рук (63%). И если его оппонент пушит настолько широко, то у игрока Y явно есть достаточные шансы банка на колла даже с 32о. Так что при таком стэке рейз до двух блайндов равносителен олл-ину (диапазон для рейза будет таким же, как диапазон пуша в стратегии J).

Однако рейз на префлопе дает игроку X новую стратегическую возможность - колла. Как мы уже знаем, стратегические возможности обладают неотрицательной ценностью, так что со стэком в 4 единицы игроку Y следует придерживаться стратегии «Пуш или Фолд».

С другой стороны, когда стэки в раздаче составляют 100 блайндов, игроку Y всегда следует делать небольшие рейзы на префлопе. Ведь его оппонент (если он играет по стратегии J_2) будет ставить олл-ины только с очень сильными руками. Между этими крайними случаями существует некий порог, где игроку Y имеет смысл перейти на стратегию минирейза на префлопе, однако при менее глубоких

стэках стратегия «Пуш или Фолд» фактически будет являться оптимальной.

Вернемся к вопросу об использовании стратегии «Пуш или Фолд» и выведем размер стэка, при котором мы можем начать делать небольшие рейзы с руками, не входящими в диапазон пуша. Фактически, нам нужно найти такой размер стэка для заданной руки, где ожидание от олл-ина будет равно ожиданию от минирейза и фолда на пуш игрока X (следующего стратегии J_2)

При стэках в 8 блайндов, диапазон олл-ина игрока X (по стратегии J_2) составит $602/1326$, или 45.4% всех рук.

С другой стороны, если мы посмотрим на стратегию пуша игрока Y, то худшей комбинацией окажется Q4o. Так что, скажем, Q3o, уже не будет входить в этот диапазон.

Тогда пусть он ставит олл-ин на префлопе с Q3o при стэках в 8 блайндов. Против диапазона колла игрока X эта рука имеет 34.8% на победу. Тогда ожидание от пуша с Q3o составит (для игрока Y):

$$\begin{aligned} \langle \text{Пуш, Q3} \rangle &= p(\text{игрок X скидывает}) (\text{блайнд}) + p(\text{игрок X уравнивает}) \\ &\quad p(\text{игрок Y выигрывает}) (\text{стэк игрока X}) \\ &\quad + p(\text{игрок X уравнивает}) (p(\text{игрок X проигрывает}) (\text{стэк игрока Y})) \end{aligned}$$

$$\langle \text{Пуш, Q3} \rangle = (0.546) (+1) + (0.454) (0.348) (+8) + (0.454) (0.652) (-8)$$

$$\langle \text{Пуш, Q3} \rangle = -0.558 \text{ блайнда}$$

Получили вполне предсказуемый ответ. Ожидание от фолда составляет -0.5 блайнда, так что Q3o действительно находится прямо под точкой безразличия для игрока Y при заданных стэках.

С другой стороны, ожидание от минирейза с Q3o (без учета блокеров) равно:

$$\begin{aligned} \langle \text{Минирейз, Q3} \rangle &= p(\text{игрок X ставит олл-ин}) (\text{цена фолда}) + \\ &\quad + p(\text{игрок X скидывает}) (\text{блайнд}) \end{aligned}$$

$$\langle \text{Минирейз, Q3} \rangle = (0.454) (-2) + (0.546) (+1)$$

$$\langle \text{Минирейз, Q3} \rangle = -0.638$$

Фактически здесь можно говорить о том, что при стэках примерно по 8 блайндов игроку Y все равно, что делать: ставить олл-ин или делать минирейз и скидывать все руки, которые не входят в диапазон пуша. И хотя порог в 8 блайндов может служить неплохой отправной точкой для дальнейших рассуждений, в наших расчетах присутствует большое допущение, которое никак нельзя проигнорировать. Дело в том, что игрок X абсолютно не обязан играть по стратегии J_2 !

Поскольку он может просто уравнивать минирейз, имея шансы банка 3 к 1, ожидание от такой линии для игрока Y сразу уменьшится. Так что мы смело можем добавить к пороговому значению еще пару блайндов. На наш взгляд, в хэдс-апе оптимальной стратегией скорее всего будет «Пуш или Фолд» при стэках менее 10 блайндов (в отдельных случаях - менее 12-13, если мы можем оказаться без позиции на постфлопе).

Теперь мы можем ответить который поставили в самом начале этой главы.

Безлимитный холдем, два игрока, по правилам баттон должен либо поставить олл-ин, либо скинуть свои карты. В стеке каждого из них находится по 16 фишек, блайнды составляют 1 фишку на баттоне и 2 на большом блайнде. С какой долей стартовых рук игрок на баттоне должен ставить олл-ин, если он играет оптимально?

Из таблиц ясно, что диапазон пуша должен составлять примерно 61.7% от всех рук. Многим может показаться, что это в корне неверно - действительно, зачем так часто рисковать шестнадцатью фишками, чтобы выиграть всего три? Все дело в эквити!

Найденные в этой главе стратегии могут пригодиться вам при игре в турнирах, а также в ситуациях блайнд против блайнда (если у вас или вашего оппонента короткий стэк). Кроме того, «Пуш или Фолд» хорошо показывает насколько сильным действием можем оказаться олл-ин на префлопе. Даже при значительных стэках слабый игрок может легко нивелировать преимущество своего более опытного оппонента, при этом почти не теряя в математическом ожидании.

Нужно запомнить

- В игре «Пуш или Фолд», где лучшая рука выиграет весь банк, оптимальная стратегия окажется достаточно тайтовой, причем преимущество практически при любом размера стэков будет и коллера (игрока X).
- Когда худшая рука обладает значительным эквити, оптимальная стратегия становится значительно более лузовой.
- Оптимальная стратегия для игры «Пуш или Фолд» в безлимитном Холдеме включает в себя диапазоны гораздо слабее, чем многие могут себе представить.
- Когда мы составляем диапазон для пуша, наш выбор будет зависеть исключительно от эквити конкретных рук против диапазона колла оппонента.
- Игра по стратегии «Пуш или Фолд» будет как минимум близкой к оптимальной при стэках до 10-11 блайндов.

Глава 13

Элементарный покер: Игра АКQ

Продолжаем изучение теории игр в покере. В этой главе мы рассмотрим, возможно, простейшую форму симметричного нетривиального покера. Впервые эта идея была представлена в статье Майка Каро для журнала Card Player. По всей видимости, он придумал такую игру, чтобы на наглядном примере изучить правильные соотношения ставок и блефов. К чести автора, она весьма неплохо справляется с этой задачей. Мы же, в свою очередь, вышли за рамки Лимитного покера, для которого изначально рассматривалась АКQ, и сделали несколько интересных открытий о Безлимитных играх. Однако для начала давайте рассмотрим игру в АКQ на половине улицы с ограничением по ставкам.

Перечислим основные характеристики этой игры:

- В колоде находятся всего три карты: А (туз), К (король), Q (дама).
- Каждому игроку раздается одна карта, без возможности обмена; оба игрока ставят обязательное анте.
- Затем следует один раунд ставок, после которого карты вскрываются (если никто из игроков не выбросил свою руку в пас). На вскрытии побеждает старшая карта.

Колода из трех карт заставляет задуматься о теме, которую мы ранее не рассматривали - *исключение карт*. В $[0,1]$ игре у обоих участников были симметричные диапазоны, а рука одного игрока не влияла на руку его оппонента. Однако в этой игре, если у вас туз, то у оппонента могут оказаться только король или дама. Или если у вас дама, то у оппонента с равной вероятностью может оказаться король или туз.

Пример 13.1 - игра АКQ #1

- Игра на половине улицы.
- Размер банка равен двум единицам.
- Ограничение на размер ставки - одна единица.

Вот как для данной игры выглядит платежная матрица для экс-шоудауна (для игрока Y):

	Игрок Y	Туз		Король		Дама	
Игрок X		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Туз	Колл			-1	0	-1	0
	Фолд			+2	0	+2	0
Король	Колл	+1	0			-1	0
	Фолд	0	0			+2	0
Дама	Колл	+1	0	+1	0		
	Фолд	0	0	0	0		

Наша задача - найти оптимальные стратегии для этой игры. Мы сразу же можем упростить эту игру, исключив доминируемые стратегии. Сравнивая ситуации, когда у игрока X оказывается туз, легко увидеть, что колл всегда обладает равным или более высоким математическим ожиданием, чем фолд. Таким образом, стратегия фолда с тузом будет доминироваться стратегией колла. В результате мы можем исключить фолд с тузом из возможных стратегий для игрока X. Кроме того, можно заметить, что стратегия колла с дамой доминируется стратегией фолда. Так что мы можем исключить из возможных вариантов и колл с дамой. Теперь платежная матрица приняла вид:

	Игрок Y	Туз		Король		Дама	
Игрок X		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Туз	Колл			-1	0	-1	0
Король	Колл	+1	0			-1	0
	Фолд	0	0			+2	0
Дама	Фолд	0	0	0	0		

Перейдем к доминируемым стратегиям для игрока Y. Как видно из таблицы выше, ставка с королем доминируется стратегией чека. Точно также мы можем сразу отбросить и чек с тузом. Таким образом, мы еще больше упростили первоначальную матрицу:

	Игрок Y	Туз	Дама	
Игрок X		Бет	Бет	Чек
Туз	Колл		-1	0
Король	Колл	+1	-1	0
	Фолд	0	+2	0

Теперь давайте прервемся и еще раз посмотрим, как мы пришли к такому результату. Сначала мы разобрали стратегии для игрока X и нашли две ситуации, которые были как минимум не хуже своих противоположностей: колл с тузами и фолд с дамами. Надеюсь, что такой вывод достаточно очевиден - мы никогда не скидываем сильнейшую руку на ривере, и не отвечаем на ставку с абсолютно безнадёжной рукой. Поскольку игрок X, будучи в здравом уме, тоже никогда бы не стал действовать в таком ключе, мы можем смело исключить эти стратегии из платежной матрицы.

Далее, мы взяли полученную матрицу и схожим образом оценили варианты для игрока Y. Если у него есть король, то он знает, что блеф против туза никогда не сработает, а дама у его оппонента никогда не сделает колл. В то же время, поставив с тузом, он точно никогда не проиграет, плюс он может получить колл от короля.

Исключив доминируемые стратегии, мы остаемся с куда более простой игрой. В сущности, со стратегической точки зрения это игра с матрицей 2x2 - мы уже разбирали ее аналоги в главе 11. Как и тогда, мы снова сталкиваемся с циклическими чистыми стратегиями.

Если игрок X всегда делает колл с королями, то лучшим вариантом для игрока Y будет полный отказ от блефов в пользу вэлью бетов. В свою очередь, в ответ на такую стратегию игрок X начнет сбрасывать всех своих королей. Затем игрок Y сможет воспользоваться этим, начав блефовать в каждой возможной ситуации. А игроку X ничего не останется кроме как вернуться к своей первоначальной стратегии колла со всеми королями. Это явно свидетельствует о том, что равновесие для рассматриваемых стратегий существует лишь в неких смешанных стратегиях.

Мы можем сформировать матрицу 2x2, определив математическое ожидание для недоминируемых стратегий при их перекрестном использовании.

Здесь два недоминируемых стратегических выбора - это должен ли игрок Y блефовать с дамами, а также стоит ли игроку X делать колл с королями.

Мы сможем найти ожидание игрока Y для каждого из случаев, если рассмотрим все руки, которые могут у него оказаться, а также все возможные исходы таких

игр.

Определим четыре стратегических возможности:

- Y_1 : Y блефует с дамами
- Y_2 : Y делает чек с дамами
- X_1 : X делает колл с королями
- X_2 : X сбрасывает королей.

Мы можем найти математическое ожидание каждой из этих пар:

Y_1 против X_1 :

Когда у игрока Y есть туз, он выигрывает ставку против королей игрока X, но ничего не получает от дам. Однако если у игрока Y на руках оказывается король, он не сделает ставку, а это значит, что в такой игре ставок не будет вообще. Когда же игрок Y получает даму, он блефует и проигрывает одну ставку королям или тузам игрока X.

Каждое из описанных событий происходит с вероятностью $1/6$; игрок Y выигрывает ставку лишь один раз, но проигрывает дважды. Таким образом:

$$\langle Y_1, X_1 \rangle = -1/6$$

Y_2 против X_2 :

Когда у игрока Y есть туз, он выигрывает ставку против королей игрока X и ничего не получает от дам. Однако если у игрока Y на руках оказывается король, он не сделает ставку, а это значит, что в такой игре ставок не будет вообще. То же самое здесь относится и к случаю, когда игрок Y получает даму.

Игрок Y выиграет один раз, при этом ни разу не проиграв:

$$\langle Y_2, X_1 \rangle = +1/6$$

Y_1 против X_2 :

Когда у игрока Y есть туз, он никогда не выигрывает ставку у игрока X (он всегда скидывает свою карту в пас). Если игрок Y получает короля, он делает чек. Однако как только у игрока Y на руках оказывается дама, он блефует и выигрывает банк (две ставки) у короля, но проигрывает одну ставку, если у его оппонента есть туз.

Игрок Y выигрывает две ставки, проигрывает одну:

$$\langle Y_1, X_2 \rangle = +1/6$$

Y₂ против. X₂:

Когда у игрока Y есть туз, он никогда не выигрывает ставку у игрока X (он всегда скидывает свою карту в пас). Если игрок Y получает короля, он делает чек. То же самое относится и к ситуации, когда у него оказывается дама. Таким образом, ни один из участников раздачи не выигрывает, но и не проигрывает:

$$\langle Y_2, X_2 \rangle = 0$$

В результате у нас образуется следующая матрица 2x2:

	Y ставит с дамами	Y делает чек с дамами
X делает колл с королями	- 1/6	+ 1/6
X скидывает королей	+ 1/6	0

Умножение всех элементов платежной матрицы на положительную константу не изменит игру. Умножение на -1 просто поменяет местами выплаты между двумя игроками.

Если мы умножим матрицу игры AKQ #1 на -6, то получим:

	Y ставит с дамами	Y делает чек с дамами
X делает колл с королями	+1	-1
X скидывает королей	-1	0

Эта матрица должна быть знакома читателю по главе 10. Там она была обозначена как платежная матрица для «Полицейских и грабителей».

	Грабитель грабит	Грабитель остается дома
Полицейский патрулирует	+1	-1
Полицейский не патрулирует	-1	0

Таким образом, наша игра идентична «Полицейским и грабителям». Из анализа той игры мы знаем, что оптимальными стратегиями для участников являются $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{3}$. Ниже мы сможем сравнить этот результат с тем, который мы получим после вычислений.

Мы можем решить эту игру, найдя для каждого из игроков такую стратегию, при которой его оппонент станет безразличным к выбору одной из стратегических возможностей. Рассмотрим случай игрока Y, который должен решить, блефовать

с дамой или нет. Его экс-шоудаун вэлью для двух действий, которые он может предпринять с дамой, будет следующим (здесь переменная «с» обозначает частоту колла с королем для игрока X):

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = (\text{проигрывает тузам}) + (\text{проигрывает королям}) + \\ + (\text{короли делают фолд, он выигрывает банк})$$

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = p(y \text{ X есть туз}) (\text{проигрывает одну ставку}) + \\ + p(y \text{ X есть король}) p(X \text{ делает колл}) (\text{проигрывает одну ставку}) + p(y \text{ X есть король}) p(X \text{ делает фолд}) (\text{банк})$$

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = (1/2)(-1) + (1/2)(c)(-1) + (1/2)(1 - c)(2)$$

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = 1/2(-1) + 1/2[c(-1) + (1 - c)(2)]$$

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = -1/2 - 1/2 c + 1 - c$$

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = 1/2 - 3/2 c$$

$$\langle Y, \text{чек} \rangle = 0$$

Составим из полученных выражений уравнение:

$$1/2 - 3/2 c = 0$$

$$c = 1/3$$

Далее, определим частоту блефов с дамой от игрока Y, при которой игроку X будет все равно, делать колл с королями или нет. Здесь переменная «b» означает частоту, с которой игрок Y блефует с дамами.

$$\langle X, \text{колл} \rangle = (\text{проигрывает тузам}) + (\text{выигрывает у дам})$$

$$\langle X, \text{колл} \rangle = 1/2(-1) + 1/2[b(1)]$$

$$\langle X, \text{колл} \rangle = -1/2 + 1/2 b$$

$$\langle X, \text{фолд} \rangle = 1/2(b)(-2)$$

$$\langle X, \text{фолд} \rangle = -b$$

$$-1/2 + 1/2 b = -b$$

$$b = 1/3$$

Таким образом, мы получили пару оптимальных стратегий: игрок X должен отвечать в $1/3$ всех случаев, когда у него оказывается король, а игрок Y должен блефовать в $1/3$ случаев, когда у него на руках дамы.

Давайте снова немного отвлечемся и постараемся осмыслить полученный результат. Главная идея для игрока Y заключается в том, чтобы получить вэлью

со своей совокупностью рук. Говоря об эксплуатации, если бы игрок Y знал, как его оппонент поведет себя с королями, то он бы смог каждый раз делать правильный выбор между блефами и вэлью бетам. Однако давайте считать, что он этого не знает, и просто хочет получать максимальную выгоду вне зависимости от действий своего оппонента.

В этом случае у него есть два источника вэлью: украденные банки с дамами и выигранные ставки с тузами. Таким образом, в идеале игрок Y хотел бы сделать так, что прибыль от каждой из этих стратегий была равнозначной. И тогда игрок X не сможет его эксплуатировать. Для этого ему нужно блефовать с такой частотой, чтобы вэлью всей его стратегии не менялось вне зависимости от действий оппонента; в частности, оно не должно зависеть от того, делает оппонент колл с королями или нет. Как оказалось, в этом случае, правильное соотношение вэлью бетов с тузами к блефам с дамами составляет 3 к 1. Иными словами, игрок Y должен делать бет с $\frac{1}{3}$ своих дам, поскольку с тузами ставку он сделает всегда. Вспомним главу 11, где мы обозначили это соотношение блефов к ставкам на вэлью как «а», и показали, что оно равно « $1/(P+1)$ » (см. формулу 11.1). Для банка размером в две ставки мы действительно получим соотношение $\frac{1}{3}$.

Примечание переводчика: Здесь может показаться, что автор подменил понятие «частота блефа с дамами» на «соотношение блефов и вэлью бетов», однако это не так. Дело в том, что из-за специфики игры значения этих показателей действительно равны одной трети. Так, мы уже посчитали, почему игрок Y должен ставить со своими дамами $\frac{1}{3}$ раз. Если же посмотреть на соотношение блефов и вэлью бетов, то становится очевидным следующее: вероятность получить туза и даму абсолютно одинакова, и это единственные руки, с которыми мы будем ставить. Значит, если мы рассмотрим, например, шесть событий, в которых мы можем делать вэлью бет, то в трех из них у нас будут дамы, в трех - тузы. С тузами мы сделаем бет все три раза, а с дамами - всего один. Таким образом, соотношение блефов и вэлью бетов окажется 1 к 3.

Та же логика применима и для игрока X. Он хочет отвечать на ставку с такой частотой, чтобы его оппоненту не было разницы, блефовать с дамами или нет. Когда блеф игрока Y срабатывает, он получает две ставки, когда нет - он теряет всего одну. Таким образом, для достижения своей цели X обязан делать колл в два раза чаще, чем фолд. В этом случае правильно соотношение составляет $\frac{2}{3}$ (остальные $\frac{1}{3}$ рук сбрасываются). Однако в половине случаев, когда оппонент блефует, у игрока X будет туз. То есть ему нужно отвечать с дополнительной частью своих рук, равной $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{6}$. Поскольку короли составляют $\frac{1}{2}$ его рук, когда у оппонента дама, то ему нужно отвечать с $\frac{2}{6}$ (или $\frac{1}{3}$) своих королей. Снова обращаемся к главе 11, где мы доказали, что игрок X должен делать фолд «а» раз с руками, которые могут побить блеф. Как не сложно

догадаться, здесь он сбрасывает именно $\frac{1}{3}$ всех рук, способных побить блеф.

Очевидно, что игрок Y имеет положительное ожидание (или, как мы уже говорили в главе 11, положительное вэлью) в этой игре - он может сделать как чек (и получить нулевое вэлью), так и бет (и получить некое вэлью). Посчитаем общее вэлью от такой игры для игрока Y . Для этого нужно рассмотреть возможные стратегии и результаты для этого игрока. Конечно, мы могли бы рассчитать ожидание от каждого действия, однако есть куда более простой метод. Как мы уже показали выше, если каждый из игроков придерживается оптимальной стратегии, то игрок X безразличен к коллу - иными словами, для него между коллом и фолдом нет никакой разницы. Так что мы можем представить, что он всегда будет скидывать свои карты. Конечно, если бы игрок X на самом деле придерживался такой стратегии, его оппонент смог бы этим воспользоваться. Однако поскольку мы считаем цену игры, а не ищем оптимальную стратегию, мы можем просто сказать, что стратегия игрока Y останется неизменной.

Цена игры составит $\frac{1}{18}$ ставки (для игрока Y). Мы призываем читателя проверить этот результат для всех возможных стратегий игрока X , если он делает колл с королями.

Таким образом, мы решили эту игру на половине улицы и нашли оптимальные стратегии для размера банка в две ставки. Однако мы можем использовать те же самые методы, чтобы решить такую игру для произвольного размера банка.

Давайте немного скорректируем условия - теперь размер банка в игре составляет P единиц. Полученная игра будет ничем не сложнее уже рассмотренной нами выше.

Пример 13.2 - игра АКQ #2

- Игра на половине улицы.
- Размер банка равен P единицам.
- Ограничение на размер ставки - одна единица.

Как и в прошлый раз, мы можем составить полную платежную матрицу для такой игры:

	Игрок Y	Туз		Король		Дама	
		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Игрок X	Туз			-1	0	-1	0
	Фолд			+P	0	+P	0
Король	Колл	+1	0			-1	0
	Фолд	0	0			+P	0
Дама	Колл	+1	0	+1	0		
	Фолд	0	0	0	0		

Эта матрица может быть сокращена путем исключения доминируемых стратегий (как и в игре AKQ #1, пример 13.1):

Игрок X	Игрок Y	Туз	Дама	
		Бет	Бет	Чек
Туз	Колл		-1	0
Король	Колл	+1	-1	0
	Фолд	0	+P	0

Две формулы безразличия, в этом случае, будут выглядеть так (здесь «b» выражает частоту, с которой игрок Y блефует с дамами, а «с» - как часто игрок X делает колл с королями):

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = (\text{проигрывает тузам}) + (\text{проигрывает королям}) + (\text{короли делают фолд, он выигрывает банк})$$

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)(c)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)(1-c)(P)$$

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}[c(-1) + (1-c)(P)]$$

$$\langle Y, \text{блеф} \rangle = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Pc$$

$$\langle Y, \text{чек} \rangle = 0$$

Приравняем эти два выражения, получим:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Pc = 0$$

$$1 + c - P + Pc = 0$$

$$(P+1)c = P-1$$

$$c = (P-1)/(P+1)$$

Полученное выражение для «с» и является частотой колла с королями для игрока X. Когда же у игрока Y оказывается дама, у его оппонента в половине случаев окажется туз, а еще в половине - король. Поэтому общая доля рук (тузов и королей), с которыми он будет делать колл, составляет $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})(P-1)/(P+1)$. Это, в свою очередь, означает, что он должен делать фолд $1/(P+1)$ раз (чтобы игрок Y был безразличен к блефу), что в точности равно уже известной нам константе «α».

Далее найдем частоту блефа с дамами для игрока Y:

$$\langle X, \text{колл} \rangle = (\text{проигрывает тузам}) + (\text{выигрывает у дам})$$

$$\langle X, \text{колл} \rangle = \frac{1}{2} (-1) + \frac{1}{2} [b(1)]$$

$$\langle X, \text{колл} \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} b$$

$$\langle X, \text{фолд} \rangle = \frac{1}{2} (b)(-P)$$

Составим новое уравнение:

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} (b)(-P)$$

$$-1 + b = -bP$$

$$b(1+P) = 1$$

$$b = 1/(1+P)$$

$$b = \alpha$$

И вновь мы пришли к выводу, что отношение блефов к ставкам на вэлью должно быть равно «α».

Теперь мы можем рассчитать цену игры:

Руки игроков	Выгода для игрока Y	p(раздачи)	Взвешенное вэлью
(A, K)	0	$\frac{1}{6}$	0
(A, Q)	$-1/(P+1)$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}(P+1)$
(K, A)	0	$\frac{1}{6}$	0
(K, Q)	$+P/(P+1)$	$\frac{1}{6}$	$P/6(P+1)$
(Q, A)	0	$\frac{1}{6}$	0
(Q, K)	0	$\frac{1}{6}$	0
Сумма			$(P-1)/6(P+1)$

Таким образом, цена игры для игрока Y составляет $(P-1)/6(P+1)$. С увеличением

размера банка, цена игры приближается к $\frac{1}{6}$. Если банк будет очень большим, то игрок X просто станет отвечать со всеми своими королями, а игрок Y практически перестанет блефовать. В этой ситуации игрок Y получит ставку только если у него окажется туз, а у его оппонента - король. Вероятность такой раздачи составляет $\frac{1}{6}$.

В завершение стоит сделать одну ремарку - решение, приведенное выше, действительно только для банков размером больше 1. Причина заключается в том, что когда банк меньше 1, игрок Y всегда теряет деньги, блефуя с дамами - в этом случае игрок X просто будет делать колл с тузами, которые составляют половину его рук. Даже если игрок X будет скидывать всех своих королей и отдавать банк своему оппоненту, этого все равно будет недостаточно, что компенсировать потерю одной ставки при маленьком банке. Чем ближе размер банка к единице, тем больше становится соотношение «а». При банке в 2 единицы оно равно $\frac{1}{3}$, при банке в 1.5 - $\frac{2}{5}$, при 1.1 - $\frac{10}{21}$, и когда банк становится равным 1 единице, игрок Y перестает блефовать.

Мы можем проследить изменение цены игры на графике. Обратите внимание то, что происходит с линиями при $P = 1$: игрок Y переходит от полного отсутствия блефов к блефу с половиной своих рук. Причиной этому является тот факт, что колл превращается в смешанную стратегию, также как и блеф. Если банк меньше единицы, ни один игрок не будет ни блефовать, ни отвечать на ставки, однако такую стратегию невозможно эксплуатировать из-за частоты, с которой туз оказывается в диапазоне каждого игрока. Также вы можете заметить, что при больших размерах банка игрок X должен часто отвечать на ставку, в то время как игрок Y должен редко блефовать. Таким образом, увеличение размера банка выгодно игроку Y.

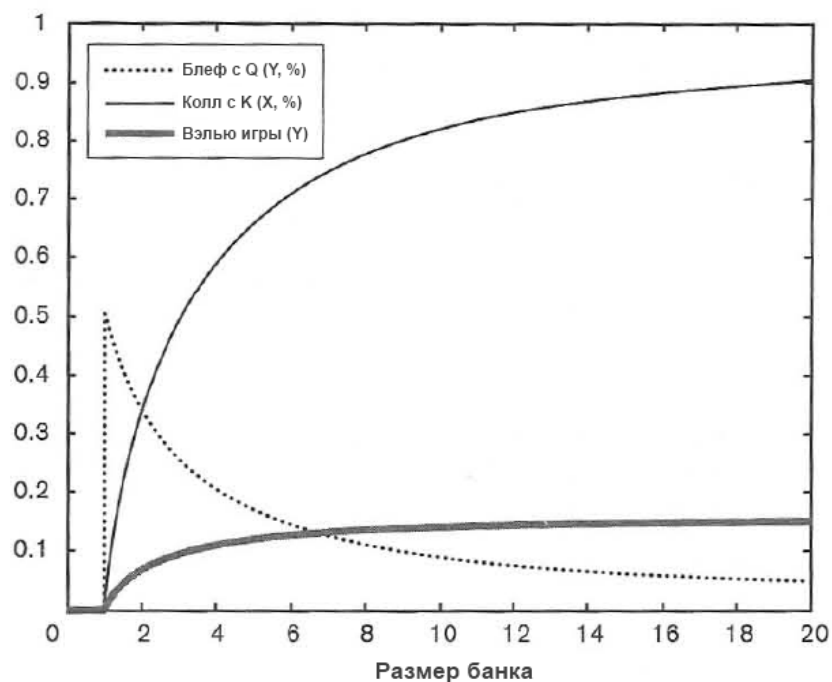


График 13.1. Оптимальные стратегии для лимитной игры АКQ

Какой вывод стоит сделать из этой главы? Изменение размера банка влияет на стратегии игроков и их ожидание. Также важно понять, что решение игр с банком произвольных размеров зачастую оказывается ничем не сложнее решения для банков фиксированного размера. В дальнейшем мы не станем искать решения для игр с определенным банком (если только этого не требует тема нашего обсуждения), и просто будем считать, что в каждой игре есть некий банк P .

Нужно запомнить

- Соотношения ставок на вэлью и блефов - это ключ к оптимальной игре, когда у обоих игроков есть руки с четко определенной силой (натсы, средние руки, воздух).
- В Лимитном покере практически никогда нельзя ставить на ривере руки, которые могут побить только блеф или получить колл от более сильной комбинации.
- Исключение карт может оказывать существенное влияние на диапазон оппонента.

Глава 14

Хватит гадать: Размеры ставок в безлимитном покере

Бетсайзинг - достаточно важная часть игры в безлимитный Холдем, однако по какой-то причине почти все авторы книг и статей по покеру обделяют ее своим вниманием. При этом диапазон рекомендаций, если они встречаются, максимально широк - от минибетов до овербетов. В подавляющем большинстве случаев такие советы основаны лишь на личном опыте, а математическое обоснование остается в стороне. В этой главе мы постараемся показать полезные алгоритмы, которые помогут вам лучше ориентироваться в размерах своих ставок.

Для начала, давайте рассмотрим игру на половине улицы против ясновидящего (ставки без ограничений). В прошлый раз, как вы можете помнить, мы анализировали лимитный вариант такой игры - в ней ясновидящий оппонент ставил со всеми сильными руками и небольшим количеством блефов, причем в пропорции, которая делала другого игрока безразличным к выбору действия. Однако в безлимитных играх мы можем делать ставки произвольного размера.

Пример 14.1 - Игра на половине улицы с ясновидящим

- Игра на половине улицы
- Размер банка составляет 1 единицу
- Ставки без ограничений по размеру (стэки бесконечного размера)
- Игрок Y - ясновидящий, и его рука случайным образом выбирается из диапазона, где половина рук являются блефами, а половина натсами.

Примечание: в лимитной версии этой игры мы использовали несколько иную систему обозначений. Так, банк был равен P единицами, а ставка составляла 1 единицу. Здесь же, поскольку мы можем поставить произвольное количество денег, мы будем считать, что банк равен 1 единице, а ставка - некоему «s» (которое привязано к размеру банка).

Давайте разберемся, как будет протекать игра. После того, как игрок X делает чек, игрок Y поставит все свои натсы, а также будет защищать эту часть своего диапазона с некоторым количеством блефов таким образом, чтобы его оппонент был безразличен к коллу. При этом игрок Y выберет размер ставки s и будет его использовать для всех своих рук. Если же ставки будут разного размера, то чтобы такая стратегия считалась оптимальной, ожидание от всех ставок против идеального оппонента должно быть одинаковым.

Зададим функцию $f(s)$, которая будет выражать ожидание игрока Y для различных размеров ставок. Нам необходимо найти точку, в которой функция достигает максимума - это и будет его оптимальным бетсайзингом (и решением игры по совместительству). Если игрок Y ставит на вэлью и блефует в оптимальном

соотношении, то игроку X нет разницы, что делать: уравнивать или падать. Так что для упрощения расчетов мы можем считать, что игрок X уравнивает каждый раз (при условии, что стратегия игрока Y от этого никак не меняется). Мы еще не раз обратимся к такому приему, когда будем изучать $[0,1]$ игры в следующих главах.

В главе 11 мы нашли, что отношение блефов к ставкам на вэлью для игрока Y будет равно α , а игрок X должен скидывать α от всех своих рук, способных побить блеф. Для безлимитных игр (формула 11.2):

$$\alpha = s / (1 + s)$$

Для каждого размера ставки s игрок Y будет блефовать с $s/(1 + s)$ от своих натсов. Пусть y - доля натсов в его диапазоне, тогда (из главы 11, см. объяснение после формулы 11.3):

$$f(s) = (\text{частота вэлью бета}) (\text{размер ставки}) (\text{частота колла})$$

$$f(s) = (y)(s) (1 / (1 + s))$$

$$f(s) = ys / (1 + s)$$

Однако полученная нами функция не имеет локальных минимумов или максимумов:

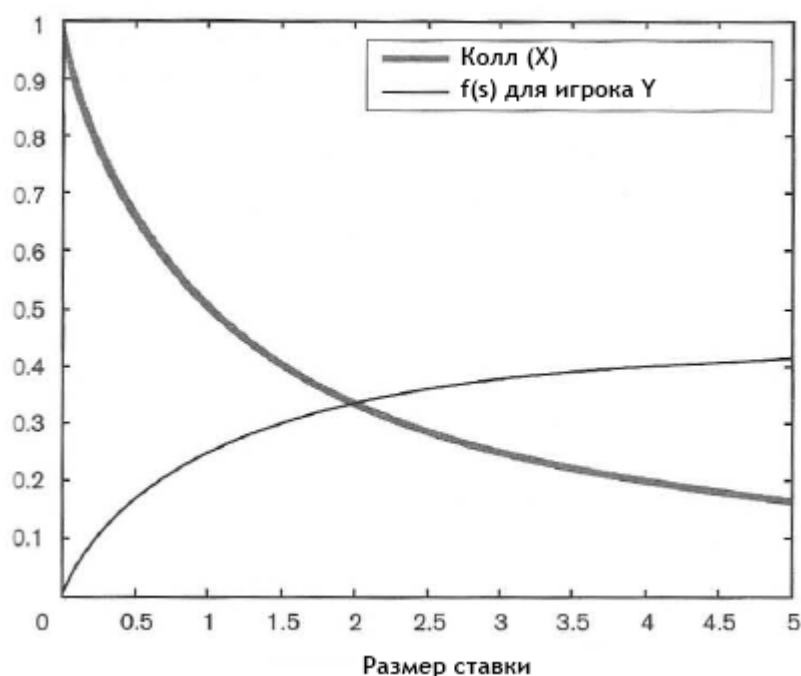


Рисунок 14.1. Игра против ясновидящего, $y = 0.5$

Примечание от переводчика: Линия на графика «Колл (X)» описывается коэффициентом α .

Более того, эта функция бесконечно возрастает, так что игрок Y может максимизировать свое ожидание, поставив весь стэк (и при этом блефуя соответствующее количество раз).

По условиям игры диапазон игрока Y состоит из 50% натсов и 50% блефов. Но пусть теперь у равен $\frac{3}{5}$, то есть $\frac{3}{5}$ его диапазона окажутся натсами, а $\frac{2}{5}$ блефами. При этом стэки в раздаче в пять раз больше банка. Игрок Y идет в олл-ин. Как должен ответить его оппонент? А если игрок Y сделает ставку размером в банк ($s = 1$)?

Что касается ответа на первый вопрос, то здесь все, кажется, просто - игрок X должен скинуть $\alpha = 5/(1 + 5) = \frac{5}{6}$ своих рук, и уравнивать со всеми остальными. Таким образом, он сделает своего оппонента безразличным к блефу.

Теперь давайте разберемся, почему это совсем не так.

- Игрок Y: Ставит 5 единиц со всеми натсами и блефами.
- Игрок X: Уравнивает с $\frac{1}{6}$ частью своих рук.

С блефом игрок Y заберет банк в одну единицу пять раз из шести, его ожидание составит $\frac{5}{6}$. В то же время он потеряет ставку $s = 5$ один раз из шести, итого ожидаемый проигрыш $\frac{5}{6}$ единиц. В сумме мы получим нулевое ожидание по блефам (вне зависимости от их частоты). Что касается вэлью бетов, игрок Y выиграет 5 единиц $\frac{1}{6}$ раз. И поскольку его диапазон состоит из вэлью рук на $\frac{3}{5}$, то его общее ожидание в игре составит $\frac{1}{2}$ единицы.

Примечание от переводчика: Если ожидание игрока Y составляет $\frac{1}{2}$ единицы, то ожидание его оппонента будет равно $-\frac{1}{2}$.

Но что если игрок X всегда скидывает свою руку в ответ на ставку? Тогда игрок Y просто выиграет банк со всеми своими блефами (которые составляют $\frac{2}{5}$ его рук), и не получит ничего от вэлью бетов. Получается, что найденная нами стратегия не может считаться оптимальной, поскольку игрок X имеет возможность в одностороннем порядке улучшить свое ожидание, начав скидывать все руки подряд. В свою очередь, игрок Y может попытаться эксплуатировать это, ставя олл-ин со всеми своими блефами. Предположим, что он так и сделает. С натсами он ничего не получит, а с пустой рукой выиграет целый банк - в итоге его ожидание составит те же $\frac{2}{5}$ единицы. Таким образом, против заданной стратегии лучшим ответом со стороны игрока X будет фолд со всеми руками.

Примечание от переводчика: Может показаться странным, почему игрок Y получит ожидаемый выигрыш всего в две пятых единицы, когда он забирает целый банк. Однако здесь важно помнить, что мы все еще имеем дело с экс-шоудаун вэлью. Иными словами, даже если оппонент скинул свои карты, игрок Y с блефами выиграет целый банк у более сильной руки (поскольку у блефа 0% эквити, а у руки игрока X - 100%), а с натсами - ничего (игроку Y и так принадлежит 100% банка).

Это очень важный вывод: лучшей стратегией игрока X будет фолд, даже если его оппонент блефует со всеми своими мертвыми руками. Это происходит из-за того, что диапазон игрока Y оказывается очень сильным (помните, мы дали ему больше натсов), и его оппонент фактически ничего не может с этим поделать, поскольку каждый колл будет обладать отрицательным ожиданием. Мы еще поговорим о таких ситуациях в главе, посвященной играм на нескольких улицах.

Ниже вы можете увидеть график цены игры и стратегий участников:

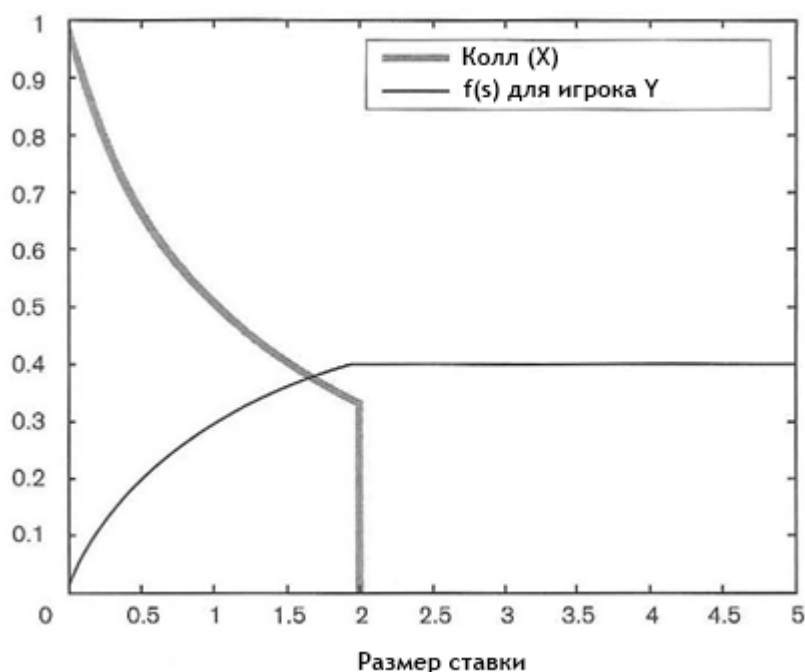


Рисунок 14.2. Игра против ясновидящего, $y=0.6$

Примечание от переводчика: График выше следует читать следующим образом. Линию «Колл (X)» нужно понимать как частоту колла для игрока X, которая зависит от коэффициента a . Линию « $f(s)$ для игрока Y» следует понимать как ожидание игрока Y. Когда игрок X перестает делать колл, то его оппонент просто забирает банк в одну единицу со всеми своими блефами (помните, мы все еще говорим про экс-шоудаун, так что натсы игрока Y ничего не получают) ровно 40% раз, поскольку именно такое деление между натсами и блефами мы задали чуть выше (60% на 40%).

Теперь ответим на второй вопрос: что если игрок Y ставит не олл-ин, а одну единицу (размер банка, $s = 1$)? Может сложиться впечатление, что мы можем просто взглянуть на график сверху, найти точку $s = 1$ и сказать, что игрок X должен уравнивать с половиной своих рук. Однако не все так просто. На самом деле, игроку X **все равно нужно скидывать все руки**. Более того, даже если игрок Y поставит 1% от банка, это решение никак не изменится.

Давайте разберемся почему. Для этого нужно проанализировать, как игрок Y может эксплуатировать коллы своего оппонента. Мы знаем, что игрок X будет вынужден скинуть свою руку, если игрок Y пойдет в олл-ин. Представим теперь, что игрок X сталкивается со ставкой меньшего размера и отвечает на нее по некой смешанной стратегии. Тогда игрок Y может начать ставить мало со всеми натсами и пушить с блефами. И так далее. Однако пока у игрока Y есть возможность улучшить свое ожидание против стратегии оппонента, мы не можем говорить о том, что нашли оптимальную стратегию. С другой стороны, игрок Y может ставить олл-ин в каждой раздаче - это и есть его оптимальная стратегия. Для игрока X же это фактически значит, что его ожидание против оптимальной стратегии оппонента равно фолду еще до начала игры. Значит, оптимальной стратегией для игрока X будет фолд!

Примечание от переводчика: Это объяснение может показаться нелогичным. На первый взгляд оно не объясняет почему игрок X должен скидывать свои руки даже если его оппонент поставит 1% от банка.

Дело в том, что в случае, если $s = 1\%$, игрок Y будет играть неоптимально, но у него будет возможность улучшить свое ожидание против игрока X, эксплуатируя его подстройки. А это значит, что стратегия игрока X также будет неоптимальной, поскольку его оппонент может увеличить свое ожидание (и таким образом, уменьшить ожидание игрока X).

В главе 13 мы рассмотрели лимитную игру АКQ. Как вы можете помнить, там мы нашли способ определять оптимальную частоту блефов и коллов для каждого из участников. Снова обратимся к этой игре, но уже в ее безлимитной вариации.

Пример 14.2 - Игра АКQ #3

- Игра на половине улицы
- Размер банка - 1 единица
- Ставки без ограничений по размеру (стэки составляют n ставок)

Правила в этой игре идентичны тем, что мы использовали в предыдущем примере - игрок X делает чек, а его оппонент пытается извлечь максимум вэлью со своим диапазоном. Однако вместо простого выбора между бетом и чеком, перед игроком Y стоит более сложная задача. Если он решится на ставку, ему придется выбрать и ее размер. Здесь мы будем считать, что чек с его стороны означает решение поставить в банк ноль единиц.

Как можно сразу заметить, со стороны игрока Y было бы глупо делать ставку размером больше банка. Если он все же это сделает, то игрок X сможет вскрывать его блефы со своими тузами и никогда не уравнивать с королями. Так что мы можем не рассматривать любые ставки, превышающие размер банка.

Теперь представим, что может случиться, если игрок Y будет использовать различные размеры ставок для блефа и вэлью. Очевидно, что игрок X сможет этим воспользоваться - достаточно только начать скидывать всех королей на «вэлью» беты и уравнивать с ними против всех «блеф» бетов. Иными словами, для каждого размера ставки, который мы используем с вэлью руками, мы должны иметь некое количество блефов (задаваемое коэффициентом α). Важно понимать, что если существует некий размер ставки s , при котором наше ожидание выше, чем при ставке t , то наша стратегия не является оптимальной. В таком случае мы можем просто начать ставить s со всем диапазоном и улучшить свою стратегию. Так что в оптимальной стратегии игрока Y окажется только один размер ставки (либо у нескольких из них будет одинаковое ожидание).

Для того, чтобы найти оптимальную стратегию, нам нужно определить оптимальные тенденции для блефа и колла при произвольных s , а затем использовать их для составления функции математического ожидания игрока Y (она обозначается $f(s)$, как и в примере выше). Как только мы получим эту функцию, мы сможем найти ее максимум, и вместе с ним - оптимальный размер ставки.

Как мы знаем из главы 11, отношение блефов к вэлью бетам для игрока Y задается коэффициентом α , причем столько же рук (α) должен будет скидывать игрок X . Значение α нам известно, оно составляет $s/(1 + s)$.

Для произвольного s , будет верно следующее: игрок Y будет блефовать $s/(1 + s)$ раз когда у него оказывается дама, а игрок X будет скидывать $s/(1 + s)$ всех своих рук.

Мы уже показали, что игрок Y имеет нулевое ожидание со своими блефами, поскольку игрок X будет уравнивать достаточно часто, чтобы сделать его безразличным к этому действию (таким образом, математическое ожидание от блефа будет равно ожиданию от чека, то есть нулю). Однако вэлью беты будут обладать положительным ожиданием для игрока Y, поскольку его оппонент иногда будет уравнивать с королем.

Игрок X должен уравнивать $(1 - \alpha)$ раз, или $1/(1 + s)$. Вычтем отсюда $1/2$, поскольку с тузами игрок X, очевидно, всегда будет делать колл:

$$c_{kings} = 2(1/(1 + s) - 1/2)$$

$$c_{kings} = 2/(1 + s) - (1 + s)/(1 + s)$$

$$c_{kings} = (1 - s)/(1 + s)$$

Примечание от переводчика: Вы уже сталкивались с этой формулой в прошлых главах.

Итак, игрок X должен уравнивать с $(1 - s)/(1 + s)$ своих королей. Если у игрока Y при этом окажется туз, то он выиграет ставку s , а ожидание от такого сценария составит $s(1 - s)/(1 + s)$. Причем случится это $1/6$ раз, поэтому ожидаемый выигрыш для игрока Y будет равен:

$$f(s) = s(1 - s)/6(1 + s)$$

Все, что осталось нам сделать - выбрать s таким образом, чтобы значение функции было максимальным. Перед тем как перейти к расчетам, давайте взглянем на график полученной функции:

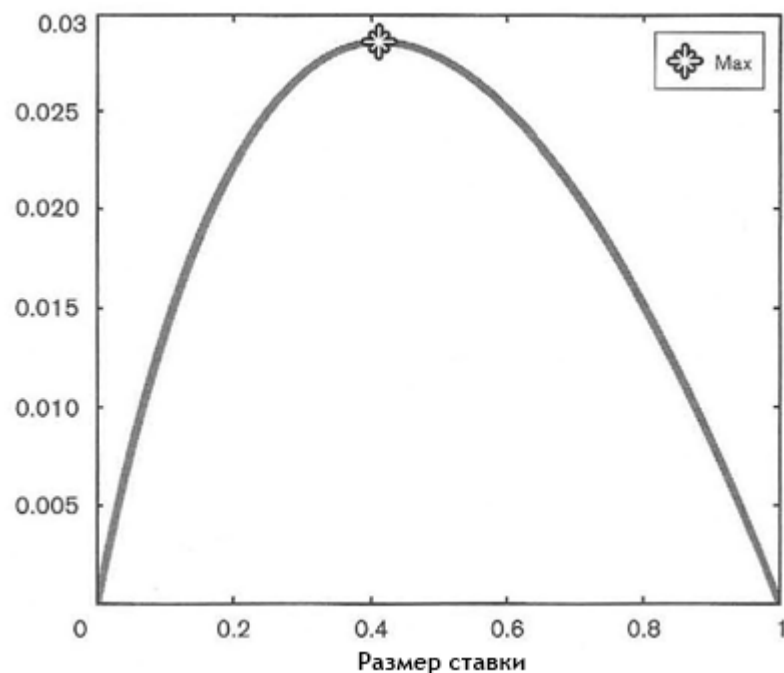


Рисунок 13.3. Ожидание игрока Y в безлимитной игре АКQ

Найдем максимум этой функции. Для этого возьмем ее производную и приравняем к нулю:

$$\begin{aligned}
 f(s) &= s(1 - s)/(1 + s) \\
 f'(s) &= -(s^2 + 2s - 1)/(1+s)^2 \\
 s^2 + 2s - 1 &= 0 \\
 (1+s)^2 &= 2 \\
 s &= -1 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$-1 - \sqrt{2}$ является невозможным решением, поскольку мы не можем сделать ставку отрицательного размера. Значит, $\sqrt{2} - 1$ (или приблизительно 0.414) будет оптимальным размером ставки.

В своей книге «Теория Покера» Дэвид Склански ввел понятие «Фундаментальная Теорема Покера» по аналогии с «Фундаментальной Теоремой Алгебры». Полученный нами ответ ($\sqrt{2} - 1$) настолько часто встречается в покерном анализе, что для простоты мы будем его называть «Золотым Сечением» в покере, а также введем для него обозначение « r ». Мы еще не раз встретим это число в наших изысканиях.

$$r = \sqrt{2} - 1 \tag{14.1}$$

Итак, в игре, в которой выполняются следующие условия:

- В вашем диапазоне есть и натсы, и блефы
- Когда у вас блеф, у оппонента окажется натс половину раз, а еще половину раз - рука, которая может побить только блеф.

Оптимальным размером ставки будет бет $(\sqrt{2} - 1)$ от размера банка (примерно 41%) со всеми натсами и блефами (причем с последними вы должны ставить $1 - 1/\sqrt{2}$ раз). Ваш оппонент, в свою очередь, будет делать колл со всеми натсами и некоторым количеством средних рук. Причем всего он будет уравнивать с $1/\sqrt{2}$ от всех своих рук (70% диапазона).

Мы можем использовать этот алгоритм, чтобы решить и более сложные безлимитные игры. В АКQ мы определили, что оптимальная стратегия подразумевала только один размер ставки. Однако как мы сейчас покажем в примере с распределением $[0,1]$, иногда диапазон наших ставок может быть более широким.

Пример 14.3 - $[0,1]$ игра #3

- Игра на половине улицы
- Ставки без ограничений. Эффективный стэк значительно больше банка
- Размер банка - 1 единица
- Игроки могут скидывать свои карты

Здесь мы имеем дело с уже знакомой ситуацией - игрок X делает чек, а его оппонент может ответить либо чеком, либо ставкой. Однако здесь нам придется рассматривать не одну, а две переменные: силу руки и размер ставки. В случае с лимитной АКQ, если у игрока Y оказывалась дама, то он мог выбрать между ставкой и чеком. В безлимитной версии игры, ему также надо было выбрать размер ставки.

В игре $[0,1]$ игроку Y необходимо определить размер ставки для каждой руки, причем вполне возможно, что он будет вынужден использовать плавающий бетсайзинг (в зависимости от силы своей руки). Как и в предыдущих примерах, для решения этой игры мы введем систему переменных, и каждый из игроков будет стараться максимизировать свое ожидание, используя только те переменные, на которые он может повлиять.

Для начала, давайте вернемся к некоторым выводам, которые мы сделали в примере 14.2. Так, мы можем с уверенностью сказать, что стратегия игрока Y будет подразумевать и блефы, и вэлью беты, причем они будут связаны между собой коэффициентом α . Тогда игрок X должен будет уравнивать ставку s от своего оппонента такое количество раз, чтобы сделать его безразличным к блефу.

Мы можем выразить стратегию игрока X через функцию от s . Пусть $x(s)$ - порог колла для игрока X. Тогда диапазон $x(s)$ будет состоять только из рук, которые могут побить блеф. Очевидно, что игрок X никогда не будет уравнивать с руками,

проигрывающими блефам своего оппонента. Причем игрок X никогда не будет делать колл в точке $x(0)$, которую мы назовем x_0 (в ней размер ставки равен нулю).

Примечание от переводчика: Пороговым значением для колла у игрока X является $x(0)$, поскольку при ставке в 0, он не может делать колл, и как уже было отмечено выше, диапазон его колла зависит от размера ставки. Таким образом, в диапазоне игрока X должна существовать некая настолько слабая пороговая рука, которая ничего не желает вкладывать в банк.

Игрок X будет строить свою функцию $x(s)$ таким образом, чтобы в случае, когда руки его оппонента слабее x_0 , он будет безразличен к блефу. Иными словами, игрок X будет уравнивать ставку размера s достаточное количество раз, чтобы его оппоненту не было разницы, что делать: делать чек или ставить s с мертвой рукой. Таким образом, s_1, s_2, s_3 и так далее будут иметь ожидание равное ожиданию чека для игрока Y.

Найдем порог безразличия:

Рука игрока X	Игрок Y ставит s	Игрок Y делает чек
$[0, x(s)]$	$-s$	0
$[x(s), y_0]$	1	0

$$P(\text{у игрока X сильная рука})(-s) + p(\text{у игрока X слабая рука})(+1) = k$$

$$(x(s) - 0)(-s) + (y_0 - x(s))(+1) = k$$

$$y_0 - x(s) - sx(s) = k \quad (\text{где } k - \text{некая константа})$$

$$x(s) = (y_0 - k) / (1+s)$$

Примечание от переводчика: Мы уже сталкивались с такими диапазонами, когда анализировали игру «Пуш или Фолд». Так, $[0, x(s)]$ означает диапазон рук для игрока X от сильнейших (0) до порога колла ($x(s)$, зависящего от размера ставки). В свою очередь, диапазон $[x(s), y_0]$ включает в себя все руки от порога колла игрока X до порога блефа игрока Y.

Не совсем ясно, почему в правой части уравнения авторы используют вместо 0 некую константу «k», которая должна обозначать ожидание от чека. Ведь если принять, что она равна нулю, мы получим те же результаты, что и в главе 11 (при этом сам ход решения никак не пострадает). Причем при $k = 0$ мы можем получить важный результат, который окажется полезным в нахождении x_0 .

Мы уже определили, что $x(0) = x_0$, тогда $y - k = x_0$:

$$x(s) = x_0 / (1+s) \quad (14.2)$$

Мы вывели формулу, которая фактически говорит следующее: если игрок X сделает чек, а его оппонент поставит s , то игрок X сделает колл со всеми руками лучше, чем $x_0 / (1+s)$. Сейчас мы еще не имеем представления о значении x_0 , однако игрок X никогда не должен уравнивать даже самые незначительные ставки, если его рука хуже найденного нами порога.

Теперь вернемся к стратегии игрока Y.

Его стратегия для вэлью бетов также будет зависеть от s . Нам нужно составить функцию, которая бы на заданный бетсайзинг возвращала силу руки, соответствующую этой ставке.

Если игрок Y поставит s с некой рукой y , он потеряет свою ставку, если у игрока X окажется рука лучше (это случится у раз), и выиграет s , если у его оппонента будет рука между порогом колла $x(s)$ и y . Это произойдет $(x(s) - y)$ раз. Следовательно, ожидание игрока Y составит:

$$\langle Y \rangle = (\text{вероятность проигрыша}) (-s) + (\text{вероятность выигрыша})(s)$$

$$\langle Y \rangle = (y)(-s) + (x(s) - y)s$$

$$\langle Y \rangle = sx(s) - 2sy.$$

Для того, чтобы найти максимум этой функции, возьмем ее производную, получим:

$$sx'(s) + x(s) - 2y = 0$$

$$s(-x_0 / (1 + s)^2) + x_0 / (1 + s) - 2y = 0$$

$$x_0 / (1 + s)^2 - 2y = 0$$

$$y_1(s) = x_0 / 2(1 + s)^2$$

Это и есть стратегия вэлью бетов для игрока Y. Как вы можете видеть, каждому значению y соответствует свой бетсайзинг. Вы уже знакомы с принципом сокрытия информации, так что на первый взгляд может показаться, что со стороны игрока Y было бы чудовищной ошибкой следовать этой стратегии, ведь каждый раз он будет фактически открыто говорить о силе своей руки.

Однако в этой игре его оппонент никак не сможет эксплуатировать столь очевидную слабость, поскольку на каждый вэлью бет игрока Y будет приходиться строго определенное количество блефов. Так что решая что делать против ставки s , игрок X может сделать либо легкий колл (когда он уверен, что его рука лучшая), либо пограничный колл (когда он знает, что у оппонента либо блеф, который он может побить, либо вэлью комбинация, которая бьет его), либо

скинуть свою руку. Более того, согласно правилам игры, игрок X не может делать рейз, так что игрок Y может ничуть не волноваться о том, что выдает силу своей руки.

Наша следующая задача заключается в определении диапазона для блефа у игрока Y, который бы соответствовал только что найденному вэлью диапазону. Вот что мы имеем на текущий момент:

На интервале $[0, x(0)]$, игрок X уравнивает в соответствии со своей функцией $x(s)$. На интервале от $[x(0), 1]$ он должен всегда скидывать свою руку.

На интервале $[0, y_1(0)]$, игрок Y ставит на вэлью в соответствии со своей функцией $y(s)$. На интервале $[y_1(0), y_0(0)]$ он будет делать чек, а с руками хуже он будет блефовать в соответствии с $y_0(0)$.

Примечание от переводчика: Пороговым значением для ставки у игрока Y будет $y_1(0)$, поскольку очевидно, что если сила его руки зависит от размера ставки, и ставим мы 0, то это равносильно чеку. В то же время неизвестным остается второе пороговое значение, ограничивающее диапазон чека снизу. О нем мы поговорим позже.

Теперь найдем значение x_0 , а также покажем связь между диапазонами блефа и вэлью бетов для игрока Y.

Мы уже знаем, что его функция вэлью бетов выглядит следующим образом:

$$y_1(s) = x_0 / 2(1 + s)^2$$

Можем продифференцировать эту функцию.

$$dy = x_0 / (1 + s)^3 ds$$

Мы уже знаем, что блефы и вэлью беты находятся в соотношении α , то есть $s/(1 + s)$. Оно применимо и в этом случае, поскольку мы фактически имеем дело с приращением функции вэлью бетов (это и есть смысл производной). Получаем выражение для блефов:

$$sx_0 / (1+s)^4 ds$$

Теперь можем найти область, заключенную под функцией блефов - это и будет доля блефов в общей стратегии.

$$\int_0^{\infty} \frac{sx_0}{(1+s)^4} ds$$

Сделаем замену $t = 1 + s$, получим:

$$\begin{aligned} & x_0 \int_{t=1}^{\infty} \frac{t-1}{t^4} dt \\ &= x_0 \int_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4} dt \\ &= x_0 \left[\left(-\frac{1}{2} t^2 \right) + \left(\frac{1}{3} t^3 \right) \right] \Big|_1^{\infty} \\ &= \frac{1}{6} x_0 \end{aligned}$$

Значит, область блефов для игрока Y составляет $\frac{1}{6} x_0$. Поскольку область блефов начинается сразу за порогом x_0 , имеем:

$$x_0 + \frac{1}{6} x_0 = 1$$

$$x_0 = \frac{6}{7}$$

Примечание от переводчика: Здесь как раз и проявляется тот «важный результат», о котором мы говорили для формулы $x(s)$. Если мы принимаем, что k действительно равно нулю, то получим, что $x_0 = y_0$. Это, в свою очередь, значит, что область x_0 равна сумме областей ставки на вэлью и чека для игрока Y (как мы уже знаем, его пороги идут в таком порядке: $0, y_1, y_0$). В сумме все три области для игрока Y составляют единицу. Поэтому уравнение выше имеет смысл.

Таким же образом мы можем определить диапазон для блефа игрока Y , однако мы оставим эту задачу нашим наиболее мотивированным читателям. Вернемся к функциям стратегий обоих участников (мы не включили сюда функцию блефа для игрока Y):

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{6}{7}(1+s) \\ y(s) &= \frac{3}{7}(1+s)^2 \end{aligned}$$

Однако главным выводом из этого примера являются не сами оптимальные стратегии, а метод, использованный нами для поиска правильного бетсайзинга. В решении каждой из игр (AKQ и $[0,1]$) мы рассматривали переменные, подконтрольные каждому из участников, а не стратегические опции. Иными словами, каждый игрок старался максимизировать свое ожидание с использованием доступных ему переменных (в нашем случае, это был размер ставки для игрока Y).

Из тех игр на половине улицы, что мы успели проанализировать в последних

четырех главах, можно извлечь множество полезных уроков:

- Игра против ясновидящего - соотношения блефов и вэлью бетов
- $[0,1]$ игра #1 - области чистых стратегий и пороги
- $[0,1]$ игра #2 - применение соотношений блефов и вэлью бетов для непрерывных симметричных распределений
- $[0,1]$ игра «Пуш или Фолд» - неопределенность шоудауна заставляла участников играть гораздо более агрессивно на префлопе
- «Пуш или Фолд» для безлимитного Холдема - решение реальной ситуации
- Лимитный случай игры AKQ - блокеры могут оказывать существенное влияние на оптимальную стратегию
- Безлимитный случай игры AKQ - мы впервые вывели оптимальный бетсайзинг
- $[0,1]$ игра - решение сложных стратегических функций для непрерывных распределений.

Нужно запомнить

- Проблему бетсайзинга в покере можно решить аналитически. Для этого нам нужно составить функции, зависящие от размеров ставок. Тогда игрок, который решает, сколько денег будет вложено в банк, сможет найти такой бетсайзинг, который бы максимизировал его ожидание. А это, в свою очередь, позволит вывести пару оптимальных стратегий.
- Когда у одного из игроков есть очень сильный диапазон, либо он ясновидящий, вполне вероятно, что оптимальной стратегией для его оппонента будет фолд со всем диапазоном против любой ставки.
- Соккрытие информации становится особенно важным, когда игроки могут делать ставки произвольного размера.

Глава 15

Игрок X наносит ответный удар: Игры на полной улице

В предыдущих главах мы обсуждали исключительно игры на половине улицы, где игрок X мог сделать только чек, а его оппонент принимал решение о ставке или ответном чеке (который приводил к шоудауну). В главе 15 мы начинаем изучение игр на полной улице - здесь игрок X также действует первым, однако он также может выбрать между чеком и бетом. Если он выбирает последнее, то игрок Y может сделать рейз (если правила игры это позволяют), колл или фолд. Соответственно, в ответ на чек он может либо поставить, либо посмотреть на бесплатный шоудаун.

Некоторые из выводов, которые мы сделали при анализе игр на половине улицы, окажутся полезными и здесь, однако какие-то концепции нам придется проработать с чистого листа. Так, например, соотношения ставок на вэлью и блефов для игрока X ничем не будут отличаться от таковых для игрока Y. Однако поскольку теперь игрок X может сделать бет, его диапазон для чека окажется несколько иным. А это повлияет на стратегию игрока Y.

Кроме того, важно понимать, что *игрок X не может потерять в математическом ожидании при игре на полной улице* (по сравнению с игрой на половине улицы), при условии, что правила игры остаются неизменными. Если бы это было не так, то игрок X мог бы проигнорировать новые стратегические возможности и следовать своей старой стратегии. По сути, здесь мы экстраполируем определение стратегических возможностей, ведь они не могут обладать отрицательным ожиданием. Таким образом, ставка для игрока X должна обладать как минимум нулевым математическим ожиданием, иначе он может просто отказаться от этой линии в пользу чека.

В-третьих, в полноценных играх (это также верно и для любой игры хоть сколько-нибудь сложнее игр на половине улицы), мы будем описывать оптимальные стратегии в несколько ином ключе. В играх на половине улицы, в частности в $[0,1]$ игре, каждый участник фактически имел всего два варианта действий. Игрок Y мог сделать чек или бет, а его оппонент мог либо уравнивать, либо скинуть свою руку. И поскольку каждая из этих стратегий выражалась только одним решением, мы могли провести параллель между стратегией «фолд» и стратегическим выбором «фолд».

Также в играх на половине улицы стратегия каждого из участников была разделена на определенные области. В $[0,1]$ играх это были отрезки, где применялся только один стратегический выбор. Кроме того, мы разобрали и примеры, где определенные руки требовалось играть по смешанным стратегиям (игра АКQ). Но в каждом из этих случаев участники выбирали диапазон рук и соответствующую ему стратегическую возможность, а сумма диапазонов и

составляла стратегию.

Однако в играх на полной улице ситуация меняется. Если раньше игрок X был обязан делать чек, то теперь у него есть выбор между чеком и ставкой, а затем - выбор между коллом и фолдом. На наш взгляд, это не два отдельных решения. Поэтому в наших моделях, игрок X будет выбирать из более сложных стратегий: Бет, Чек-Колл и Чек-Фолд. Изменяются и платежные матрицы - теперь они будут отражать ожидание от целых линий, а не от конкретных действий.

Приступим к анализу первой игры в этом разделе - еще одной вариации знакомой нам АКQ.

Пример 15.1 - Игра АКQ #4

- Игра на полной улице
- Размер банка - P единиц ($P > 1$)
- Размер ставки - 1 единица
- Игроки не могут делать рейзы

Составим полную матрицу экс-шоудаун выплат для рассматриваемой игры (все выплаты указываются для игрока Y):

Игрок X	Игрок Y	Туз				Король				Дама			
		X - Бет		X - Чек		X - Бет		X - Чек		X - Бет		X - Чек	
		Колл	Фолд	Бет	Чек	Колл	Фолд	Бет	Чек	Колл	Фолд	Бет	Чек
Туз	Бет					-1	0			-1	0		
	Чек/Колл							-1	0			-1	0
	Чек/Фолд							+P	0			+P	0
Король	Бет	1	-P							-1	0		
	Чек/Колл			1	0							-1	0
	Чек/Фолд			0	0							+P	0
Дама	Бет	1	-P			1	-P						
	Чек/Колл			1	0			1	0				
	Чек/Фолд			0	0			0	0				

Мы можем сразу исключить доминированные стратегии и упростить игру. Для игрока X линия Чек/Фолд с тузом явно доминирована линией Чек/Колл. Обратное верно для дамы - линия Чек/Фолд имеет более высокое ожидание. Что касается игрока Y, то нам следует исключить Колл с дамой и Фолд с тузом. Кроме того, Чек с тузом доминирован Бетом. Получим следующую упрощенную матрицу:

Игрок X	Игрок Y	Туз		Король				Дама		
		Колл	Бет	Колл	Фолд	Бет	Чек	Фолд	Бет	Чек
Туз	Бет			-1	0			0		
	Чек/Колл					-1	0		-1	0
Король	Бет	1						0		
	Чек/Колл		1						-1	0
	Чек/Фолд		0						+P	0
Дама	Бет	1		1	-P					
	Чек/Фолд		0			0	0			

Как вы можете заметить, стратегия Бет с королями доминирована для обоих игроков:

Игрок X	Игрок Y	Туз	Король		Дама	
		Колл/Бет	Колл/Чек	Фолд/Чек	Фолд/Бет	Фолд/Чек
Туз	Бет		-1	0	0	0
	Чек/Колл		0	0	-1	0
Король	Чек/Колл	1			-1	0
	Чек/Фолд	0			-P	0
Дама	Бет	1	1	-P		
	Чек/Фолд	0	0	0		

Давайте посмотрим на стратегические выборы игрока X. Он может сделать Чек со всеми королями, а затем уравнивать или скинуть на ставку оппонента, чтобы сделать игрока Y безразличным к блефу с дамой. Кроме того, он должен выбрать стратегию для своих тузов и дам. Так, с тузом он может выбрать Чек/Колл и получить вэлью от блефа оппонента (когда тот поставит с дамой). Однако вэлью есть и в ставке - тогда игрок Y может иногда уравнивать с королем. Что касается дам, то игрок X получает вэлью от успешного блефа против королей и теряет вэлью в ситуациях, когда его оппонент делает колл с А и К.

Для игрока Y все немного проще - ему нужно выбрать стратегии только для своих королей (с которыми он должен уравнивать достаточно часто, чтобы сделать своего оппонента безразличным к блефу с дамой) и дам (так чтобы его оппоненту было все равно, что делать со своими королями).

Таким образом, стратегия для игрока X будет состоять из трех переменных:

- Частота бета с тузами - x
- Частота колла с королями - c (поскольку игрок X всегда делает чек с королями, то эта переменная относится к линии Чек/Колл)
- Частота блефа с дамами - b

Стратегия его оппонента будет включать в себя две переменные:

- Частота колла с королями - c_y
- Частота блефа с дамами - b_y

Давайте рассмотрим ситуацию, когда игрок X делает ставку. Мы уже определили, что такой сценарий возможен только когда у него на руках тузы или дамы. Оппонент должен уравнивать с королями настолько часто, чтобы сделать его безразличным к блефу. Причем не имеет значения, делает ли игрок X ставку с тузами каждый раз, или иногда выбирает линию Чек/Колла. Также как и в играх на половине улицы, если игрок X ставит с диапазоном, состоящим из тузов и дам, игрок Y должен скинуть ровно α от своих рук, способных побить блеф. Используя наши выводы из игры АКQ #2 (пример 13.2), мы можем сказать, что когда игрок X делает ставку, его оппонент должен уравнивать с $(P-1)/(P+1)$ своих королей.

В свою очередь, игрок X должен ставить с тузами и дамами таким образом, чтобы сделать своего оппонента безразличным к коллу с королями. И здесь нам стоит обратиться к разнице между экс-шоудаун ожиданием для двух возможных действий игрока Y. Когда он уравнивает ставку с королем, туз игрока X выиграет одну единицу. В то же время, если игрок Y скинет свои карты, то он не выиграет ничего (помните, что мы говорим только об экс-шоудауне, так что если лучшая рука забирает банк, то фактически она ничего не выигрывает). Однако когда у игрока X оказывается дама, игрок Y выигрывает не только ставку от своего оппонента, но и весь банк, поскольку альтернативой для него был бы фолд и проигрыш банка худшей руке. Таким образом, поскольку игрок Y выигрывает $(P+1)$ ставок, уравнивая против дамы, и проигрывает 1 ставку против туза, игрок X должен ставить с одной дамой на каждые $(P+1)$ тузов.

Примечание от переводчика: Хотя это определение может показаться немного запутанным, мы уже сталкивались с ним при решении игры АКQ ранее. Его также легко проверить, составив формулы для математического ожидания в описанных ситуациях. Поэтому подробно разбирать формулу для вывода коэффициента «а» мы не будем.

Выражаясь на языке формул:

$$b/x = 1/(P+1) = \alpha \quad (15.1)$$

И снова мы видим, что фундаментальная константа, выражающая отношение блефов к ставкам на вэлью, никак не изменилась. Мы также можем не обращать внимания на переменную b в стратегии игрока X, поскольку мы легко сможем найти ее с помощью описанного выше уравнения.

Перейдем к случаю, когда игрок X делает чек. Здесь почти полностью повторяется ситуация из игры #2, за исключением того факта, что игрок X должен ставить со своими тузами x раз (а не делать чек со всеми диапазоном, как

раньше). Игрок Y, в свою очередь, поставит со всеми тузами и α от своих дам. И чтобы сделать своего оппонента безразличным к блефу, игрок X должен из своего оставшегося диапазона скинуть α рук, способных побить блеф.

Предположим, что игрок X делает чек со всеми тузами (тогда $x = 0$). В таком случае в его диапазоне окажется равное количество королей и тузов, и он будет вынужден скинуть α от этих рук (естественно, предпочитая королей). Как мы показали в игре AKQ #2 (пример 13.2), он будет делать фолд с $(P-1)/(P+1)$ от своих королей. Однако в нашем случае общее количество рук в его диапазоне будет уменьшено на x тузов, с которыми он ставит. Поэтому в диапазоне Чек/Колла окажется чуть больше королей.

Диапазон игрока X после чека:

$$\text{Диапазон} = (\text{все тузы}) (\text{часть тузов, с которыми они сделал бет}) + (\text{все короли})$$

$$\text{Диапазон} = \left(\frac{1}{2}\right) (1 - x) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Диапазон} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Диапазон для фолда = (α) (диапазон)

$$\frac{1}{2} (1 - c) = \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

$$1 - c = \alpha (2 - x)$$

$$c = 1 - 2\alpha + \alpha x \tag{15.2}$$

Примечание от переводчика: в левой части уравнения - руки, с которыми игрок X должен делать фолд. Этот диапазон состоит из королей, с которыми он не делает колл, то есть $(1 - c)$, но поскольку королей в его диапазоне всего половина, то необходимо использовать коэффициент $\frac{1}{2}$.

Мы можем проверить полученную формулу, подставив вместо x два экстремальных значения. Для начала, посмотрим что произойдет, если x равен 0%:

$$c = 1 - 2\alpha + \alpha x$$

$$c = 1 - 2\alpha$$

$$c = 1 - 2\alpha \left[\frac{1}{P+1} \right]$$

$$1 - 2\alpha = (P+1-2) / (P+1)$$

$$c = (P-1) / (P+1)$$

Чего и следовало ожидать. Теперь, пусть x равен 100%. Если игрок X ставит со всеми своими тузами, ему нужно скинуть α от своих королей, чтобы сделать

оппонента безразличным к блефу с дамой. Наша формула покажет, что в таком случае $c = 1 - \alpha$.

Эти уравнения полностью описывают действия каждого игрока во всех возможных ситуациях, однако мы все еще не знаем значения x .

Итак, на данный момент мы знаем, что:

- Игрок X ставит c x своих тузов и αx дам
- Игрок X делает Чек/Фолд с оставшимися дамами, а с тузами - чек и колл
- Игрок X делает чек и колл с $(1 - 2\alpha + \alpha x)$ своих королей, а с остальными - чек и фолд
- Игрок Y уравнивает ставки с $1 - 2\alpha$ всех королей, а также со всеми тузами
- Игрок Y скидывает оставшихся королей, а также всех дам
- Игрок Y ставит в ответ на чек с тузами и α всех дам

Мы нередко будем встречаться с похожими ситуациями, когда у нас есть готовое решение для игры, однако нам не известна какая-то ключевая переменная. В таком случае мы будем использовать правило, по которому контролирующие эту переменную игроки будут выбирать ее значение таким образом, что максимизировать свое ожидание.

Чтобы найти x , сначала нам нужно определить цену игры (то есть ожидание игрока Y). Всего существуют шесть различных случаев:

Случай 1:

Игрок X: A, Игрок Y: K

Здесь игрок X поставит x раз, а его оппонент уравнивает $1 - 2\alpha$ раз. Итоговое ожидание для игрока Y: $-x(1 - 2\alpha)$. Когда игрок X делает чек, цена игры будет равна нулю.

Случай 2:

Игрок X: A, Игрок Y: Q

Если игрок X сделает ставку, то цена игры будет равна нулю. Однако он также делает чек $(1 - x)$ раз, и тем самым ровно α раз заставит своего оппонента поставить с дамой. Цена игры равна $-\alpha(1 - x)$.

Случай 3:

Игрок X: K, Игрок Y: A

Игрок X сделает чек 100% раз, а когда его оппонент поставит, он будет уравнивать $(1 - 2\alpha + \alpha x)$ раз. Цена игры в таком случае составит $1 - 2\alpha + \alpha x$.

Случай 4:

Игрок X: K, Игрок Y: Q

Игрок X снова всегда сделает чек, а игрок Y будет блефовать α раз. В случае колла, игрок Y потеряет одну ставку, а в случае фолда - выиграет весь банк. Мы знаем, что общее ожидание от блефов игрока Y должно быть равно нулю, поскольку оптимальная стратегия его оппонента предполагает отсутствие разницы между блефом и чеком (ожидание чека равно нулю). Поэтому сумма Случая 2 и Случая 4 должна равняться нулю. Поэтому здесь цена игры для игрока Y составит $\alpha(1 - x)$.

Случай 5:

Игрок X: Q, Игрок Y: A

Игрок X будет блефовать αx раз. Игрок Y всегда будет делать колл, и получит ожидание αx .

Случай 6:

Игрок X: Q, Игрок Y: K

Ожидание от блефов для игрока X должно быть равно нулю, поэтому сумма Случая 5 и Случая 6 должна быть равна нулю. А это значит, что в этой ситуации игрок Y имеет ожидание $-\alpha x$.

Мы можем представить полученные значения в виде таблицы:

Ситуация	Цена игры
(A, K)	$-x(1 - 2\alpha)$
(A, Q)	$-\alpha(1 - x)$
(K, A)	$1 - 2\alpha + \alpha x$
(K, Q)	$\alpha(1 - x)$
(Q, A)	αx
(Q, K)	$-\alpha x$
Итого	$(x(-1 + 3\alpha) + 1 - 2\alpha) / 6$

Последнее выражение связывает цену игры со значением x . Вы можете посмотреть, как меняется цена игры в зависимости от x и размера банка на графике ниже:

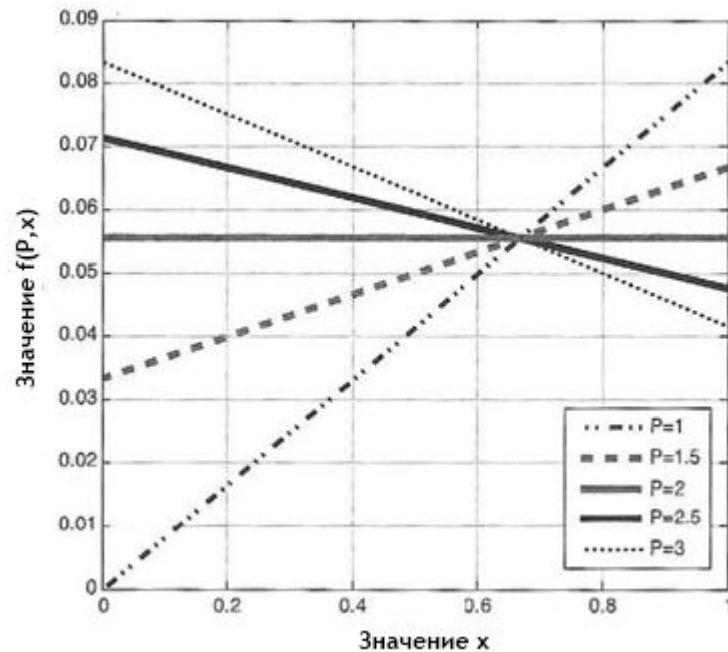


Рисунок 15.1. Цена игры АКQ #4 при различных значениях x

Цена игры оказывается минимальной при $x = 1$ для размеров банка более 2, а при $x = 0$ для банков между 1 и 2 единицами.

Примечание от переводчика: Здесь решается задача минимизации цены игры (иными словами - минимизация ожидания игрока Y при условии, что все стороны играют оптимально), поскольку переменная x находится под контролем игрока X . А он, в свою очередь, хочет уменьшить ожидание своего оппонента. Иными словами, сейчас мы смотрим на эту ситуацию со стороны игрока X .

Получим следующие оптимальные стратегии:

Для $P < 2$:

Игрок X :

Делает чек со всеми своим диапазоном

Уравнивает со всеми тузами и $(P - 1)/(P + 1)$ королей

Игрок Y :

Ставит со всеми тузами и $1/(P + 1)$ своих дам

Для $P > 2$:

Игрок X:

Ставит со всеми тузами и $1/(P+1)$ дам

Уравнивает с $P/(P+1)$ своих королей

Игрок Y:

Если игрок X делает чек - бет со всеми тузами и $1/(P+1)$ дам

Если игрок X делает бет - колл со всеми тузами и $(P-1)/(P+1)$ королей

Правила этой игры не предусматривают возможность рейза. Однако легко доказать, что включив в свою стратегию рейз, ни один из игроков не улучшит свое ожидание по сравнению с найденными нами оптимальными стратегиями. Таким образом, описанное выше решение применимо и для более сложной игры, где игроки могут делать рейзы.

Единственное, чем игры на полной улице отличались от своих урезанных аналогов - это количество стратегических выборов, доступных игрокам. Все остальные ключевые коэффициенты и правила остались неизменными: блефы и вэлью беты находятся в соотношении α , игроки все еще должны скидывать α рук, способных побить блеф и так далее. Дополнительную сложность игре добавило только решение о чеке с тузами для игрока X.

Теперь давайте посмотрим на безлимитную версию этой же игры. Как вы можете помнить, мы решили игру АКQ #3 (пример 14.1) в достаточно схожей манере: вывели функцию от размера ставки s для игрока Y, а затем нашли ее максимум. Может сложиться ложное впечатление, что имея на руках результаты для игры на половине улицы, решение полной версии АКQ не окажется намного сложнее. Это далеко не так, однако мы вернемся к этой теме немного позже.

Сейчас же мы бы хотели обратиться к еще одной вариации игры АКQ с необычной структурой ставок.

Пример 15.2 - Игра АКQ #5

- Игра на полной улице
- Размер банка составляет 4 единицы
- Игроки вправе сделать чек, бет, или рейз. Причем размер ставок и рейзов может составлять либо 1, либо 2 единицы, по выбору игрока.

Рассматриваемая здесь игра идентична той, что мы проанализировали в предыдущем примере (15.1) с банком в 2 единицы, за той лишь разницей, что теперь каждый из игроков может поставить $1/4$ банка, вместо половины. Решая игру #4 мы установили, что при $P = 2$, игрок X был безразличен к ставке с тузами. Это позволило нам сделать вывод о том, что цена такой игры была идентична

цене игры на половине улицы, где игрок X должен был делать чек со всеми своим диапазоном (поскольку в игре на полной улице при банке в 2 единицы он мог сделать чек и не потерять в ожидании).

В примере 15.1 мы также нашли, что цена игры составляла:

$$f(1, P) = (x(-1 + 3\alpha) + 1 - 2\alpha) / 6$$

Пусть x равно нулю (игрок X безразличен к ставке с тузами), а $\alpha = 1/(2 + 1) = 1/3$.

Примечание от переводчика: Здесь авторы применяют уже описанный ранее прием, когда в точке безразличия (в данном случае - для игрока X, по отношению к бету и чеку с тузами) мы начинаем играть по чистой стратегии (например, чек с тузами 100% раз) и фиксируем стратегию оппонента. Это становится возможным из-за равенства ожидания от бета и чека с тузами в точке безразличия.

Иными словами, мы делаем следующее допущение: оппонент никак не меняет свою стратегию, даже если ему будет известно, что мы всегда делаем чек с тузами. Это существенно упрощает расчеты, при этом не страдает точность получаемых ответов. Хотя в реальной игре нам следовало бы выбирать ситуации для чека и бета с тузами случайным образом, поскольку игра по любой из чистых стратегий с тузами позволила бы оппоненту без труда нас эксплуатировать.

$$f(1, 2) = ((0)(-1 + 3\alpha) + 1 - 2(1/3)) / 6$$

$$f(1, 2) = (1 - 2/3) / 6$$

$$f(1, 2) = 1/18$$

Однако это верно для ставки в 1 единицу при банке $P = 2$. Поэтому нам нужно умножить полученный ответ на два:

$$f(s = 2, P = 4) = 1/9$$

Это цена игры при условии, что оба игрока будут следовать той же стратегии, что и в предыдущем примере, каждый раз выбирая ставку размером в половину банка. Теперь давайте посмотрим, увеличится ли ожидание любого из игроков от ставки в четверть банка.

Пусть игрок X решает делать бет в 1 единицу со всеми тузами и, соответственно, частью дам. Тогда игрок Y ответит стратегией колла с $4/5$ всех своих рук (все тузы, плюс $3/5$ королей), делая своего оппонента безразличным к блефу. В этом случае игрок X выиграет 1 единицу $3/10$ раз.

С другой стороны, если игрок X сделает чек, то его оппонент поставит с дамами $\frac{1}{3}$ раз (причем дамы занимают ровно половину диапазона) и проиграет две единицы. В таком случае ожидаемый выигрыш игрока X составит $\frac{1}{3}$. И поскольку это больше, чем $\frac{3}{10}$, мы можем говорить о том, что игрок X теряет в математическом ожидании, ставя одну единицу вместо двух. Значит, такая стратегия не будет являться оптимальной.

Примечание от переводчика: Почему игрок X будет выигрывать $\frac{3}{10}$ единицы? Мы рассматриваем ситуацию, где у него на руках туз и он ставит 1 единицу в банк 4. Поскольку его оппонент будет уравнивать достаточно часто, чтобы сделать его безразличным к блефу с дамой, то мы можем считать, что ожидание от блефа с дамой равно нулю. Тогда игрок X будет ставить на вэлью со своими тузами, которые составляют половину его диапазона, и получать колл от $\frac{3}{5}$ королей оппонента. Умножаем 1 на $\frac{3}{5}$ и на $\frac{1}{2}$, получим $\frac{3}{10}$.

Примечание от переводчика: Игрок Y будет проигрывать две единицы, когда игрок X делает чек, поскольку мы пока считаем, что только игрок X решает ставить четверть банка. Соответственно, его оппонент этого делать не будет.

Если же игрок X всегда будет делать чек, то ожидание игрока Y от изменения размера ставки составит:

$$f(1, P) = (x(-1 + 3\alpha) + 1 - 2\alpha) / 6$$

Тогда для $P = 4$:

$$f(1, 4) = (1 - \frac{2}{5}) / 6$$

$$f(s = 1, P = 4) = \frac{1}{10}$$

Значит, игрок Y тоже не может получить дополнительное вэлью от более мелкой ставки.

В этой игре участники также могут делать и рейз, однако поскольку игрок X поставит только с дамами и тузами, его оппоненту нет смысла вкладывать в банк еще больше денег. Единственная ситуация, где рейз имеет смысл - когда у игрока Y оказывается туз. То же самое будет верно и для игрока X.

Получается, что эта игра фактически ничем не отличается от той, что мы рассмотрели в предыдущем примере?

Сейчас выбранные нами стратегии выглядят следующим образом:

Игрок X:

Чек со всеми руками

Колл ставки в 2 единицы со всеми тузами и $\frac{1}{3}$ королей

Колл ставки в 1 единицу с $\frac{3}{5}$ королей

Игрок Y:

Если игрок X ставит, колл 2 единиц со всеми тузами и $\frac{1}{3}$ королей

Если игрок X ставит, колл 1 единицы с тузами и $\frac{3}{5}$ королей

Если игрок X делает чек, бет 2 единицы с тузами и $\frac{1}{3}$ дам

Вспомним одно из главных требований к оптимальным стратегиям - **игроки не могут увеличить свое ожидание в одностороннем порядке просто изменив свои стратегии**. Это значит, что если мы можем получить более высокое математическое ожидание от другой линии розыгрыша с любой рукой, то найденная нами стратегия не является оптимальной.

Сейчас игрок X теряет $\frac{2}{3}$ единицы каждый раз, когда у него оказывается король. Половину раз у оппонента будет дама, с которой он поставит треть раз. Игрок X уравнивает в $\frac{1}{3}$ случаев и выиграет две единицы. Однако две трети раз он скинет свои карты и отдаст худшей руке оппонента банк в четыре единицы. Кроме того, у игрока Y в половине случаев окажется туз, и тогда игрок X проиграет ставку в 2 единицы также $\frac{1}{3}$ раз. Это значит, что ожидание от розыгрыша короля против туза составляет минус $\frac{2}{3}$ единицы, а общий проигрыш с королем - $\frac{2}{3}$.

Примечание от переводчика: Формула для расчета ожидания, когда у игрока X оказывается король должна выглядеть следующим образом:

*(доля Q у игрока Y) * (Частота блефа * Частота колла * (+2) + Частота блефа * Частота фолда * (-4))*

Это равно: $\frac{1}{2} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * (+2) + \frac{1}{3} * \frac{2}{3} * (-4)) = -\frac{1}{3}$

*(доля A у игрока Y) * (Частота ставки * Частота колла * (-2) + Частота ставки * Частота фолда * 0)*

Это равно: $\frac{1}{2} * (1 * \frac{1}{3} * (-2) + 1 * \frac{2}{3} * 0) = -\frac{1}{3}$

В сумме получим ожидаемый проигрыш $\frac{2}{3}$ единицы.

Если игрок X решит изменить свою стратегию и начнет уравнивать с королями, например, в половине случаев, он будет чаще выигрывать против блефов, но в то же время и чаще проигрывать тузам. А поскольку соотношение блефов к ставкам на вэлью у его оппонента останется 3 к 1, его суммарный проигрыш с королем никак не изменится.

Но что если он начнет делать бет с королем?

В уже рассмотренных нами играх ставка с этой рукой была доминированной стратегией, которую мы практически сразу исключили из матрицы выплат. Действительно, мы никогда не получали колл от рук хуже, но при этом проигрывали целую ставку рукам лучше.

Однако теперь мы можем поставить всего одну единицу с нашими королями. В таком случае игрок Y уравнивает со всеми тузами, а наш общий проигрыш сократится до $\frac{1}{2}$, так как мы проиграем нашу ставку ровно половину раз. Это значит, что найденная нами стратегия не является оптимальной, ведь игрок X может в одностороннем порядке улучшить свое ожидание для одной из своих рук (с $-\frac{2}{3}$ до $-\frac{1}{2}$).

Как игрок Y может ответить на такую ставку? Раньше мы полностью исключили возможность блеф-рейза, поскольку стратегия игрока X не предполагала ставку с королем (единственной рукой, против которой это действие имело бы смысл). Естественно, теперь игнорировать такую линию мы не можем. Когда у игрока Y оказывается туз, при новой стратегии игрока X рейз явно доминирует колл. Но если он делает рейз только с тузами, он не сможет получить никакого вэлью, так как его оппонент просто начнет скидывать всех своих королей. Значит, игрок Y должен защитить свои вэлью рейзы некоторым количеством блефов.

Перед нами встает еще одна сложность - мы не можем применить коэффициент $s/(1 + s)$, поскольку размер банка увеличился из-за ставки игрока X. Кроме того, игрок Y может сделать рейз двух разных размеров: на две единицы или на одну (мини-рейз).

Можно предположить, что здесь целью игрока Y будет рейз с таким количеством блефов, которое сделает его оппонента безразличным к коллу с королем. Однако как мы покажем чуть позже, блеф часто окажется весьма дорогим удовольствием для игрока Y. Поэтому он скорее должен делать блеф-рейз настолько часто, чтобы игроку X было все равно: ставить с королем одну единицу и скидывать на рейз (то есть играть по линии Бет-Фолд), либо делать чек.

Игрок X получил $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ единицы дополнительного математического ожидания от бета с королем. Игрок Y должен постараться компенсировать эту разницу своими блефами. Пусть q - частота блеф-рейзов (на одну единицу). Тогда

в случае успешного блефа игрок Y заберет банк в пять единиц (размер банка до ставки, плюс ставка оппонента с королем).

$$(\text{банк}) p(\text{у игрока Y дама}) q = 1/6$$

$$(5)(1/2) q = 1/6$$

$$q = 1/15$$

Таким образом, если игрок Y будет делать мини-рейз (до двух единиц), то он должен блефовать с $1/15$ со своими дамами. Это сделает его оппонента безразличным к ставке с королями. Очевидно, что игрок X должен всегда скидывать в ответ на рейз, поскольку оставшиеся 15 раз из 16 он будет играть против туза.

Как можно заметить, размер рейза игрока Y не влияет на частоту блефа, поскольку его оппонент никогда не будет уравнивать. Однако мини-рейз всегда будет более предпочтительным в этой игре, поскольку он гарантирует меньший проигрыш, если у оппонента окажется туз.

Вернемся к игроку X, которому теперь доступна новая стратегическая возможность, поскольку изменилось его ожидание от розыгрыша тузов. Раньше ожидаемый выигрыш от чека с тузами составлял $1/3$ единицы (благодаря блефам игрока Y). Однако теперь он может поставить с ними (а также некоторым количеством дам) одну единицу и получить колл от короля оппонента. Кроме того, иногда он будет получать рейз от дамы, которая пытается выбить из раздачи его короля.

Ожидание от ставки в одну единицу с тузом составит:

$$\begin{aligned} \langle X, \text{бет } 1 \rangle &= p(\text{игрок Y делает колл})(\text{размер ставки}) + \\ &+ p(\text{игрок Y делает рейз с дамой})(\text{размер рейза}) \end{aligned}$$

$$\langle X, \text{бет } 1 \rangle = (3/5)(1/2)(1) + (1/15)(1/2)(2)$$

$$\langle X, \text{бет } 1 \rangle = 11/30$$

Примечание от переводчика: Первое слагаемое в этом выражении уже было разобрано выше - оптимальной стратегией игрока Y против ставки в одну единицу будет колл с $3/5$ королей, которые окажутся в его диапазоне ровно половину раз (если мы знаем, что у игрока X туз).

Ожидание от чека с тузом:

$\langle X, \text{чек} \rangle = p(\text{игрок } Y \text{ блефует}) \text{ (размер ставки)}$

$$\langle X, \text{чек} \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(2)$$

$$\langle X, \text{чек} \rangle = \frac{1}{3}$$

Значит, ставка с тузом добавляет к ожидаемому выигрышу игрока $X \frac{1}{30}$ единицы.

Давайте сделаем паузу и посмотрим на то, к чему мы пришли.

Мы задались целью найти оптимальные стратегии для игры, где правилами разрешены два размера ставок и рейзов. Сперва мы думали, что ее можно решить точно так же, как и предыдущие игры, где короли никогда не делали ставку, а остальные руки старались извлечь максимальное математическое ожидание из соотношений вэлью бетов к блефам. По нашим расчетам оба игрока могли игнорировать ставку меньшего размера, таким образом, следуя стратегии из игры #4 для банка в 2 единицы. Однако оказалось, что игрок X мог улучшить свое ожидание, начав ставить одну единицу с королями.

Затем мы нашли оптимальное соотношение рейзов на вэлью и блефов для игрока Y . Но из-за этого игроку X стала доступна новая стратегическая возможность - бет одной единицы с тузами. Такая линия извлекает вэлью с королей и дам оппонента. Первые уравнивают против блефов, вторые делают рейз против возможных королей в диапазоне игрока X .

Во всех этих стратегиях игрок X будет ставить с дамами только чтобы защитить своих тузов и гарантировать им колл от королей оппонента, так что его суммарное ожидание от блефов с дамами будет равно нулю.

Игроку X нет разницы, что делать со своими королями: чек или бет (поскольку игрок Y играет рейзом с дамой оптимальное число раз). В то же время, его ожидание увеличивается на $\frac{1}{30}$ единицы от маленькой ставки со всеми тузами, а это значит, что чек с ними делать уже не имеет смысла (эта линия обладает меньшим ожидаемым выигрышем). Тогда нам необходимо найти оптимальное соотношение для ставки с королями и тузами, чтобы игрок Y продолжал делать блеф рейзы. Если мы будем ставить с королями слишком часто, то потеряем часть своего ожидания из-за блеф-рейзов; слишком редко - и наши тузы будут реже собирать вэлью.

В случае успеха своего блеф-рейза игрок Y получит 5 единиц (когда у игрока X король), но потеряет 2, если получит колл (когда у игрока X туз). Получается, чтобы сделать оппонента безразличным к таким рейзам, игрок X должен ставить с А и К в соотношении 5 к 2. Поскольку с тузами он поставит всегда, то ему нужно делать бет с 40% своих королей.

Получаем новую стратегию:

Игрок X:

- Со всеми тузами, 40% королей и 20% дам - ставить 1 единицу
- Если игрок Y делает мини-рейз - отвечать ре-рейзом со всеми тузами и скидывать королей
- Если игрок Y делает рейз на две единицы - отвечать ре-рейзом со всеми тузами и скидывать королей
- Со всеми оставшимися королями и дамами - делать чек; уравнивать с королями $\frac{4}{5}$ раз ставки в 1 единицу, а ставки в 2 единицы - $\frac{2}{3}$ раз

Примечание от переводчика: Мы получили 20% дам умножив частоту вэлью бетов (с тузами) на коэффициент а для банка в 4 единицы.

Игрок Y:

- Если игрок X ставит две единицы - колл со всеми тузами и $\frac{1}{3}$ королей, фолд со всеми дамами
- Если игрок X ставит одну единицу -мини-рейз со всеми тузами и $\frac{1}{15}$ дам, а также колл с $\frac{3}{5}$ королей
- Если игрок X делает чек - ставить две единицы со всеми тузами и $\frac{1}{3}$ дам, делать чек со всеми королями.

Итоговая цена игры составит:

Игрок X	Игрок Y	Действия	Результат	Вероятность	Ожидание
A	K	Б1 - К	1	3/30	3/30
A	K	Б1 - Ф	0	2/30	0
A	Q	Б1 - P1 - P - Ф	2	1/90	1/45
A	Q	Б1 - Ф	0	14/90	0
K	A	Б1 - P1 - Ф	-1	1/15	-1/15
K	A	Ч - Б2 - К	-2	1/15	-2/15
K	A	Ч - Б2 - Ф	0	1/30	0
K	Q	Б1 - P1 - Ф	-5	1/225	-1/45
K	Q	Б1 - Ф	0	14/225	0
K	Q	Ч - Б2 - К	2	1/45	2/45
K	Q	Ч - Б2 - Ф	-4	1/90	-2/45
K	Q	Ч - Ч	0	1/15	0
Q	A	Б1 - P1 - Ф	-1	1/30	-1/30
Q	A	Ч - Б2 - Ф	0	2/15	0
Q	K	Б1 - К	1	1/50	-1/50
Q	K	Б1 - Ф	4	1/75	+4/75
Q	K	Ч - Ч	0	2/15	0
Сумма				1	-1/10

Б1 - ставка в 1 единицу
Б2 - ставка в 2 единицы
К - колл
Ф - фолд
Ч - Чек
Р - рейз произвольного размера
Р1 - рейз в 1 единицу (мини-рейз)

Цена игры (для игрока X) по старой стратегии составляла $-\frac{1}{9}$, однако воспользовавшись новыми стратегическими возможностями, игрок X смог увеличить свое ожидание на $\frac{1}{90}$ до $-\frac{1}{10}$.

Примечание от переводчика: Здесь авторы считают цену игры не с позиции игрока Y (что требуется правилами теории игр), а с позиции игрока X. Ничего страшного в этом нет - мы просто берем уже известную нам цену игры для игрока Y (составляет $\frac{1}{9}$), и поскольку мы имеем дело с игрой с нулевой суммой, можно сказать, что цена игры для игрока X составляет $-\frac{1}{9}$.

Интересно отметить следующее: если бы игрок X знал, что стратегия оппонента никак не изменится от его подстроек, он бы предпочел всегда ставить две единицы с тузами. Однако ставка в одну единицу больше подходит для королей. Таким образом, ему приходится выбирать между эксплуатацией со стороны оппонента (если он будет ставить по две единицы с тузами) и сбалансированным бетсайзингом.

Нужно запомнить

- Важно не игнорировать возможные структуры оптимальных стратегий, даже если они кажутся маловероятными. Так, в этой главе для решения более сложной игры мы воспользовались результатами и закономерностями, выведенными в прошлых примерах. И в какой-то момент могло показаться, что мы нашли правильный ответ. Однако только более глубокий анализ и сравнение ожидания всех возможных линий помогли нам прийти к абсолютно новой структуре решения.
 - Найденная стратегия игры с королем выбивается из привычной модели, где все ставки на ривере должны быть либо вэлью бетами, либо блефами. Действительно, эта линия не подпадает ни под одну из категорий, поэтому мы введем для нее новый термин - **упреждающая ставка**. Фактически, игрок X делает бет, чтобы не дать своему оппоненту максимизировать ожидание от блефа с дамами. В свою очередь, игрок Y может ответить блеф-рейзом, однако в таком случае тузы игрока X получат больше вэлью. Такая стратегия становится возможной в игре с произвольными размерами ставок, когда один из участников может поставить меньше, чем хотел бы его оппонент.
 - Упреждающая ставка - отличный пример ситуации, где определенная линия обладает отрицательным ожиданием, но все равно оказывается лучше своей альтернативы (еще более убыточной). При этом общее ожидание от стратегии с упреждающей ставкой также возрастает. Вполне вероятно, что оптимальная стратегия для безлимитного Холдема предполагает такие ставки на ривере.
 - Интересной особенностью этой игры является тот факт, что хотя игрок X и делает упреждающую ставку с королем, он всегда скидывает на рейз (при том, что его оппонент иногда блефует с дамами). Это происходит из-за того, что в диапазоне рейза у игрока Y тузов окажется гораздо больше. Как вы можете помнить из прошлых глав, игроку X нужно было делать колл, чтобы удерживать оппонента от частого блефа, в то время как здесь доля блефов оказывается очень незначительной. Кроме того, игрок Y пытается сделать своего оппонента безразличным не к коллу с королем, а к ставке с ним.
-

Глава 16

Маленькие ставки, большие банки: $[0,1]$ игры без фолдов

В этой главе мы возвращаемся к играм $[0,1]$, с которых началось наше знакомство с серьезным покерным анализом. Такие игры тем важнее, поскольку именно они больше всего похожи на реальный покер из-за широкого спектра возможных рук, а также пороговой структуры решений.

Все игры, которые мы рассмотрим ниже, не предусматривают возможность фолда ни для одного из участников. Следствием этого правила является отсутствие диапазона для блефа как у игрока X , так и у игрока Y (поскольку критерием успешности блефа является фолд оппонента). Мы уже сталкивались с подобной ситуацией, когда рассматривали пример из лимитного покера в главе 11.

Игры без фолдов позволяют лучше понять методы извлечения вэлью с сильными руками.

Для начала мы решим самую примитивную $[0,1]$ игру без фолдов, где игроки могут сделать только одну ставку (но не рейз). В ней игрок X должен решить, какие руки он хочет ставить на вэлью, а игрок Y - что он хочет делать в ответ на чек своего оппонента. Если один из игроков сделает ставку, другой обязан уравнивать с любой рукой.

Пример 16.1 - $[0,1]$ игра #4

- Игра на полной улице
- Ни один из игроков не может сделать фолд
- Одна ставка

Из правил следует, что в этой игре возможны только три сценария:

- Игрок X ставит - Игрок Y делает колл
- Игрок X делает чек - Игрок Y ставит - Игрок X делает колл
- Игрок X делает чек - Игрок Y делает чек

Очевидно, что игрок X всегда будет иметь диапазон для ставки. Причем эти руки никогда не окажутся слабее тех, с которыми он будет делать чек, ведь игрок Y никогда не скинет свои карты.

Если игрок X сделает чек, то его оппонент поставит со всеми руками, которые бы поставил игрок X - в таком случае ему (игроку Y) гарантировано положительное математическое ожидание. Плюс он может поставить с сильнейшей половиной оставшихся комбинаций. Тогда он получит нейтральное ожидание, если рука игрока X попадет в тот же промежуток, а если окажется хуже - выиграет одну ставку.

Стратегия игрока Y будет выглядеть следующим образом:

- Если игрок X ставит - колл с любой рукой
- Если игрок X делает чек - бет со всеми руками, которые бы игрок X поставил сам, плюс 50% от его диапазона чека.

Примечание от переводчика: Это решение должно быть интуитивно понятно, поскольку игрок X будет ставить на вэлью с достаточно сильным диапазоном, плюс, как мы уже узнали из прошлых глав, в играх без фолдов игрок Y должен ставить с половиной диапазона чека своего оппонента.

Как должен ответить игрок X ?

Игрок Y получает вэлью когда его оппонент делает чек. В противном случае, правила обязывают его уравнивать ставку игрока X . Тогда, чтобы не дать оппоненту возможность эксплуатировать себя, игрок X должен ставить со всеми своим диапазоном. В таком случае игра будет иметь одинаковое ожидание для обоих участников.

Теперь давайте посмотрим на эту игру с другой стороны. В $[0,1]$ играх для описания стратегии мы использовали пороги, и, как ни странно, даже в такой игре без фолдов мы также можем найти им применение.

Введем следующую параметризацию:

- Порог x_1 разделяет стратегии бет и чек для игрока X .
- Порог y_1 разделяет стратегии бет и чек для игрока Y (в случае чека его оппонента).

Если игрок X хочет играть по оптимальной стратегии, то он должен подобрать такое значение для своего порога, чтобы игрок Y не смог улучшить свое ожидание, изменяя значение y_1 , и наоборот. Таким образом, каждый участник игры будет стараться сделать своего оппонента безразличным к выбору действия.

Стоит отметить, что мы все еще имеем дело с экс-шоудаун вэлью - то есть мы принимаем в расчет только ожидание от сделанных ставок (без учета банка).

Составим уравнение безразличия для точки y_1 :

Рука игрока X	Вероятность	$\langle Y, \text{бет} \rangle$	Ожидание	$\langle Y, \text{чек} \rangle$	Ожидание
$[0, x_1]$	x_1	N/A	N/A	N/A	N/A
$[x_1, y_1]$	$y_1 - x_1$	-1	$(x_1 - y_1)$	0	0
$[y_1, 1]$	$1 - y_1$	+1	$(1 - y_1)$	0	0
Сумма			$x_1 - 2y_1 + 1$		0

Примечание от переводчика: В графе руки игрока X от 0 до x_1 стоит N/A (фактически - прочерк), поскольку с этими руками игрок X всегда будет делать бет. Но для существования y_1 нужно, чтобы игрок X сделал чек (тогда игрок Y может принять решение о ставке или чеке). Поэтому случай $[0, x_1]$ не рассматривается.

По аналогии с примером 11.3, мы можем утверждать, что в уравнении безразличия суммарное ожидание от ставки должно быть равно суммарному ожиданию от чека:

$$0 = x_1 - 2y_1 + 1$$

$$2y_1 = x_1 + 1$$

Следующая точка - x_1 :

Рука игрока Y	Вероятность	<X, бет>	Ожидание	<X, чек>	Ожидание
$[0, x_1]$	x_1	-1	x_1	-1	x_1
$[x_1, y_1]$	$y_1 - x_1$	+1	$(y_1 - x_1)$	+1	$y_1 - x_1$
$[y_1, 1]$	$1 - y_1$	+1	$(1 - y_1)$	0	0
Сумма			$1 - 2x_1$		$y_1 - 2x_1$

Снова приравниваем ожидания от чека и ставки:

$$1 - 2x_1 = y_1 - 2x_1$$

$$y_1 = 1$$

Подставим полученное значение в первое уравнение:

$$2 y_1 = x_1 + 1$$

$$2 = x_1 + 1$$

$$x_1 = 1$$

Получается, что наши рассуждения действительно были верными - оба порога находятся в точке 1, а это значит, что игрок X должен ставить 100% раз.

Пример 16.2 - $[0, 1]$ игра #5

Следующая игра разрешает участникам делать рейзы на вэлью:

- Игра на полной улице
- Две ставки
- Чек/Рейз делать нельзя
- Ни один из игроков не может сделать фолд

Важное замечание, которое стоит сделать для этой игры, заключается в том, что

хотя здесь и присутствует порог y_2 (между бетом и рейзом), порога x_2 не существует, поскольку игрок X не может сделать чек/рейз. Однако если он поставит, то игрок Y повысит с определенной частью своих рук.

В предыдущем примере мы показали, что игрок X должен ставить со всеми своим диапазоном - так игрок Y лишается возможности эксплуатировать его стратегию. Однако в этой игре игрок Y может делать рейз, поэтому лучшей линией для всех слабых рук игрока X будет чек и колл.

Зададим новую параметризацию:

$$0 < y_2 < x_1 < y_1 < 1$$

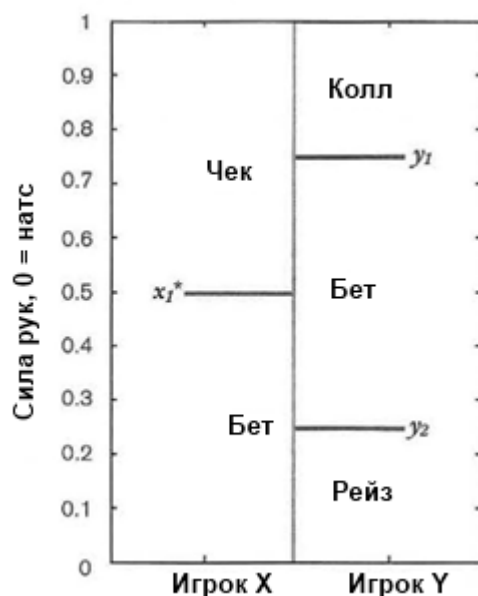


Рисунок 16.1. Структура стратегии для [0,1] игры #5

Из этой параметризации следует, что оптимальная стратегия для рассматриваемого случая будет иметь следующий вид: игрок X ставит с какой-то частью своих рук; игрок Y в свою очередь, делает рейз с чуть более узким диапазоном. Но в случае чека от игрока X, его оппонент поставит с бóльшим количеством комбинаций.

Составим и решим уравнения безразличия для каждого из порогов.

Здесь мы немного упростим привычный алгоритм - вместо прямого сравнения ожидания от различных действий в пороговых точках, мы будем указывать только разницу между ними, а затем приравняем ее к нулю (иными словами, такое уравнение покажет, что разницы между действиями нет).

В точке y_2 (порог между коллом и рейзом против ставки игрока X):

Рука игрока X	<Y, колл>	<Y, рейз>	Разница	Произведение
[0, y_2]	-1	-2	1	y_2
[y_2 , x_1]	+1	+2	-1	$-1(x_1 - y_2)$
Сумма				$2y_2 - x_1$

$$2y_2 - x_1 = 0$$

$$y_2 = x_1/2$$

Получается, игрок Y должен делать рейз с половиной от диапазона, с которым игрок X будет ставить. Здесь применимо то же объяснение, которые мы дали в игре без фолдов на половине улицы. Если диапазон игрока X состоит из некоего количества рук, которые он не может скинуть, то игрок Y должен делать рейз (в примере из главы 11 мы имели дело с ситуацией Чек-Бет, здесь - с Бет-Рейз) ровно с половиной рук из этого диапазона.

Более того, даже в играх, когда игрок X может сделать ре-рейз, диапазон бета игрока X и диапазон рейза игрока Y находятся в строго определенном соотношении. Назовем его R:

$$y_2 = Rx_1$$

Значение R показывает долю рук от диапазона игрока X, с которой его оппонент должен сделать ре-рейз. В нашем случае R равно $1/2$, поскольку игрок X не может ответить ре-рейзом. Интересно, что когда правила в игре без фолдов ограничивают количество рейзов, для последнего из них R всегда будет равно $1/2$.

Идем к следующей точке - x_1 . Игрок X вынужден ставить с более сильным диапазоном из-за возможного рейза со стороны оппонента:

Рука игрока Y	<X, чек/колл>	<X, бет>	Разница	Произведение
[0, y_2]	-1	-2	+1	y_2
[y_2 , x_1]	-1	-1	0	0
[x_1 , y_1]	-1	-1	0	0
[y_1 , 1]	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$y_2 - 1 + y_1$

Как вы можете заметить, составленное уравнение безразличия не зависит от x . Фактически это говорит о том, что область рейза в оптимальной стратегии игрока Y должна быть равна области ответного чека (после чека игрока X).

$$y_2 = 1 - y_1$$

В точке y_1 уже знакомая нам закономерность - игрок Y должен ставить с половиной диапазона чека своего оппонента.

Рука игрока X	<Y, чек>	<Y, бет>	Разница	Произведение
$[0, x_1]$	N/A	N/A	N/A	N/A
$[x_1, y_1]$	0	-1	+1	$y_1 - x_1$
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-1(1 - y_1)$
Сумма				$2y_2 - x_1 - 1$

$$2y_2 - x_1 - 1 = 0$$

$$y_1 = (1 + x_1)/2$$

Имеем три уравнения и три порога:

$$y_2 = Rx_1$$

$$y_2 = 1 - y_1$$

$$y_1 = (1 + x_1)/2$$

Первые два уравнения содержат в правой части y_2 , значит, мы можем составить из них одно и вывести y_1 :

$$Rx_1 = 1 - (1 + x_1)/2$$

$$x_1 = \frac{1}{1 + 2R}$$

Нам уже известно, что $R = 1/2$. Тогда:

$$x_1 = 1/2$$

$$y_1 = 1/4$$

$$y_2 = 3/4$$

Давайте удостоверимся в том, что найденная нами стратегия является оптимальной. Главный критерий оптимальности - невозможность одностороннего улучшения ожидания ни одним из игроков.

Пусть игрок X получил некую руку x , которая находится в промежутке от 0 до $1/4$. С ней он может либо сделать чек, либо поставить. В последнем случае возможны следующие исходы:

- У игрока Y рука лучше, чем x , игрок X проигрывает две ставки (вероятность: $p = x$)
- У игрока Y рука хуже, чем x , но лучше $1/4$, игрок X выигрывает две ставки (вероятность: $p = 1/4 - x$)

- У игрока Y рука хуже $\frac{1}{4}$, игрок X выигрывает одну ставку (вероятность: $p = \frac{3}{4}$)

$$\langle Y, \text{игрок X ставит} \rangle = (x)(2) + (\frac{1}{4} - x)(-2) + (\frac{3}{4})(-1)$$

$$\langle Y, \text{игрок X ставит} \rangle = 4x - \frac{5}{4}$$

Если игрок X делает чек с рукой между 0 и $\frac{1}{4}$.

- У игрока Y рука лучше, чем x , игрок X проигрывает ставку (вероятность: $p = x$)
- У игрока Y рука хуже, чем x , но лучше $\frac{1}{4}$, игрок X выигрывает ставку (вероятность: $p = \frac{1}{4} - x$)
- У игрока Y рука хуже $\frac{1}{4}$, но лучше $\frac{3}{4}$ игрок X выигрывает ставку (вероятность: $p = \frac{1}{2}$)
- У игрока Y рука хуже $\frac{3}{4}$, ожидание игрока X нейтрально (вероятность $p = \frac{1}{4}$)

$$\langle Y, \text{игрок X делает чек} \rangle = (x)(1) + (\frac{1}{4} - x)(-1) + (\frac{1}{2})(-1)$$

$$\langle Y, \text{игрок X делает чек} \rangle = 2x - \frac{3}{4}$$

Второе выражение оказывается больше первого только если:

$$2x - \frac{3}{4} > 4x - \frac{5}{4}$$

$$x < \frac{1}{4}$$

Примечание от переводчика: Это значит, что ожидание игрока Y оказывается больше, если игрок X делает чек с руками ниже $\frac{1}{4}$. Естественно, игрок X должен стараться минимизировать ожидание своего оппонента.

Таким образом, для игрока X ставка с руками в диапазоне от 0 до $\frac{1}{4}$ имеет более высокое ожидание, нежели чек. Значит, игрок X никак не может улучшить свою стратегию. Остальные пороги можно проверить в схожем ключе.

Кстати, в этом примере цена игры для игрока Y будет положительной благодаря позиционному преимуществу. Мы еще вернемся к этой теме в главе 18.

Пример 16.3 - $[0,1]$ игра #6

- Игра на полной улице
- Игроки могут делать рейзы и ре-рейзы до бесконечности, причем размер рейза равен одной ставке.
- Чек/Рейз делать нельзя
- Ни один из игроков не может сделать фолд

Эта игра очень похожа на рассмотренную выше, однако здесь игроки могут делать рейзы столько раз, сколько им захочется. Причем по оптимальной стратегии один из участников рано или поздно остановится и сделает колл.

Для этой игры пороги можно задать следующим образом.

Пусть x_1 будет порогом между чеком и ставкой. Поскольку по правилам игры чек/рейз делать нельзя, то после чека игрока X , стратегия его оппонента будет обладать лишь порогом y_1 (колл или рейз). Как мы уже убедились в предыдущем примере, y_1 будет находиться ровно на середине отрезка между x_1 и 1, поскольку это последняя ставка, и игрок X не может делать рейз. Нам также известно, что игроки никогда не станут блефовать, делая n -ый ре-рейз с руками ниже соответствующего порога.

Однако если игрок X все же поставит, это приведет к бесконечной цепочке рейзов, а, значит, и порогов. Естественно, первым из них будет y_2 , который разделяет колл и рейз для игрока Y . Порог ре-рейза для игрока X (x_3) будет находиться левее y_2 , порог y_4 - еще левее и так далее.

Таким образом, наша параметризация принимает вид:

$$0 < y_{2n} < x_{2n-1} < \dots < y_2 < x_1 < y_1 < 1$$

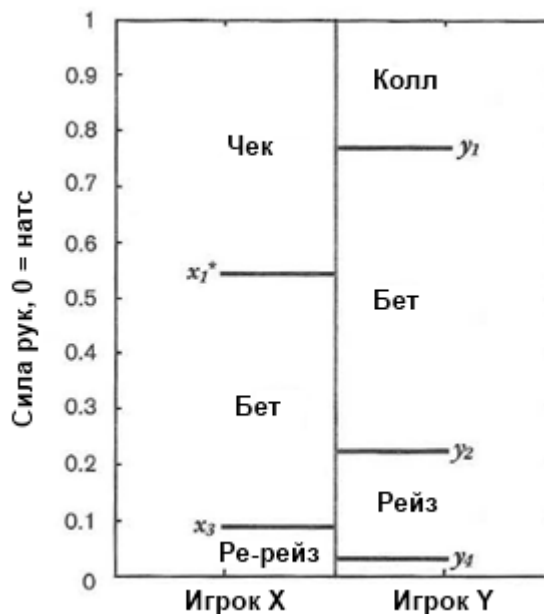


Рисунок 16.2. Структура стратегии для [0,1] игры #6

Эту игру можно назвать симметричной. Для начала, давайте рассмотрим случай, когда игрок X делает ставку. Его оппонент ответит рейзом с некой частью своих рук. Мы уже знаем отношение этих величин, оно задается R:

$$y_2 = Rx_1$$

Однако в этой игре R не равно $1/2$, ведь игрок X может сделать ре-рейз.

В таком случае, у игрока Y будет диапазон $[0, Rx_1]$, а игрок X захочет повысить еще раз с какой-то частью диапазона своего оппонента. Причем с точки зрения игрока X это решение ничем не будет отличаться от решения игрока Y на предыдущем рейзе.

$$x_3 = Ry_2$$

Теперь игрок Y снова должен определиться с тем, что он хочет делать против ре-рейза от игрока X. И снова он будет руководствоваться константой R. Причем для $n > 1$ будет верно следующее:

$$y_n = Rx_{n-1} \text{ (} y_3, y_5 \text{ и т.п. не существуют)}$$

$$x_n = Ry_{n-1} \text{ (} x_2, x_4 \text{ и т.п. не существуют)}$$

Решение для этой является ответом на вопрос: «С каким диапазоном мне стоит делать рейз, если мой оппонент может ответить ре-рейзом, при этом ни один из нас не собирается скидывать свою руку?» Если мы найдем значение R, то найдем и оптимальную стратегию для такой ситуации.

Теперь давайте рассмотрим случай, когда игрок X делает чек. Мы уже знаем, что

его оппонент поставит со всеми руками лучше, чем x_1 , а также с половиной рук хуже:

$$y_1 = (1+x_1) / 2$$

Кроме того, уравнение безразличия из прошлого примера оказывается применимым и здесь (поскольку игра все еще не предусматривает возможность Чек/Рейза). Поэтому для игрока Y область рейза y_2 будет в точности равна его области чека:

$$y_2 = 1 - y_1$$

Получим:

$$y_2 = 1 - (1 + x_1)/2$$

$$2Rx_1 = 2 - 1 - x_1$$

$$x_1 = 1/(2R + 1)$$

Используя это значение, мы можем найти пороги y_2 , x_3 , y_4 и так далее через R. Более того, мы можем выразить через R и y_1 .

Остается только один вопрос: чему равно R? Здесь нам потребуется еще пара уравнений безразличия.

Для игрока Y в точке y_2 (между рейзом и коллом):

Рука игрока X	<Y, рейз>	<Y, колл>	Разница	Произведение
[0, x_3]	-3	-1	+2	$2x_3$
[x_3 , y_2]	-2	-1	+1	$y_2 - x_3$
[y_2 , x_1]	+2	+1	-1	$-1(x_1 - y_1)$
Сумма				$x_3 + 2y_2 - x_1$

$$x_3 + 2y_2 - x_1 = 0$$

Это уравнение зависит сразу от трех порогов, однако мы легко можем выразить каждый из них через R и x_1 :

$$R^2x_1 + 2Rx_1 - x_1 = 0$$

$$R^2 + 2R - 1 = 0$$

$$R = \sqrt{2} - 1$$

Как вы можете помнить, в прошлых главах мы окрестили $\sqrt{2} - 1$ «золотым сечением» в покере.

Получаем следующее решение:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1/(1+2r) && \approx 0.5469 \\
y_1 &= (1/(1+2r) + 1)/2 = (1+r)/(1+2r) && \approx 0.7735 \\
y_2 &= r/(1+2r) && \approx 0.2265 \\
x_3 &= r^2/(1+2r) && \approx 0.0938 \\
y_n &= r^{n-1}/(1+2r) \quad (\text{для четных } n > 1) \\
x_n &= r_{n-1}/(1+2r) \quad (\text{для нечетных } n > 2)
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим гораздо более сложную игру.

Пример 16.4 - [0,1] игра #7

- Игра на полной улице
- Две ставки
- Игрок X может делать Чек/Рейз
- Ни один из игроков не может сделать фолд

В примере 16.2, где Чек/Рейз был запрещен правилами игры, мы отметили, что порога x_2 не существовало. Здесь перед нами все та же игра, но с дополнительным порогом.

Для того, чтобы найти решение, нам необходимо определить, с каким диапазоном игрок X будет делать Чек/Рейз. Очевидно, что делать это он будет с руками лучше, чем y_1 , иначе он потеряет в математическом ожидании (по сравнению с коллом). Кроме того, игрок X никогда не должен делать Чек/Рейз с рукой слабее, чем его собственный порог ставки. Мы уже не раз обсуждали, что эта стратегия является доминируемой.

Может показаться, что игрок X должен всегда делать Чек/Рейз со своими сильнейшими руками, однако на самом деле, любая стратегия игрока X, которая предполагает правильный диапазон для Чек/Рейза с руками старше y_2 будет ко-оптимальной. Введем следующую параметризацию:

$$0 < x_2 < y_2 < x_1 < y_1 < 1$$

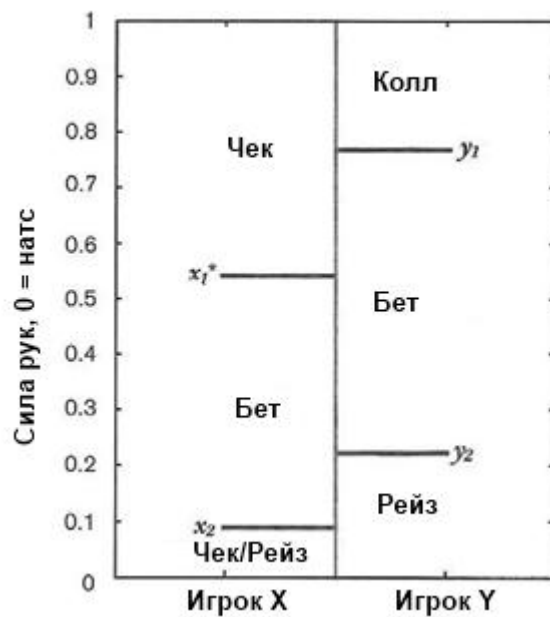


Рисунок 16.3. Структура стратегии для [0,1] игры #7

Получим следующие стратегии:

Игрок X:

Чек и рейз с диапазоном $[0, x_2]$.

Вэлью бет с диапазоном $[x_2, x_1]$.

Чек и колл с $[x_1, 1]$.

Игрок Y:

Если оппонент поставил, рейз на вэлью с $[0, y_2]$.

Если оппонент поставил, колл с $[y_2, 1]$.

Если оппонент сделал чек, вэлью бет с $[0, y_1]$.

Если оппонент сделал чек, ответный чек с $[y_1, 1]$.

Нам остается лишь составить уравнения безразличия для всех названных порогов:

Для игрока X в точке x_2 (между чек/рейзом и бетом):

Рука игрока Y	<X, чек/рейз>	<X, бет>	Разница	Произведение
$[0, y_2]$	-2	-2	0	0
$[y_2, y_1]$	+2	+1	+1	$y_1 - y_2$
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$2y_1 - y_2 - 1$

$$2y_1 - y_2 - 1 = 0$$

$$y_2 = 2y_1 - 1$$

Для игрока Y в точке y_2 (между рейзом и коллом):

Рука игрока X	<Y, рейз>	<Y, колл>	Разница	Произведение
[0, x_2]	N/A	N/A	N/A	N/A
[x_2 , y_2]	-2	-1	+1	$y_2 - x_2$
[y_2 , x_1]	+2	+1	-1	$-1(x_1 - y_2)$
[x_1 , 1]	N/A	N/A	N/A	N/A
Сумма				$2y_2 - x_1 - x_2$

$$2y_2 - x_1 - x_2 = 0$$

$$y_2 = (x_1 + x_2)/2$$

Для игрока X в точке x_1 (между чек/коллом и ставкой):

Рука игрока Y	<X, чек/колл>	<X, бет>	Разница	Произведение
[0, y_2]	-1	-2	+1	y_2
[y_2 , y_1]	-1	-1	0	0
[y_1 , 1]	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$y_2 - 1 + y_1$

$$y_2 - 1 + y_1 = 0$$

$$y_2 = 1 - y_1$$

Для игрока Y в точке y_1 (между бетом и чеком):

Рука игрока X	<Y, чек>	<Y, бет>	Разница	Произведение
[0, x_2]	0	-2	+2	$+2x_2$
[x_2 , x_1]	N/A	N/A	N/A	N/A
[x_1 , y_1]	0	-1	-1	$-1(y_1 - x_1)$
[y_1 , 1]	0	+1	+1	$1 - y_1$
Сумма				$2x_2 + 2y_2 - x_1 + 1$

$$2x_2 + 2y_2 - x_1 + 1 = 0$$

$$2y_1 = 1 + x_1 - 2x_2$$

Теперь у нас есть четыре уравнения безразличия и мы можем выразить через них четыре переменные:

$$2y_1 = 1 + x_1 - 2x_2$$

$$y_2 = (x_1 + x_2)/2$$

$$y_2 = 2y_1 - 1$$

$$y_2 = 1 - y_1$$

$$2y_1 - 1 = 1 - y_1$$

$$y_1 = 2/3$$

$$y_2 = 1/3$$

$$4/3 = 1 + x_1 - 2x_2$$

$$1/3 = (x_1 + x_2)/2$$

$$x_1 = 2/3 - x_2$$

$$4/3 = 1 + 2/3 - 3x_2$$

$$3x_2 = 1/3$$

$$x_2 = 1/9$$

$$x_1 = 5/9$$

$$y_2 = 1/3$$

$$y_1 = 2/3$$

Чем эта игра отличается от рассмотренной нами в примере 16.2 (без чек/рейзов)? Вполне ожидаемо, что игрок Y ставит с более узким диапазоном после чека своего оппонента, поскольку теперь существует вероятность получить чек/рейз, в то время как в игре #5 игра заканчивалась сразу после его бета.

Однако чек/рейз существенно меняет стратегию и для игрока X. В примере 16.2 он мог делать чек и колл с руками близкими к $1/2$ (ведь диапазон для ставки у его оппонента начинался с $3/4$). Здесь же они теряют свое вэлью - игрок Y больше не может делать бет со средними руками. Так что игроку X придется ставить и с руками хуже порога $1/2$. Это, в свою очередь, дает игроку Y возможность рейзить на вэлью с более широким диапазоном, поскольку и диапазон бета игрока X становится слабее (он делает чек с какой-то частью своих лучших рук).

Все вышесказанное отражается и в найденных нами порогах для игры #7:

Порог	Игра #5	Игра #7
x_1	$1/2$	$5/9$
y_1	$3/4$	$2/3$
y_2	$1/4$	$1/3$

Последняя игра, которую мы рассмотрим в рамках этой главы, весьма похожа на игру #6, однако на этот раз мы не будем запрещать игроку X делать чек/рейз.

Пример 16.5 - [0,1] игра #8

- Игра на полной улице
- Игроки могут делать рейзы и ре-рейзы до бесконечности, причем размер рейза равен одной ставке.
- Игрок X может делать Чек/Рейз
- Ни один из игроков не может сделать фолд

Как и в игре #6, здесь мы сталкиваемся с бесконечным числом порогов, а это значит, что одними уравнениями безразличия нам не обойтись. Поэтому мы снова прибегнем к сложным степенным уравнениям.

Введем параметризацию для рассматриваемой игры:

Для любого положительного n будем считать, что $0 < x_{n+1} < y_{n+1} < x_n < y_n < 1$

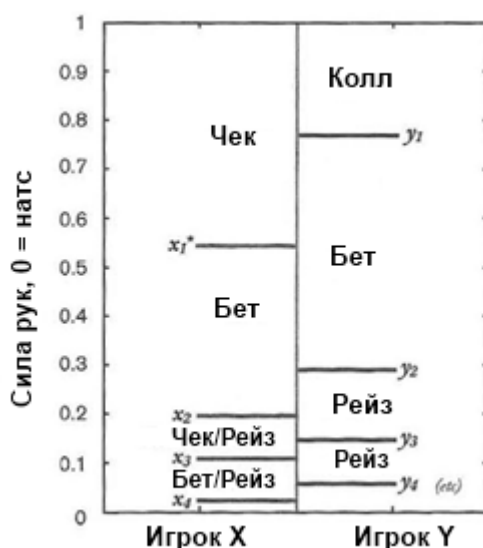


Рисунок 16.4. Структура стратегии для [0,1] игры #8

Начнем с уравнений безразличия для порогов игрока X:

В точке x_1 :

$$y_2 = 1 - y_1 \quad (\text{то же самое, что и в игре \#6})$$

В точке x_2 (безразличие между чек/рейзом и бетом):

Рука игрока Y	<X, чек/рейз>	<X, бет>	Разница	Произведение
$[0, y_3]$	-3	-2	-1	$-y_3$
$[y_2, y_1]$	+2	+1	+1	$y_1 - y_2$
$[y_1, 1]$	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$-y_3 + 1 - 2y_1 - y_2$

$$-y_3 + 1 - 2y_1 - y_2 = 0$$

$$y_3 + y_2 + 1 = 2y_1$$

Подставим известное нам значение y_2 , получим:

$$y_3 + 1 - y_1 + 1 = 2y_1$$

$$y_3 + 2 = 2y_1$$

В точке x_3 (безразличие между бет-рейзом и чек/рейзом):

Рука игрока Y	<X, бет/ре-рейз>	<X, чек/рейз>	Разница	Произведение
[0, y_4]	-4	-3	-1	$-y_4$
[y_3 , y_2]	+3	+2	+1	$y_2 - y_3$
[y_2 , y_1]	+1	+2	-1	$-1(y_1 - y_2)$
[y_1 , 1]	+1	0	+1	$1 - y_1$
Сумма				$-y_4 - y_3 + 2y_2 - 2y_1 + 1$

$$-y_4 - y_3 + 2y_2 - 2y_1 + 1 = 0$$

$$y_4 + (y_1 - y_2) = (y_2 - y_3) + (1 - y_1)$$

В точке x_4 (безразличие между чек/рейз/ре-рейзом и бет/ре-рейзом):

Рука игрока Y	<X, бет/ре-рейз>	<X, чек/рейз>	Разница	Произведение
[0, y_5]	-5	-4	-1	$-y_5$
[y_4 , y_3]	+4	+3	+1	$y_3 - y_4$
[y_3 , y_2]	+2	+3	-1	$-(y_2 - y_3)$
[y_2 , y_1]	+2	+1	+1	$y_1 - y_2$
[y_1 , 1]	0	+1	-1	$-(1 - y_1)$
Сумма				$-y_5 + 2y_3 - y_4 - 2y_2 + 2y_1 + 1$

$$-y_5 + 2y_3 - y_4 - 2y_2 + 2y_1 + 1 = 0$$

$$(y_3 - y_4) + (y_1 - y_2) = y_5 + (y_2 - y_3) + (1 - y_1)$$

Мы можем обобщить это уравнение для произвольного x_n , где n нечетное:

$$y_{n+1} + (y_{n-2} - y_{n-1}) + (y_{n-4} - y_{n-3}) [...] + [y_1 - y_2] = (y_{n-1} - y_n) + (y_{n-3} - y_{n-2}) + [...] + (1 - y_1)$$

Для четных n :

$$(y_{n-1} - y_n) + (y_{n-3} - y_{n-2}) [...] + [y_1 - y_2] = y_{n+1} + (y_{n-2} - y_{n-1}) + (y_{n-4} - y_{n-3}) + [...] + (1 - y_1)$$

Давайте посмотрим на пороги x_6 и x_7 . Уравнения безразличия для них будут выглядеть следующим образом:

$$(y_5 - y_6) + (y_3 - y_4) + (y_1 - y_2) = y_7 + (y_4 - y_5) + (y_2 - y_3) + (1 - y_1)$$

$$y_8 + (y_5 - y_6) + (y_3 - y_4) + (y_1 - y_2) = (y_6 - y_7) + (y_4 - y_5) + (y_2 - y_3) + (1 - y_1)$$

Интересно, что мы можем вычесть второе уравнение из первого, тогда получим:

$$y_8 = -2y_7 + y_6$$

Очевидно, что то же самое мы можем сделать для любых значений n . Пусть мы рассматриваем некие пороги $k + 1$ и k :

$$y_{k+2} + (y_{k-1} - y_k) + (y_{k-3} - y_{k-2}) [...] + (y_1 - y_2) = (y_k - y_{k+1}) + (y_{k-2} - y_{k-1}) + (y_{k-4} - y_{k-3}) + [...] + (1 - y_1)$$

$$(y_{k-1} - y_k) + (y_{k-3} - y_{k-2}) + [...] + (y_1 - y_2) = y_{k+1} + (y_{k-2} - y_{k-1}) + (y_{k-4} - y_{k-3}) + [...] + (1 - y_1)$$

Снова находим их разность:

$$y_{k+2} = -2y_{k+1} + y_k$$

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} - y_k = 0 \quad (16.1)$$

Такие уравнения называются **разностными**, их решение требует несколько более сложной математики. Поэтому сейчас мы просто приведем готовый ответ, а в приложении к этой части дадим для него подробное обоснование:

$$y_n = r^n / (1 - r) \quad (\text{для } r > 0)$$

Это выражение полностью описывает стратегию игрока Y . Так, порог y_1 будет равен $1/(1 - r)$. В игре #6 стратегии обоих игроков были связаны коэффициентом R - порог y_n был равен ry_{n-1} , и так далее. Здесь же это применимо только для игрока Y :

$$y_n = ry_{n-1}$$

Теперь давайте обратимся к стратегии игрока X , которую можно найти в схожем ключе, однако решение будет несколько более сложным. Так, нашей целью будет определение x_n , однако в случае с игроком Y нам не приходилось учитывать влияние первых порогов (и соответствующих им областей) на пороги более высокого уровня. Поэтому поскольку игрок X всегда выбирает между бетом и чек/рейзом, мы столкнемся с первыми трудностями уже на пороге y_1 .

Безразличие для игрока Y в точке y_1 :

Рука игрока X	<Y, чек>	<Y, бет>
[y ₁ , 1]	0	+1
[x ₁ , y ₁]	0	-1
[x ₃ , x ₂]	0	-2
[x ₅ , x ₄]	0	-2
[x ₇ , x ₆]	0	-2
[...]		
[x _{2k+1} , x _{2k}]	0	-2

$$1 - y_1 = (y_1 - x_1) + 2(x_2 - x_3) + 2(x_4 - x_5) + 2(x_6 - x_7) + [...] + 2(x_{2k} - x_{2k+1}) \quad (k \rightarrow \infty)$$

На этом пороге игрок Y выбирает между чеком и бетом. Он выиграет одну ставку, если игрок X не станет ставить со слабой рукой; но потеряет две, когда его оппонент задумал чек/рейз с верхней частью своего диапазона.

В точке y₂:

Рука игрока X	<Y, рейз>	<Y, колл>
[y ₂ , x ₁]	+2	+1
[x ₂ , y ₂]	-2	-1
[x ₄ , x ₃]	0	-2
[x ₆ , x ₅]	0	-2
[x ₈ , x ₇]	0	-2
[...]		
[x _{2n} , x _{2n+1}]	0	-2

$$x_1 - y_2 = (y_2 - x_2) + 2(x_3 - x_4) + 2(x_5 - x_6) + 2(x_7 - x_8) + [...] + 2(x_{2k} - x_{2k+1}) \quad (k \rightarrow \infty)$$

Снова обобщим для точки y_n:

Рука игрока X	<Y, рейз>	<Y, колл>
[y _n , x _{n-1}]	+2	+1
[x _n , y _n]	-2	-1
[x _{n+2} , x _{n+1}]	0	-2
[x _{n+4} , x _{n+3}]	0	-2
[...]		
[x _{2n} , x _{2n+1}]	0	-2

$$x_{n-1} - y_n = (y_n - x_n) + 2(x_{n+1} - x_{n+2}) + 2(x_{n+3} - x_{n+4}) + [...] + 2(x_{2k} - x_{2k+1}) \quad (k \rightarrow \infty)$$

Давайте на секунду вернемся к y₁ - вполне очевидно, что это уравнение является частным случаем от только что выведенного y_n, где x₀ = 1 (игрок X никогда не будет блефовать в игре, где его оппонент не может скинуть свои карты)

Давайте рассмотрим это уравнение для двух произвольных значений: k и $k + 1$:

$$x_{k-1} - y_k = (y_k - x_k) + 2(x_{k+1} - x_{k+2}) + 2(x_{k+3} - x_{k+4}) + [...]$$

$$x_k - y_{k+1} = (y_{k+1} - x_{k+1}) + 2(x_{k+2} - x_{k+3}) + 2(x_{k+4} - x_{k+5}) + [...]$$

Сложив их, мы увидим, что члены со старшими k исключат друг друга из конечного уравнения (из-за противоположных знаков). Получим:

$$x_{k+1} - y_k + x_k - y_{k+1} = y_k - x_k + y_{k+1} + x_{k+1}$$

$$x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = 2y_k + 2y_{k+1}$$

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2y_{k+1} + 2y_{k+2}$$

Формула для y_n нам уже известна:

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2(r^{k+1})/(1 - r) + 2(r^{k+2})/(1 - r)$$

$$r/(1 - r) = (\sqrt{2} - 1)/(2 - \sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$$

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = \sqrt{2}(r^k) + \sqrt{2}(r^{k+1})$$

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = \sqrt{2}(r^k)(1 + r)$$

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2r^k \quad (16.2)$$

Для решения этого уравнения нам также потребуется более сложный математический аппарат, поэтому вывод ответа мы приведем в приложении к этой главе. Стратегия игрока X будет выглядеть следующим образом:

$$x_n = r^{n-1}[(2r - 1)(-1)^n + 1]/2$$

Общее решение для игры:

$$x_n = r^{n-1}[(2r - 1)(-1)^n + 1]/2$$

$$y_n = r^n/(1 - r)$$

Интересно сравнить эти две стратегии. Так, игрок Y должен играть в достаточно прямолинейной манере: его пороги находятся в экспоненциальной зависимости. В ответ на чек он поставит со всеми руками старше $r/(1 - r)$, а диапазон его рейзов задается коэффициентом R .

В свою очередь, каждый порог игрока X лежит между порогами его оппонента, начиная с x_1 в $1 - r$. Однако они распределены неравномерно из-за того, что изначальная область чек/рейза игрока X гораздо уже, чем область бета. Обратите внимание на $(-1)^n$ в формуле - эта часть оказывается положительной при четных значениях n , и отрицательной при нечетных. Действительно, игроку X имеет смысл ставить с очень сильными руками, поскольку тогда он может получить значительное вэлью от рейза оппонента.

Порог (n)	y_n	x_n	y_n/x_n
0	1	1	1
1	0.707107	0.585786	$r/(1-r) + 1/2$
2	0.292893	0.171573	$r/(1-r) + 1$
3	0.12132	0.100505	$r/(1-r) + 1/2$
4	0.050253	0.029437	$r/(1-r) + 1$
5	0.020815	0.017244	$r/(1-r) + 1/2$

Кроме того, несколько интересных закономерностей проявляются и в диапазоне чека для игрока X:

$$\begin{aligned}
 x_0 \rightarrow x_1 : 1 - (1 - r) &= r \\
 x_2 \rightarrow x_3 : r^2 - r^2(1 - r) &= r^2(1 - (1 - r)) = r^3 \\
 x_4 \rightarrow x_5 : r^4 - r^4(1 - r) &= r^4(1 - (1 - r)) = r^5 \\
 x_{2n} \rightarrow x_{2n+1} : r^{2n} - r^{2n}(1 - r) &= r^{2n+1}
 \end{aligned}$$

Сумма этих выражений равна:

$$r \sum_{n=1}^{\infty} (r^2)^n$$

Значение r^2 будет меньше 1, так что сумма этой бесконечной последовательности будет равна $r(1 / (1 - r^2))$.

$$\begin{aligned}
 r^2 &= 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2} \\
 (\sqrt{2} - 1)/(1 - (3 - 2\sqrt{2})) &= 1/2
 \end{aligned}$$

Получается, в целом игрок X будет делать чек с половиной своих рук. Большинство из них сделает «плохой» колл (r от этого диапазона), а остальные переставят игрока Y.

Нужно запомнить

- В играх на полной улице без фолдов существует прямая зависимость между диапазонами участников.
- Если вы не можете получить ре-рейз, а оппонент не может скинуть свои карты, оптимальной стратегией будет бет (или рейз) с $\frac{1}{2}$ от тех рук, с которыми оппонент сделал чек (или бет).
- Если оппонент может сделать ре-рейз, то диапазон для ставки (рейза) существенно сузится. В случае с бесконечной последовательностью рейзов, он сводится к g рук.
- Игры без фолдов позволяют лучше понять, как мы можем извлечь вэлью с сильными руками.

Приложение к главе 16

Решение разностных уравнений

Уравнение 16.1:

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} - y_k = 0 \quad (16.1)$$

Это уравнение называется однородным (гомогенным) разностным уравнением второго порядка. Оно описывает зависимость между тремя последовательными порогами для игрока Y.

Все уравнения вида

$$y_{n+2} + cy_{n+1} + dy_n = 0$$

где c и d некие константы, имеют решение:

$$y_n = ar^n + bq^n \quad (16.1a)$$

где a и b некие константы, а r и q - различные реальные корни характеристического уравнения вида $x^2 + cx + d = 0$.

В нашем случае характеристическое уравнение примет следующую форму:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

или $x = -1 \pm \sqrt{2}$

Как вы уже знаете, $\sqrt{2} - 1$ является «золотым сечением». Таким образом, мы можем подставить значение r в решение разностного уравнения (формула 16.1a):

$$y_n = ar^n + b(-1 - \sqrt{2})q^n$$

Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$, y_n приближается к 0, поскольку игроку Y потребуется очень сильная рука, чтобы продолжать ставить ре-рейзы.

Однако второй член уравнения невозможно свести к нулю, за исключением случая, когда b равно 0. Получим упрощенное уравнение:

$$y_n = ar^n$$

Чтобы найти значение константы a, проанализируем уравнение для порога x_1 :

$$y_2 = 1 - y_1$$
$$ar^2 = 1 - ar$$

$$ar^2 + ar - 1 = 0$$

Поскольку мы уже знаем значение r , произведем следующую замену:

$$r^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$r^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1$$

$$r^2 = -2(\sqrt{2} - 1) + 1$$

$$r^2 = 1 - 2r$$

$$a(1 - 2r) + ar - 1 = 0$$

$$a - ar - 1 = 0$$

$$a(1 - r) = 1$$

$$a = 1/(1 - r)$$

Следовательно:

$$y_n = r^n / (1 - r)$$

Уравнение 16.2:

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2r^k \quad (16.2)$$

Здесь мы снова сталкиваемся с разностным уравнением второго порядка, однако поскольку его правая часть не равна нулю, оно называется неоднородным, поэтому его решение будет чуть более сложным.

Пусть Z - некое «частное решение», то есть решение для заданного значения k . Тогда решения для общего уравнения будут решениями для однородной вариации этого уравнения с прибавленным Z .

$$x_n = ar^n + bq^n + Z \quad (16.2a)$$

$$1 + 2x - x^2 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$p = 1 - \sqrt{2} = -r$$

$$q = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_n = a(-r)^n + b(1 + \sqrt{2})^n + Z$$

Теперь мы можем сделать предложение о том, как будет выглядеть частное решение для уравнения. Пусть Z имеет вид:

$$Z = cx^n$$

Для некоторых констант c и x .

Если мы подставим это значение в исходное уравнение 16.2, то получим:

$$x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 2r^k \quad (16.2)$$

$$\begin{aligned} cx^n + 2cx^{n+1} - cx^{n+2} &= 2r^n \\ cx^n(1 + 2x - x^2) &= 2r^n \end{aligned}$$

Здесь $(1 + 2x - x^2)$ будет константой (как мы условились выше), таким образом, $x = r$ будет решением для любого c :

$$\begin{aligned} cr^n(1 + 2r - r^2) &= 2r^n \\ c(1 + 2r - (1 - 2r)) &= 2 \\ c(4r) &= 2 \\ c &= r/2 \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение Z будет выглядеть так:

$$Z = (r/2)r^n$$

При n стремящимся к бесконечности, Z стремится к нулю. Также, используя логику из решения уравнения 16.1, мы можем утверждать, что второй член общего уравнения сходится к z при $b = 0$.

$$x_n = a(-r)^n + (r/2) r^n$$

Чтобы найти значение a , мы просто используем правило из игры, что $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} x_0 &= a(-r)^0 + (1/2)r r^0 \\ 1 &= a + 1/2 r \\ a &= (2r - 1)/2r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= ((2r - 1)/2r)(-1)^n + (1/2)r r^n \\ x_n &= r^{n-1}[(2r - 1)(-1)^n + 1]/2 \end{aligned}$$

Глава 17

Вспоминаем про блеф: $[0,1]$ игры с конечным банком

В главе 16 все рассмотренные нами примеры подчинялись правилу, которое обычно неприменимо в покере - ни один из игроков не мог скинуть свою руку. Важной чертой всех этих игр было полное отсутствие блефов: оба участника конструировали свои диапазоны только с целью извлечь максимальное вэлью с сильными руками.

В свою очередь, блефы в покере не только занимают одну из ключевых ролей, но также и делают игру гораздо более сложной. Поэтому ниже мы рассмотрим игры на полной улице с конечным размером банка, в чьих оптимальных стратегиях будут присутствовать области блефа.

Пример 17.1 - $[0,1]$ игра #9

- Игра на полной улице
- Остается одна ставка
- Размер банка - P единиц
- Размер ставки - 1 единица

Как вы можете помнить, когда мы решали первую $[0,1]$ игру с ограниченным банком в главе 11 (пример 11.2) помимо порога u_n (который был предметом нашего пристального внимания на протяжении всей главы 16), мы также рассматривали u_0 , порог между чек и блефом, а также x_1^* , порог между чек/коллом и чек/фолдом для игрока X . Причем как игрок Y , так и игрок X стремились блефовать со своими худшими руками и ставить на вэлью с лучшими.

В игре на полной улице игрок X может сделать бет, тем самым создавая в своей стратегии пороги x_1 и x_0 . В свою очередь, игрок Y должен добавить к своим порогам u_0^* , который будет разделять колл и фолд в ответ на ставку оппонента. Очевидно, что стратегия колла со слабейшими руками всегда будет доминирована стратегией фолда.

Исходя из вышесказанного, можем задать параметризацию для вероятного решения:

Стратегия игрока X будет состоять из следующих порогов:

- x_0 - порог между чек/фолдом и блефом
- x_1^* порог между чек/коллом и чек/фолдом
- x_1 порог между вэлью бетом и чек/коллом

Стратегия игрока Y также будет включать в себя три порога:

y_0 - порог между чеком и блефов (если игрок X сделает чек)
 y_1^* - порог между коллом и фолдом (если игрок X поставит)
 y_1 - порог между вэлью бетом и чеком (если игрок X сделает чек)

Что касается расположения этих порогов на отрезке от 0 до 1, основываясь на результатах анализа прошлых игр, мы можем предположить, что диапазон для ставки у игрока Y после чека оппонента будет шире, чем диапазон для ставки самого игрока X. Это значит, что $y_1 > x_1$. Как мы покажем чуть ниже, α , коэффициент, задающий отношение блефов к вэлью бетам (уравнение 11.1), в этом примере идентичен α в [0,1] игре #2 для обоих игроков. И поскольку области блефа будут равны αx_1 и αy_1 соответственно, мы можем поставить y_0 слева от x_0 .

Пороги колла для каждого из игроков будут находиться между порогами блефа и вэлью бета оппонента (таким образом будет достигаться безразличие). Тогда, $x_1 < y_1^* < x_0$ и $y_1 < x_1^* < y_0$. В свою очередь, зависимость между y_1^* и x_1^* не имеет никакого значения. Когда мы будем составлять уравнения безразличия для определенных порогов, мы будем принимать в расчет только один из них.

Наша параметризация приняла следующий вид:

$$0 < x_1 < y_1 < x_1^*, y_1^* < y_0 < x_0 < 1$$

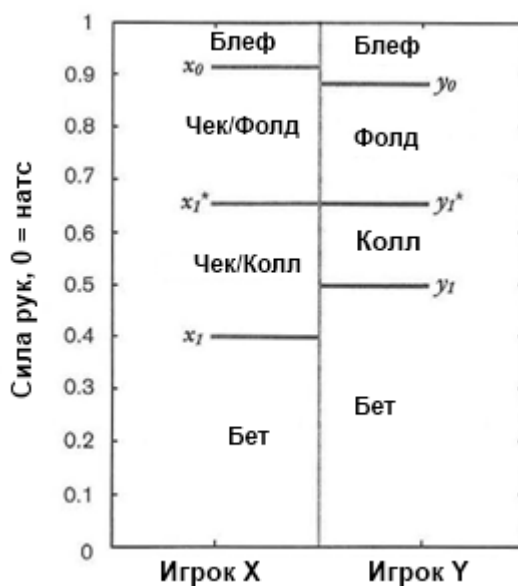


Рисунок 17.1. Структура стратегии для [0,1] игры #9

Остается только составить уравнения безразличия для каждого из этих порогов. Мы специально не стали включать в таблицы ниже отрезки, где рассматриваемые действия оказываются невозможными. Например, на пороге y_1 игрок Y должен выбрать между чеком и бетом, однако если рука оппонента попадает в область $[0, x_1]$ или $[x_0, 1]$, то ему придется принимать решение о колле или фолде. Значит, мы можем не рассматривать отрезки $[0, x_1]$ или $[x_0, 1]$ при составлении уравнения для точки y_1 .

Примечание от переводчика: С рук от $[0, x_1]$ и $[x_0, 1]$ игрок X ставит на вэлью и блефует соответственно. В этом случае игрок Y не может сделать чек или бет. В предыдущей главе авторы не исключали подобные ситуации из таблиц, а ставили напротив них N/A.

В точке y_1 (безразличие между чеком и бетом):

Рука игрока X	<Y, бет>	<Y, чек>	Разница	Произведение
$[x_1, y_1]$	-1	0	-1	$-(y_1 - x_1)$
$[y_1, x_1^*]$	+1	0	+1	$x_1^* - y_1$
$[x_1^*, x_0]$	0	0	0	0
Сумма				$-2y_1 + x_1 + x_1^*$

$$-2y_1 + x_1 + x_1^* = 0$$

$$y_1 = (x_1 + x_1^*)/2$$

Вполне понятно, что игрок Y будет ставить со всеми руками, с которыми бы его оппонент поставил на вэлью. Кроме того, он поставит с половиной рук, которые игрок X будет разыгрывать через чек/колл. Таким образом порог y_1 будет находиться точно посередине между $[x_1, x_1^*]$.

В точке y_1^* (безразличие между фолдом и коллом):

Рука игрока X	<Y, колл>	<Y, фолд>	Разница	Произведение
$[0, x_1]$	-1	0	-1	$-x_1$
$[x_0, 1]$	$+(P+1)$	0	$+(P+1)$	$(P+1)(1-x_0)$
Сумма				$(P+1)(1-x_0) - x_1$

$$(P+1)(1-x_0) - x_1 = 0$$

$$1-x_0 = \alpha x_1$$

Это уравнение показывает зависимость между величиной областей вэлью бета (x_1) и блефа ($1-x_0$).

В точке x_1^* (безразличие игрока X между чек/коллом и чек/фолдом):

Рука игрока Y	<X, чек/колл>	<X, чек/фолд>	Разница	Произведение
$[0, y_1]$	-1	0	-1	$-y_1$
$[y_0, 1]$	$P+1$	0	$+(P+1)$	$(P+1)(1-y_0)$
Сумма				$(P+1)(1-y_0) - y_1$

$$(P+1)(1-y_0) - y_1 = 0$$

$$1-y_0 = \alpha y_1$$

В точке y_0 (безразличие между чеком и блефом):

Рука игрока X	<Y, бет>	<Y, чек>	Разница	Произведение
$[x_1, x_1^*]$	-1	0	-1	$-(x_1^* - x_1)$
$[x_1^*, y_0]$	+P	0	+P	$(P)(y_0 - x_1^*)$
$[y_0, x_0]$	0	0	0	0
Сумма				$-(x_1^* - x_1) + (P)(y_0 - x_1^*)$

$$\begin{aligned}
 -(x_1^* - x_1) + (P)(y_0 - x_1^*) &= 0 \\
 x_1^* - x_1 &= P(y_0 - x_1^*) \\
 x_1^* &= \alpha(py_0 + x_1) \\
 x_1^* &= (1 - \alpha)(y_0) + \alpha x_1 + (x_1 - x_1) \\
 x_1^* &= (1 - \alpha)(y_0) - (1 - \alpha)x_1 + x_1 \\
 x_1^* &= (1 - \alpha)(y_0 - x_1) + x_1
 \end{aligned}$$

Во второй $[0,1]$ игре, которую мы рассмотрели (пример 11.3), коэффициент α не только задавал соотношение блефов к вэлью бетам, но также и частоту колла для блеф-кэтчеров, $(1 - \alpha)$. Однако в нашем случае игрок X принимает решение о колле уже после ставки с некоторой частью своих рук, отсюда и другой вид уравнения.

Диапазон чека игрока X находится на отрезке от x_1 до x_0 , причем блеф-кэтчерами могут считаться только руки старше порога y_0 . Значит, мы можем утверждать, что порог x_1^* равен $(1 - \alpha)$ от рук, способных побить блеф, плюс x_1 .

В точке x_0 (безразличие для игрока X между чек/фолдом и блефом):

Рука игрока Y	<X, чек/фолд>	<X, бет>	Разница	Произведение
$[0, y_1^*]$	0	-1	+1	y_1^*
$[y_1^*, x_0]$	0	+P	-P	$(-P)(x_0 - y_1^*)$
$[y_0, 1]$	-P	0	-P	$-P(1 - x_0)$
Сумма				$(P + 1)y_1^* - P$

$$\begin{aligned}
 (P + 1)y_1^* - P &= 0 \\
 y_1^* &= P/(P+1) \\
 y_1^* &= 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

Здесь мы сталкиваемся с аналогичной ситуацией. Единственное отличие заключается в том, что диапазон игрока Y (после ставки оппонента) все еще ничем не ограничен, поэтому ему следует уравнивать с $1 - \alpha$ всех возможных рук. Мы не говорим «способных побить блеф», поскольку решение игрока X заключается в выборе между блефом и чек/фолдом. Если он предпочтет второе, то все равно проиграет слабым рукам игрока Y, так как они войдут в диапазон блефа последнего.

В точке x_1 (безразличие между чек/коллом и бетом):

Рука игрока Y	<X, бет>	<X, чек/колл>	Разница	Произведение
$[0, x_1]$	-1	-1	0	x_1
$[x_1, y_1]$	+1	+1	0	0
$[y_1, y_1^*]$	+1	0	+1	$y_1^* - y_1$
$[y_1^*, y_0]$	0	0	0	0
$[y_0, 1]$	0	+1	-1	$(1 - y_0)$
Сумма				$y_1^* - y_1 - (1 - y_0)$

$$y_1^* - y_1 - (1 - y_0) = 0$$

$$y_1^* - y_1 = 1 - y_0$$

Если игрок X сделает чек, то он выиграет одну ставку, поскольку заставит своего оппонента блефовать. Если он поставит, то получит вэлью от тех рук игрока Y, которые бы не поставили сами, но в то же время вынуждены делать колл. Значит, в оптимальной стратегии размер этих двух областей будет одинаковым (таким образом достигается безразличие).

Мы получили шесть уравнений, каждое из которых описывает некую часть оптимальной стратегии. Теперь нам остается лишь решить несложную систему уравнений и найти значения всех шести порогов.

$$y_1 = (x_1^* + x_1)/2$$

$$1 - x_0 = \alpha x_1$$

$$1 - y_0 = \alpha y_1$$

$$x_1^* = (1 - \alpha)(y_0 - x_1) + x_1$$

$$y_1^* = 1 - \alpha$$

$$y_1^* - y_1 = 1 - y_0$$

$$y_1 = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$$

$$x_1 = (1 - \alpha)^2/(1 + \alpha)$$

$$y_0 = (1 + \alpha)^2/(1 + \alpha)$$

$$x_0 = 1 - \alpha(1 - \alpha)^2/(1 + \alpha)$$

$$y_1^* = 1 - \alpha$$

$$x_1^* = 1 - \alpha$$

Давайте рассмотрим полученные пороги на конкретном примере. Пусть размер банка составляет 4 единицы. Тогда согласно уравнению 11.1, $\alpha = 1/5$. Как мы уже знаем, игрок X будет ставить на вэлью с определенной частью своих рук, на что игрок Y ответит коллом с диапазоном, который чуть шире диапазона блефов игрока X. Если блеф оказывается успешным, игрок X заработает 4 ставки, если нет - потеряет одну. Таким образом, чтобы сделать своего оппонента

безразличным к блефу, игрок Y должен уравнивать в четыре раза чаще, чем фолдить - $\frac{4}{5}$ от общего распределения $[0,1]$ или $1 - \alpha$.

В то же время игрок X должен сбалансировать свои вэлью беты и блефы таким образом, чтобы игрок Y никак не мог его эксплуатировать. Например, если бы игрок X никогда не блефовал, его оппоненту следовало бы уравнивать лишь с весьма узким диапазоном. Тогда чтобы извлечь вэлью со своими натсами, игроку X придется ставить какое-то количество блефов, вынуждая оппонента делать колл с пограничными руками (которые находятся между порогом блефа и вэлью бета игрока X).

При банке в 4 единицы, игрок X проиграет с блефом одну единицу в случае колла от игрока Y , но выиграет 4, если его оппонент скинет карты. Чтобы его оппонент был безразличен к коллу, игроку X следует ставить на вэлью в четыре раза чаще, чем блефовать. Получаем порог αx_1 .

Как вы уже, наверное, поняли, если игрок X сделает чек, то игрок Y должен будет сбалансировать свои вэлью беты с блефами из диапазона $[y_0, 1]$.

Теперь давайте определим, как часто игрок X должен ставить на вэлью. На пороге между ставкой и чек/коллом, он может либо сделать бет и получить вэлью от игрока Y , когда рука последнего находится в промежутке между y_1 и y_1^* (здесь он уравнивает ставку с рукой хуже, но никогда не ставит сам); либо сделать чек и вынудить оппонента поставить с блефом из диапазона от y_0 до 1. И поскольку игрок X будет безразличным к выбору действия на этом пороге, область $[y_1, y_1^*]$ должна быть в точности равна $[y_0, 1]$.

Мы знаем, что размер последней области составляет αy_1 , а первой - $(1 - \alpha - y_1)$. Значит, мы легко можем составить и решить уравнение для y_1 (диапазон, с которым игрок Y поставит в ответ на чек оппонента). Как было показано в решении выше, этот порог равен $(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$. Подставим сюда размер банка в 4 единицы. Тогда y_1^* будет равен $\frac{4}{5}$, а $1 - y_0$ составит $\frac{1}{5}$ от y_1 . Получим $\frac{4}{5} - y_1 = \frac{1}{5} y_1$, или $y_1 = \frac{2}{3}$.

Таким же образом мы можем подтвердить решение для порогов x_1^* и x_1 .

Как вы можете помнить, в играх без фолдов мы вывели правило, что игрок Y должен ставить с половиной диапазона чека игрока X (при условии, что тот не может сделать рейз). Однако здесь, когда игрок Y выбирает между чеком и бетом в точке y_1 , он руководствуется несколько иным принципом. Так, он выиграет одну ставку, если рука игрока X находится между y_1 и x_1^* , но проиграет ставку, если она окажется в диапазоне от x_1 до y_1 . И поскольку эти две области должны быть одинакового размера, порог y_1 должен находиться ровно посередине между x_1 и x_1^* .

Иными словами:

Если ваш оппонент мог поставить, но вместо этого сделал чек (теперь он может сделать либо колл, либо фолд, но не рейз), оптимальной стратегией будет бет со всеми руками, которые бы оппонент поставил сам, а также с половиной рук из его диапазона колла.

Вполне очевидно, что эта концепция является следствием правила для игр без фолдов. В них оппонент не имел возможности скинуть свои карты, поэтому мы ориентировались на его диапазон чека. Однако в этом примере игрок X может сделать фолд, поэтому отправной точкой в анализе становится его диапазон колла.

Кроме того, игрок X должен выбрать порог x_1^* таким образом, чтобы защитить свой диапазон чека от блефов оппонента. Причем в этом случае он выбирает соответствующие руки не из всего распределения $[0,1]$, а лишь из $[x_1, x_0]$, ведь со всеми остальными руками он ставит сам. Получается, что он должен уравнивать с $(1 - \alpha)$ рук из диапазона $[x_1, x_0]$. А это, в свою очередь, значит, что порог x_1^* должен отстоять от x_1 на $1 - \alpha$.

При банке в 4 единица, $y_2 = 2/3$ находится посередине между x_1 и x_1^* , в то время как x_1^* находится на расстоянии $4/5$ от x_1 к $1 - (1/5)x_1$. Пусть c - расстояние между x_1 и x_0 , a - расстояние между x_1 и y_1 , b - расстояние между 0 и x_1 , тогда верно следующее:

$$\begin{aligned}b &= 2/3 - \alpha \\1 &= 4/5 b + 5/2 \alpha \\b &= 4/5 (1 - 5/2 \alpha) = 4/5 - 2\alpha \\4/5 - 2\alpha &= 2/3 - \alpha \\ \alpha &= 2/15 \\b &= 8/15 \\c &= 1/3\end{aligned}$$

Получаем в точности те же результаты, что и для формул выше ($b = x_1$).

Понимание описанной выше игры очень важно для решения более сложных примеров из этой главы. Мы постарались максимально доступно раскрыть смысл каждого из выведенных нами уравнений, поэтому в дальнейшем не будем тратить время на столь подробные объяснения.

Следующая игра во многом похожа на $[0,1]$ игру #6 (пример 16.3), где игроки могут делать конечное число рейзов.

Пример 17.2 - [0,1] игра #10

- Игра на полной улице
- Осталось две ставки
- Чек/рейз делать нельзя
- Размер банка - P единиц
- Размер ставки - 1 единица

Как вы уже могли догадаться, в этой игре мы снова обратимся к порогу y_2 . Кроме того, мы введем последний элемент, который необходим для решения игр [0,1] в общем виде - диапазон блеф рейза.

Представьте, что игрок X сделал ставку. Как должна выглядеть стратегия игрока Y ? Самым простым ответом (но необязательно верным) будет следующий: с натсами он сделает вэлью рейз, с чуть более слабыми руками - уравнивает, а с нижней частью распределения - скинет.

Но если это так, как тогда следует игроку X реагировать на рейз? Вполне очевидно, что правильной контрстратегией будет фолд со всеми руками младше порога рейза оппонента. Значит, игрок Y обязан защищать свои вэлью рейзы некоторым количеством блефов.

Следующий вопрос, на который мы должны дать ответ: какие руки будут составлять его диапазон блеф-рейза?

Давайте подумаем о природе блефов. Когда правилами игры разрешена только одна ставка, нам следует блефовать с худшими руками из-за того, что они обладают минимальной ценностью на вскрытии и всегда проиграют, если мы сделаем чек вдогон.

Что изменится, если наш оппонент уже сделал ставку, и у нас появилась возможность сделать рейз? Как мы уже отметили выше, нам имеет смысл повышать со всеми сильнейшими руками и уравнивать со средними, поскольку мы хотим использовать их вполне неплохое шоудаун вэлью. Поэтому наш диапазон для блефа будет состоять исключительно из рук, в которых мы не видим никакой ценности на вскрытии. Причем его размер будет зависеть от размера ставки, размера банка, а также нашего вэлью диапазона.

Скорее всего ваша интуиция сейчас вам подсказывает, что в таком случае мы должны следовать тем же правилам, что и в примерах, где была разрешена только одна ставка - то есть блефовать с наихудшими руками. Вообще говоря, когда мы спускаемся ниже порога y_1^* , с точки зрения оптимальной стратегии игроку Y уже нет разницы, с чем блефовать. Но здесь есть несколько оговорок. Во-первых, мы будем скидывать все слабые руки, которые не войдут в диапазон рейза. Во-вторых, поскольку мы говорим об области ниже порога колла, то даже с

верхней частью этого диапазона мы не увидим шоудаун. Поэтому стратегия рейза с сильнейшими руками из числа тех, с которыми мы не можем делать колл, всегда будет доминирующей.

Таким образом, мы получили новый порог. При этом мы должны немного пересмотреть наше представление о порогах для игр с рейзами:

y_n^* теперь означает порог между коллом n -ой ставки и блефом или фолдом, если $(n+1)$ -ая ставка и фолд разрешены правилами.

$y_n^\#$ означает порог между диапазоном блефа для n -ой ставки и диапазоном фолда на $(n-1)$ -ую ставку.

Примечание от переводчика: Представьте себе ситуацию, когда игрок X сделал ставку, и игроку Y нужно принимать решение. Если он может либо сделать фолд, либо ответить рейзом (то есть $(n+1)$ -ой ставкой), то порог y_n^* будет разделять области колла ставки игрока X и области, где мы либо блефуем, либо скидываем свои карты.

В свою очередь, порог $y_n^\#$ разделяет диапазон фолда на ставку игрока X и диапазон рейза с блефом.

Как мы покажем чуть ниже, пороги y_n^* и $y_{n+1}^\#$ очень тесно связаны друг с другом.

В этой игре мы впервые сталкиваемся с разветвленным древом решений, и это оказывает существенное влияние на используемую параметризацию. Иными словами, здесь для каждого возможного сценария будет существовать свой набор порогов, не связанный с другими ветвями, поскольку в одной отдельно взятой ситуации мы будем иметь дело лишь с определенной линией розыгрыша.

Например, порог x_1^* появляется только если игрок X делает чек. В таком случае y_1^* и $y_2^\#$ оказываются бессмысленными. И хотя мы сможем найти расположение точки x_1^* относительно y_1^* , никакого практического значения это иметь не будет.

Введем параметризацию для $[0,1]$ игры #10:

$0, y_2, x_2^*, x_1, y_1, x_1^*, y_1^*, y_2^\#, y_0, x_0, 1$

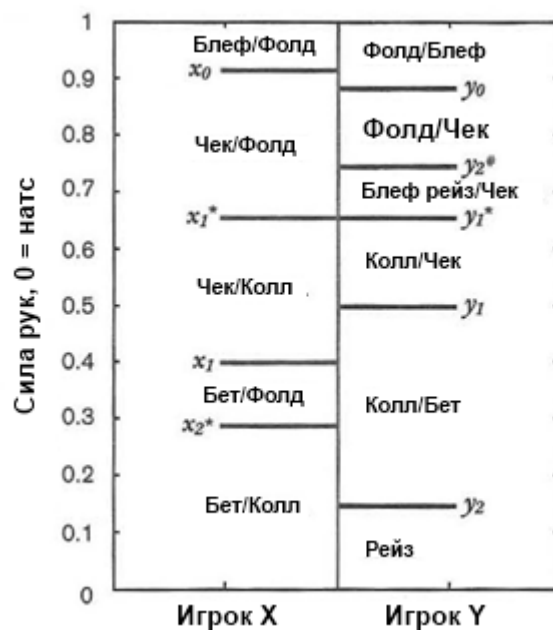


Рисунок 17.2. Структура стратегии для [0,1] игры #10

На языке стратегий она выглядит следующим образом:

Для игрока X:

Бет на вэлью и колл рейза с руками $[0, x_2^*]$.
 Бет на вэлью и фолд на рейз с руками $[x_2^*, x_1]$,
 Чек и колл ставки с руками $[x_1, x_1^*]$.
 Чек и фолд на ставку с руками $[x_1^*, x_0]$.
 Блеф с руками $[x_0, 1]$.

Для игрока Y:

Если игрок X поставил - рейз на вэлью с руками $[0, y_2]$.
 Если игрок X поставил - колл с руками $[y_2, y_1^*]$
 Если игрок X поставил - блеф рейз с руками $[y_1^*, y_2^#]$
 Если игрок X поставил - фолд с руками $[y_2^#, 1]$,

Если игрок X сделал чек - бет на вэлью с руками $[0, y_1]$.
 Если игрок X сделал чек - чек с руками $[y_1, y_0]$.
 Если игрок X сделал чек - блеф с руками $[y_0, 1]$.

Еще раз внимательно прочитайте и осмыслите все перечисленные выше стратегии. Это очень важно для понимания более сложных игр. Например в одной из следующих задач мы столкнемся с порогом $x_4^{\#}$, который отделяет диапазон для третьего рейза (если игрок X решил сделать чек/рейз) от диапазона фолда на второй рейз.

Во всех прошлых играх, где была разрешена только одна ставка, мы пользовались фундаментальной константой α , равной $1/(P + 1)$. Она задавала соотношения блефов и вэлью бетов, а также диапазоны коллов. Однако в ситуациях, где возможны две ставки (бет и рейз), мы имеем дело с более крупными банками; кроме того, стоимость блефа может возрасти до двух ставок. Поэтому мы введем новую константу:

$$\alpha_2 = 1/(P + 3)$$

В более сложных играх мы будем использовать общий вид α_n (для n -ых ставок):

$$\alpha_n = 1/(P + (2^n - 1))$$

(17.1)

Из этого уравнения можно легко получить коэффициент α , выведенный нами для $[0,1]$ игры #2 (при $n = 1$). В целях упрощения наших расчетов мы будем считать, что α (без каких-либо индексов) это и есть α_1 .

В этой игре перед нами стоит совсем непростая задача - найти 9 переменных. Для каждой из них мы составим свое уравнение безразличия., а затем попытаемся решить полученную систему уравнений.

Безразличие для игрока Y в точке y_2 :

Рука игрока X	<Y, колл>	<Y, рейз>
$[0, y_2]$	-1	-2
$[y_2, x_2^*]$	+1	+2
$[x_2^*, x_1]$	+1	+1
$[x_0, 1]$	+1	+1

Игрок Y проигрывает на одну ставку больше, если делает рейз против натсов своего оппонента. Но при этом и больше выигрывает, если игрок X уравнивает с рукой чуть слабее. Поскольку игрок X не может делать ре-рейз, игроку Y следует повышать ровно с половиной диапазона колла своего оппонента:

$$y_2 = x_2^* - y_2$$

$$y_2 = x_2^*/2$$

В точке y_1 мы сталкиваемся с той же самой ситуацией, что и в $[0,1]$ игре #9 (пример 17.1), поскольку игрок X все еще не может делать чек/рейз. Значит, и уравнение безразличия будет точно таким же:

$$y_1 = (x_1^* + x_1)/2$$

И снова u_1 должен находиться посередине между порогами колла и бета для игрока X.

Безразличие для игрока Y в точке u_1^* :

Рука игрока X	<Y, колл>	<Y, блеф рейз>
$[0, x_2^*]$	-1	-2
$[x_2^*, x_1]$	-1	$+(P+1)$
$[x_0, 1]$	+1	+1

$$x_2^* = (P + 2)(x_1 - x_2^*)$$

$$x_2^* = x_1(P + 2) / (P + 3)$$

$$x_2^* = (1 - \alpha_2)x_1$$

Здесь мы впервые сталкиваемся с применением α_2 в наших расчетах. Размер области ставки для игрока X (x_1) оказывается в прямой зависимости от его области бет/колл. Более того, ему следует выбирать линию бет/фолд ровно α_2 раз, поскольку он должен сделать своего оппонента безразличным к блеф рейзу. Заметьте, что мы используем α_2 из-за увеличившегося банка (после ставки игрока X и рейза игрока Y).

Безразличие для игрока Y в точке $u_2^{\#}$:

Рука игрока X	<Y, блеф рейз>	<Y, фолд>
$[0, x_2^*]$	-2	0
$[x_2^*, x_1]$	$+(P + 1)$	0
$[x_0, 1]$	+1	- P

Для начала, немного несложной алгебры:

$$2x_2^* = (P + 1)(x_1 - x_2) + (P + 1)(1 - x_0)$$

$$2x_2^* = (P + 1)(x_1 - x_2^* + 1 - x_0)$$

$$(P + 3)x_2^* = (P + 1)(x_1 + 1 - x_0)$$

$$\alpha x_2 = \alpha_2(x_1 + 1 - x_0)$$

$$\alpha(1 - \alpha_2)x_1 = \alpha_2(x_1 + 1 - x_0)$$

$$(\alpha/\alpha_2 - \alpha)x_1 = x_1 + 1 - x_0$$

Однако мы можем упростить левую часть этого уравнения:

$$\alpha/\alpha_2 = (1/(P + 1))/(1/(P + 3))$$

$$\alpha/\alpha_2 = (P + 3)/(P + 1)$$

$$\alpha/\alpha_2 = 1 + 2\alpha$$

Тогда получим:

$$(1 + \alpha)x_1 = x_1 + 1 - x_0$$

$$\alpha x_1 = 1 - x_0$$

Помните, мы говорили, что у игрока Y диапазон для блеф рейза в принципе может находиться в любой части его диапазона фолда? Мы все еще настаиваем на использовании недоминируемых стратегий, поэтому сейчас мы нашли безразличие между блеф рейзом и фолдом. Стоит отметить, правда, что мы могли бы использовать иную параметризацию и искать порог между коллом и фолдом. Тогда мы бы получили то же самое уравнение, без промежуточных упрощений, к которым нам пришлось прибегнуть чуть выше.

В очередной раз сталкиваемся со знакомым уравнением (пример 11.4 и далее), которое задает отношение между областью бета к области блефа для игрока X.

В точке y_0 мы можем использовать уравнение безразличия из игры #9 (пример 17.1). Причина та же - игрок X все еще не может делать чек/рейз.

$$x_1^* = (1 - \alpha) (y_0 - x_1) + x_1$$

Безразличие для игрока X в точке x_2^* :

Рука игрока Y	<X, бет/колл>	<X, бет/фолд>
$[0, y_2]$	-1	-2
$[y_1^*, y_2^\#]$	+2	-(P+1)

Заметьте, что в этом примере стратегии игрока X становятся несколько более сложными. Так, мы больше не можем говорить об отдельных действиях - мы вынуждены иметь дело с ожиданиями от линий розыгрыша, например: Бет/Колл, Бет/Фолд и т.п.

x_2^* - это один из новых порогов, разделяющий диапазоны колла и фолда в ответ на рейз. Игрок X потеряет одну ставку, если уравнивает против вэлью рейза своего оппонента, но выиграет, если там окажется блеф. Как мы увидим позже, поскольку блеф рейз будет стоить игроку Y две ставки, частота колла для игрока X будет выражаться в несколько необычной форме.

$$y_2 = (P + 3)(y_2^\# - y_1^*)$$

$$\alpha_2 y_2 = (y_2^\# - y_1^*)$$

Это уравнение фактически повторяет уравнение 11.4, но с поправкой на большее количество возможных ставок. По нему размер области блеф рейза $y_2^\# - y_1^*$ есть размер области вэлью рейза y_2 , умноженный на соответствующую константу α_2 . Как не сложно догадаться, правила, включающие в себя константу α , повторяются во всех $[0, 1]$ играх с конечным размером банка.

Безразличие для игрока X в точке x_1 :

Рука игрока Y	<X, бет/фолд>	<X, чек/колл>
$[0, x_1]$	-1	-1
$[x_1, y_1]$	+1	+1
$[y_1, y_1^*]$	+1	0
$[y_1^*, y_2^\#]$	-(P + 1)	0
$[y_2^\#, y_0]$	0	0
$[y_0, 1]$	0	+1

$$y_1^* - y_1 = (P + 1)(y_2^\# - y_1^*) + (1 - y_0)$$

Здесь мы получаем уравнение, описывающее зависимость области, с руками из которой игрок Y сделает колл, но никогда не поставит сам ($y_1^* - y_1$), от его областей блефа и блеф рейза. Фактически, это уравнение показывает последствия от различных вариантов розыгрыша для игрока X: он может либо сделать чек и попытаться поймать блеф своего оппонента, либо бет, но тогда появляется вероятность блеф рейза от игрока Y.

Уравнение безразличия для игрока X в точке x_1^* имеет уже привычный для нас вид:

$$1 - y_0 = \alpha y_1$$

А в точке x_0 :

Рука игрока Y	<X, чек/фолд>	<X, блеф>
$[0, y_2^\#]$	0	-1
$[y_2^\#, x_0]$	0	+P
$[x_0, 1]$	-P	0

$$y_2^\# = (x_0 - y_2^\#) (P) + (1 - x_0) (P)$$

$$(P + 1)y_2^\# = P$$

$$y_2^\# = 1 - \alpha$$

Это уравнение похоже на то, что мы получили для y_1^* в $[0,1]$ игре #9 (пример 17.1) - игрок Y будет скидывать α рук в ответ на ставку оппонента.

У нас есть девять уравнений, некоторые из них мы позаимствовали из уже решенных нами игр.

$$y_1 = (x_1^* + x_1)/2 \quad (17.2)$$

$$y_2 = x_2^*/2 \quad (17.3)$$

$$x_2^* = (1 - \alpha_2)x_1 \quad (17.4)$$

$$\alpha x_1 = 1 - x_0 \quad (17.5)$$

$$x_1^* = (1 - \alpha)(y_0 - x_1) + x_1 \quad (17.6)$$

$$\alpha_2 y_2 = (y_2^{\#} - y_1^*) \quad (17.7)$$

$$y_1^* - y_1 = (P + 1)(y_2^{\#} - y_1^*) + (1 - y_0) \quad (17.8)$$

$$1 - y_0 = \alpha y_1 \quad (17.9)$$

$$y_2^{\#} = 1 - \alpha \quad (17.10)$$

Теперь мы можем решить эту систему уравнений и найти значения всех порогов. Хорошая новость для вас заключается в том, что мы опустим большую часть упрощений, однако мы не можем пройти мимо одной очень важной зависимости, которая обнаруживается в ходе подстановок.

Мы можем объединить уравнения 17.3 и 17.4. Получим:

$$y_2 = x_1(1 - \alpha_2)/2 \quad (17.11)$$

Как и в игре #6 (пример 16.3), мы можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$y_2 = R x_1$$

Иными словами, мы получили зависимость между диапазоном ставки игрока X и диапазоном рейза игрока Y . Здесь $R = (1 - \alpha_2)/2$. Легко заметить, что при очень больших значениях P эта константа асимптотически приближается к $1/2$ - как раз это значение мы и рассматривали в $[0,1]$ игре #6.

Для того, чтобы решить эту громоздкую систему, мы должны свести все ее члены к y_1 и x_1 . Так, мы можем свести уравнения 17.2 и 17.6 к x_1^* , а затем приравнять их - в итоге получим одно выражение, содержащее в себе только x_1 и y_1 . Далее нам следует обратиться к уравнению 17.8.

Значение y_0 можно выразить через y_1 с помощью уравнения 17.9. В свою очередь, $y_2^{\#}$ является константой (как следует из уравнения 17.10).

В результате получим следующее:

$$x_1 = (1 - \alpha)^2 / [1 + \alpha + (2 - \alpha)(1 - \alpha_2)R] \quad (17.12)$$

Это уравнение играет очень важную роль в решении игр без чек/рейзов, поскольку оно работает и в играх, где разрешены три и более ставок. Дело в том, что дополнительные рейзы лишь меняют значение R , в то время как все зависимости между нижними порогами остаются неизменными. Как вы увидите в

следующих примерах, это уравнение значительно упростит решение игры с бесконечными рейзами.

Полное решение для всех порогов имеет вид:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= (1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha) / (7\alpha^2 + 9\alpha + 4) \\
 y_1 &= (1 - \alpha)(8\alpha^2 + 9\alpha + 3)/(1 + \alpha)(7\alpha^2 + 9\alpha + 4) \\
 y_1^* &= 1 - \alpha - \alpha_2((1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)/(7\alpha^2 + 9\alpha + 4)) \\
 y_2^\# &= 1 - \alpha \\
 y_0 &= 1 - \alpha(1 - \alpha)(8\alpha^2 + 9\alpha + 3)/(1 + \alpha)(7\alpha^2 + 9\alpha + 4) \\
 x_2^* &= 2(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)/(7\alpha^2 + 9\alpha + 4) \\
 x_1 &= 2(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)^2/(1 + \alpha)(7\alpha^2 + 9\alpha + 4) \\
 x_1^* &= 4(1 - \alpha)(2\alpha_2 + 2\alpha + 1)/(7\alpha^2 + 9\alpha + 4) \\
 x_0 &= 1 - 2\alpha(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)^2/(1 + \alpha)(7\alpha^2 + 9\alpha + 4)
 \end{aligned}$$

Давайте посмотрим на найденные пороги при различных размерах банка. В колонке справа рассмотрен случай при бесконечно маленьком P (в математике такие числа обозначаются буквой ε) - вполне ожидаемо, что в таком случае игрокам следует отказаться от каких-либо ставок.

Порог	$P = \infty$	$P = 1$	$P = 2$	$P = 9$	$P = \varepsilon (\sim 0)$
y_2	$1/4$	$2/41$	$2/21$	0.195573441	0
x_2^*	$1/2$	$4/41$	$4/21$	0.391146881	0
x_1	$1/2$	$16/123$	$5/21$	0.426705689	0
y_1	$3/4$	$76/246$	$279/630$	0.655203951	0
x_1^*	1	$20/41$	$68/105$	0.883702213	0
y_1^*	1	$20/41$	$68/105$	0.883702213	0
$y_2^\#$	1	$1/2$	$2/3$	0.9	0
y_0	1	$208/246$	$537/630$	0.934479605	0
x_0	1	$230/246$	$58/63$	0.957329431	0

Теперь самое время ответить на вопрос: что изменится, если игрок X получит возможность делать чек/рейз?

Пример 17.3 - [0,1] игра #11

- Игра на полной улице
- Осталось две ставки
- Игрок X может делать чек/рейз
- Размер банка - P единиц
- Размер ставки - 1 единица

В этой и последующих играх мы уже не будем так подробно расписывать весь процесс выведения уравнений безразличия для каждого порога. Как вы могли понять из примера выше, решения для игр с конечным размером банка могут оказаться достаточно громоздкими. Поэтому мы ограничимся лишь анализом отличий между стратегиями в уже рассмотренных играх и их более сложными аналогами.

Вместе с новой стратегической возможностью в этой игре появляются и новые пороги. Однако многие из них можно опустить, поскольку их зависимость друг от друга уже была изучена выше. Например, игрок X теперь будет делать блефовый чек/рейз с руками между $x_2^\#$ и x_1^* . Но мы уже знаем, что размер этой области будет равен диапазону чек/рейза на вэлью (x_2), умноженного на соответствующую константу, α_2 . То же самое относится и к диапазонам бет/колл и бет/фолда для игрока Y - он будет скидывать $(1 - \alpha_2)$ своих вэлью бетов в ответ на рейз, делая своего оппонента безразличным блефу.

Наибольший интерес здесь представляют вэлью диапазоны обоих участников, поскольку изменения в них оказывают существенное влияние и на нижние пороги. Но так как мы уже знаем, в каких соотношения должны находиться эти области с вэлью порогами, мы можем не выписывать все уравнения безразличия, а сосредоточиться на более важных аспектах стратегий игроков.

Вполне очевидно, что в этой игре вероятность чек/рейза от игрока X будет оказывать существенное влияние на стратегию вэлью бетов игрока Y. Более того, затронутой окажется и его область вэлью рейзов, так как теперь игрока X скорее всего будет ставить с чуть более слабым диапазоном (ведь часть сильных рук наверняка окажется в его диапазоне чек/рейза). Как вы можете помнить, в игре без фолдов это повлекло за собой значительные сдвиги в стратегиях - игрок Y ставил с более узким диапазоном (из-за появившейся опасности чек/рейза), а игрок X, напротив, должен был делать бет гораздо чаще, чтобы получить вэлью от средних рук своего оппонента. Это, в свою очередь, заставляло игрока Y рейзить более либерально.

Интересно, что игры с и без чек/рейза напрямую связаны между собой. Давайте посмотрим на безразличие для игрока X в точке x_2 .

Рука игрока Y	<X, чек/рейз>	<X, ,бет/колл>
[0, x ₂]	-2	-2
[x ₂ , y ₂]	+2	+2
[y ₂ , y ₂ [*]]	+2	+1
[y ₂ [*] , y ₁]	+1	+1
[y ₁ , y ₁ [*]]	0	+1
[y ₁ [*] , y ₂ [#]]	0	+2
[y ₀ , 1]	+1	0

$$y_2^* - y_2 + (1 - y_0) = 2 (y_2^{\#} - y_1^*) + y_1^* - y_1$$

Найдем y_2^* - для этого нам нужно написать уравнение безразличия для порога $x_2^{\#}$:

Рука игрока Y	<X, чек/колл>	<X, блеф чек/рейз>
[0, y ₂ [*]]	-1	-2
[y ₂ [*] , y ₁]	-1	-(P + 1)
[y ₀ , 1]	+ 1	+1

$$y_2^* = (P + 2) (y_1 - y_2^*)$$

$$y_2^* = (1 - \alpha_2)y_1$$

Мы также знаем, что область $y_2^{\#} - y_1^*$ равна $\alpha_2 y_2$. Получим:

$$(1 - \alpha_2)y_1 - y_2 + (1 - y_0) = 2\alpha_2 y_2 + y_1^* - y_1$$

В игре без чек/рейза уравнение безразличия в точке x_1 выглядело следующим образом:

$$y_1^* - y_1 = (P + 1) (y_2^{\#} - y_1^*) + (1 - y_0)$$

Это уравнение задает безразличие игрока X к бет/фолду и чек/коллу на пороге x_1 . Если он сделает ставку, то не даст своему оппоненту возможность поставить на блеф, но выиграет одну единицу против рук, которые нехотя уравнивают и никогда не поставят сами. В то же время он также потеряет $(P + 1)$, если игрок Y решит сделать блеф рейз.

Примечание от переводчика: Это очень интересный результат, и такая замена действительно имеет место. Она аналогична тому, что вы могли видеть в главе 16 - там пороги x_1 для игр с и без чек/рейзов (но с ограничением по количеству допустимых рейзов) также были идентичны.

Произведем замену, получим:

$$(1 - \alpha_2)y_1 - y_2 = (P + 3)\alpha_2 y_2$$

$$(1 - \alpha_2)y_1 = 2y_2$$

$$y_2 = y_1(1 - \alpha_2)/2$$

В игре без чек/рейза соотношение $(1 - \alpha_2)/2$ действовало для y_2 и x_1 . Однако здесь оно применяется по отношению к порогам y_2 и y_1 . Как и в случае с играми из главы 16 (примеры 16.3 и 16.4), мы приходим к выводу, что r в играх с чек/рейзом задает последовательность не для двух игроков (y_2 , x_3 , y_4 , и т.д.), а только для порогов y_n .

Мы можем применить эту логику по цепочке и перейти к общему уравнению, описывающему поведение порога y_1 в рассматриваемой игре:

$$y_1 = (1 - \alpha)/[1 + \alpha + (1 - \alpha_2)R] \quad (17.13)$$

Как вы можете видеть, оно очень похоже на уравнение 17.12, но при этом включает в себя возможность чек/рейза.

Оставшаяся часть решения не представляет никакой сложности - нужно лишь выписать уравнения безразличия и решить их, а затем использовать выведенное выше уравнение, чтобы найти значения всех порогов.

В следующем примере мы обратимся к случаю с бесконечными рейзами.

Пример 17.4 - [0,1] игра #12

- Игра на полной улице
- Осталось две ставки
- Чек/Рейз делать нельзя
- Игроки могут делать любое количество рейзов и бетов
- Игроки могут скидывать свои карты

Для решения этой игры нам потребуются результаты из наших предыдущих примеров. Большинство уравнений безразличия здесь будут идентичны уже рассмотренным нами в [0,1] игре #10 (пример 17.2); более того, единственным уравнением, которое мы не сможем использовать, будет безразличие в точке y_2 . В той игре вторая ставка всегда была последней, причем игроку Y нужно было делать рейз с половиной диапазона колла своего оппонента. Однако в этом примере игрок X может ответить ре-рейзом, и мы обязаны это учесть.

Кроме того, нам следует привнести в параметризацию бесконечный ряд порогов для рейзов и ре-рейзов, который бы удовлетворял условиям задачи. Для каждого из таких порогов мы должны будем найти свое уравнение безразличия. Например, для любого n мы получим:

$$\alpha_n y_n = (y_n^\# - y_{n-1}^*)$$

Это уже знакомое нам отношение блефов к вэлью бетам, определяемое коэффициентом α соответствующего порядка.

Решая игру #10, мы получили ключевое уравнение, которое описывало порог x_1 для игр без чек/рейза.

$$(1 - \alpha)^2 = x_1[1 + \alpha + R(2 - \alpha)(1 - \alpha_2)]$$

Нам следует немного скорректировать одно уравнение, чтобы отразить следующую разницу между этими двумя играми:

$$y_2 = Rx_1$$

Если точнее, изменится значение R и только.

Таким образом, мы можем утверждать, что в общем виде уравнение 17.12 все еще в силе. Все, что нам нужно теперь сделать - это найти значение R для новой игры.

Обратимся примеру 16.4 - там при банке, стремящимся к бесконечности, значения α стремились к нулю. В той игре порог y_2 был равен $1/2$, также как и x_1 ($1/2$). Иными словами, значение R составляло $1/2$. Используя этот результат в формуле выше (при α и α_2 стремящихся к нулю), мы также получим $x_1 = 1/2$.

В игре с одной ставкой R было равно нулю, поскольку порога y_2 не существовало. В таком случае x_1 равно $(1 - \alpha)^2 / (1 + \alpha)$. Именно такой ответ мы и получили для $[0, 1]$ игры #9.

Но вернемся к нашему текущему примеру. Для тех, кто смог понять все выкладки из предыдущих решений, не составит труда предположить, что:

$$x_3^\# - x_2^* = \alpha_3 x_3$$

Размер n -ой области блефа должен составлять α_n от соответствующей вэлью области

$$x_3^\# = (1 - \alpha_2)x_1$$

Когда мы делаем n -ый рейз на вэлью, нам следует уравнивать ре-рейз (или делать ответный ре-рейз) с $(1 - \alpha_{n+1})$ из диапазона n -ого рейза, поскольку в противном случае оппонент сможет эксплуатировать вас своими блеф рейзами.

Безразличие в точке y_2 (первый порог, на котором рассматриваемая игра отличается от $[0,1]$ игры #6):

$$x_2^* - y_2 = y_2 + (P + 3)\alpha_3 x_3$$

Если игрок Y сделает вэлью рейз, когда рука его оппонента находится в пределах от y_2 до x_2^* , то он выиграет одну ставку. Однако он потеряет одну единицу, если у игрока X окажется рука лучше, чем y_2 , и $(P + 3)$ единиц, если игрок X сделает блеф ре-рейз с руками $x_3^{\#} - x_2^*$.

Решая это уравнение получим:

$$(1 - \alpha_2)x_1 - \alpha_3 x_3 = 2y_2 + (P + 3)\alpha_3 x_3$$

Заменяем все α на соответствующие им выражения:

$$x_1(P + 2)/(P + 3) = 2y_2 + x_3(P + 4)/(P + 5) \quad (17.14)$$

Это уравнение безразличия будет повторяться через каждые две ставки. Иными словами, уравнение 17.14 является частным случаем для последовательности порогов x_n, y_{n+1}, x_{n+2} и так далее.

Мы можем воспользоваться уже рассмотренным ранее принципом, что как только один из игроков делает второй рейз, игра становится абсолютно симметричной в плане соотношений различных порогов (с поправкой на возрастающий размер банка). Естественно, значения самих порогов будут отличаться, поскольку каждый раз мы будем использовать мультипликатор, идентичный уже знакомому нам r , однако с ростом размера банка значение этого мультипликатора также будет меняться. В силу этой зависимости мы будем называть его R_p . Тогда получим:

$$\begin{aligned} y_2 &= R_p x_1 \\ x_3 &= R_{p+2} y_2 \\ y_4 &= R_{p+4} x_3 \end{aligned}$$

И так далее

Произведем соответствующие замены в уравнении 17.14:

$$x_1(P + 2)/(P + 3) = 2R_p x_1 + (R_p R_{p+2} x_1)(P + 4)/(P + 5)$$

Получим уравнение, независимое от x_1 :

$$R_p = \frac{\frac{(P+2)}{(P+3)}}{2 + \frac{(R_{p+2})(P+4)}{(P+5)}}$$

Это рекурсивное уравнение, описывающее зависимость между соседними значениями R_p . Чтобы найти конкретные значения мультипликатора, мы можем воспользоваться следующим свойством: при банке, стремящимся к бесконечности, R_p стремится к r (в таком случае мы получим ту же самую игру без фолдов, которую мы рассматривали в примере 16.4). Значит, мы можем выбрать произвольно большое значение n , приравнять все к $\sqrt{2} - 1$ и найти нужный нам размер банка. К счастью, это рекурсивное уравнение сводится к определенным значениям достаточно быстро.

Как только мы получим значение R_p , мы легко сможем определить точное расположение каждого из порогов, используя уравнение для x_1 , а затем корректируя результат с помощью R_p . Как и обычно, области блефа будут соседствовать с областями колла, а те, в свою очередь - с областями вэлью рейзов.

Нужно запомнить

- [0,1] игры подходят для рассмотрения достаточно сложных ситуаций, включая чек/рейзы, бесконечные рейзы и т.п.
- Вне зависимости от сложности игры ключевыми параметрами являются вэлью диапазоны. Каждому из них соответствует некий блеф диапазон, а также область блеф рейза, которую можно определить, соотнеся размер банка с вэлью диапазоном.
- В играх без чек/рейза существует рекурсивная зависимость между последовательными порогами обоих участников: $x_1 - > y_2 - > x_3$ и так далее.
- В играх с чек/рейзом подобная рекурсивная зависимость наблюдается только для порогов игрока Y.
- Если ваш оппонент мог сделать ставку, но предпочел ей чек, то вы должны бет на вэлью со всеми руками, с которыми он бы поставил сам, а также с половиной его диапазона колла (при условии, что оппонент не может делать рейз, только колл или фолд).

Глава 18

Цена имеет значение: Возвращаемся к $[0,1]$ играм

В начале этой книги мы оговорились, что не будем предпринимать бессмысленных попыток решить покер. Скорее, мы хотели бы сосредоточиться на изучении отдельных аспектов игры, чтобы получить лучшее представление о том, как различные действия могут повлиять на нашу стратегию (оптимальную или эксплуатирующую).

$[0,1]$ игры как нельзя лучше демонстрируют этот подход - в рамках третьей части мы рассмотрели двенадцать различных примеров с использованием распределения $[0,1]$, каждый из которых имел уникальную структуру ставок и набор правил. До этого момента мы не обращали внимания ни на что кроме оптимальных стратегий, а также методов, которые позволяли бы нам решить любую подобную игру.

Однако важной частью анализа является определение цены игры. Мы уже говорили в начале этой главы, **ценой игры** называется ожидание одного из игроков при условии, что оба участника следуют **оптимальным стратегиям**. Как правило, им оказывается игрок Y, поскольку почти все без исключения покерные игры дают преимущество именно игроку, который находится в позиции. Логично предположить, что в подавляющем большинстве случаев его цена игры окажется неотрицательной. В этой главе, как и раньше, мы будем иметь дело с экс-шоудаун вэлью (если не сказано иное). Также мы будем использовать букву G для обозначения цены игры, причем неважно где: на конкретном отрезке, либо на всей области определения игры.

Для вычисления цены игры мы всегда можем прибегнуть к методу перебора - достаточно определить вероятности для каждой из возможных рук участников, найти их стратегии, а затем и математическое ожидание. Зачастую это оказывается весьма простым и действенным способом решения примитивных игр, как например $[0,1]$ игра #1 (пример 11.2).

Рука игрока X	Рука игрока Y	Вероятность	Исход	Ожидание
$[0, \frac{1}{2}]$	$[0, \frac{1}{2}]$	$\frac{1}{4}$	0	0
$[0, \frac{1}{2}]$	$[\frac{1}{2}, 1]$	$\frac{1}{4}$	0	0
$[\frac{1}{2}, 1]$	$[0, \frac{1}{2}]$	$\frac{1}{4}$	+1	$+\frac{1}{4}$
$[\frac{1}{2}, 1]$	$[\frac{1}{2}, 1]$	$\frac{1}{4}$	0	0
Сумма				$+\frac{1}{4}$

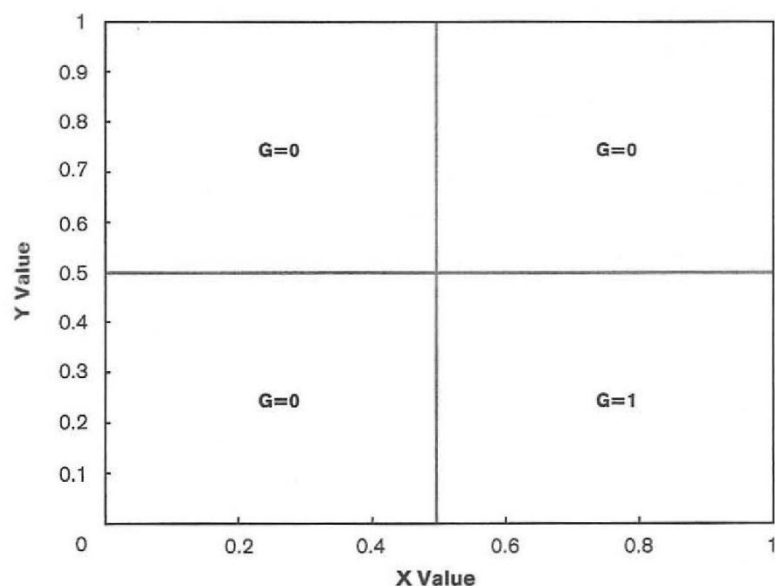


Рисунок 18.1 - Цена игры для [0,1] игры #1

Здесь цена игры (половина улицы, без фолдов) составляет $\frac{1}{4}$. Мы можем применить этот метод ко многим другим примерам, которые мы успели рассмотреть на страницах этой главы. Однако чем сложнее игра, тем более запутанными становятся вычисления. К счастью, мы можем воспользоваться несколькими полезными свойствами оптимальных стратегий, чтобы вычислять цену игры даже в самых сложных случаях.

Давайте рассмотрим следующую игру. Пусть стратегия игрока Y остается неизменной, считаем ее оптимальной. Тогда мы можем варьировать стратегию игрока X, при этом зная, что он никак не сможет улучшить свое ожидание.

Примечание от переводчика: Авторы книги уже не раз прибегали к фиксации стратегии игрока Y - мы уже подробно рассмотрели этот метод в одной из предыдущих глав (в комментариях к решениям).

Смысл этих манипуляций со стратегиями состоит в следующем. Для рук, с которыми игрок X оказывается безразличным к выбору действия, мы можем выбирать ту линию, которая лучше всего подходит для определения цены игры. Причем это не значит, что игрок X может играть по такой стратегии непосредственно за столом - тогда игроку Y не составит труда его эксплуатировать. Важно понимать, что нашей целью является расчет цены игры, а не поиск оптимальных стратегий. Последним мы занимались на протяжении всей главы.

Обратимся к играм на полной улице:

[0,1] игра #4 (пример 15.1) была скорее небольшим экскурсом в теорию лудомании, чем серьезным инструментом для анализа покерной стратегии. Мы сразу смогли определить цену игры для этого случая, поскольку каждый из

игроков был обязан вкладывать деньги в банк с абсолютно любой рукой. Экш-шоудаун ожидание составляло 0.

[0,1] игра #5 (пример 15.2) - игра без фолдов, но игрок Y мог сделать рейз ставки своего оппонента. Мы получили следующее решение для этой игры:

$$x_1 = 1/2$$

$$y_1 = 3/4$$

$$y_2 = 1/4$$

Мы можем легко посчитать G, зафиксировав стратегию игрока Y. Так, играя против оптимальной стратегии, игрок X может либо делать чек, либо поставить с руками между $1/4$ и $3/4$ и получить одно и то же математическое ожидание. Если он ставит, то получает одну единицу вэлью от рук игрока Y между $3/4$ и 1, но теряет единицу против всех рук из диапазона от 0 до $1/4$ (по сравнению с чеком). И поскольку ожидание от бета и чека на этом отрезке будет одинаковым для игрока X, мы можем утверждать, что математическое ожидание игрока Y составит $+1/4$, если рука игрока X находится на отрезке $[1/4, 3/4]$.

Рука игрока X	Рука игрока Y	Вероятность	Исход	Ожидание
$[0, 1/4]$	$[0, 1/4]$	$1/16$	0	0
$[0, 1/4]$	$[1/4, 1]$	$3/16$	-1	$-3/16$
$[1/4, 3/4]$	$[0, 1]$	$1/2$	$+1/4$	$+1/8$
$[3/4, 1]$	$[0, 3/4]$	$3/16$	+1	$+3/16$
$[3/4, 1]$	$[3/4, 1]$	$1/16$	0	0
Сумма				$+1/8$

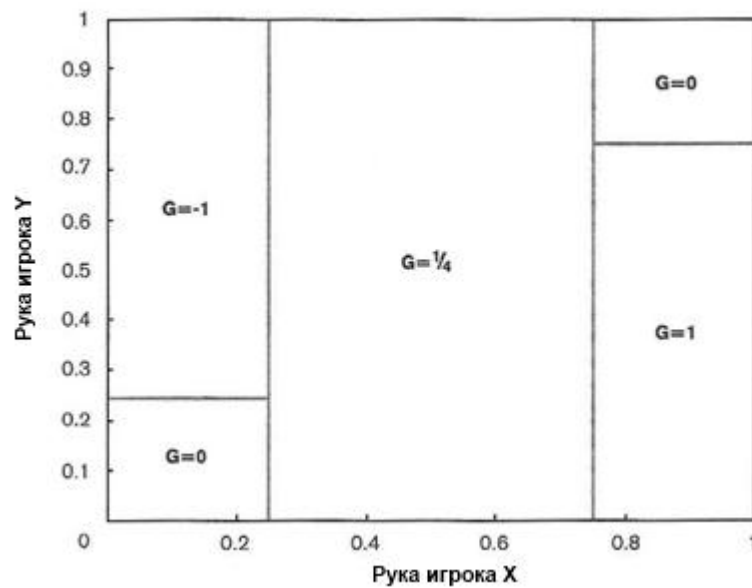


Рисунок 18.2. Цена игры для [0,1] игры #5

Таким образом, цена игры с двумя ставками без чек/рейзов составляет $\frac{1}{8}$. И отнюдь не мало! Давайте посмотрим на это с более знакомой вам стороны.

Когда игрок X делает ставку, его оппонент сделает рейз $\frac{1}{4}$ раз, и уравниет во всех остальных случаях, таким образом, в среднем он вложит в банк $(\frac{5}{4})(\frac{1}{2})$ или $\frac{5}{8}$ единицы. Когда игрок X делает чек, игрок Y вложит в банк одну ставку в $\frac{3}{4}$ случаев или $(\frac{3}{4})(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ ставки. Иными словами, в среднем игрок Y внесет одну ставку за раздачу, и выиграет $\frac{1}{8}$ - его преимущество составляет 12.5%!

Причина столь огромного преимущества находится исключительно в позиции. Рассматриваемая игра полностью симметрична за исключением того, что игрок Y принимает решение последним. Как вы можете видеть, в покере позиция действительно имеет цену. К слову сказать, здесь игрок X чувствует себя несколько более комфортно, чем в играх на половине улицы - там у него не было никакого выбора, кроме как делать колл со всем диапазоном. Появление новой стратегической возможности у оппонента достаточно дорого обошлось игроку Y - он потерял половину своего ожидания (по сравнению с игрой, где игрок X был обязан сделать чек).

Мы можем еще больше сдвинуть баланс (так что ситуация станет несколько ближе к реальному покеру) в сторону игрока X, предоставив ему возможность делать чек/рейз. Игра #7 (пример 16.4) мало чем отличается от игры #5 (пример 16.2). Интуиция может вам подсказать, что ожидание игрока X в этом случае окажется как минимум не хуже.

Давайте проверим, так ли это. Решение для рассматриваемой игры выглядело следующим образом:

$$x_1 = 5/9$$

$$y_1 = 2/3$$

$$x_2 = 1/9$$

$$y_2 = 1/3$$

И снова мы будем считать, что пороги игрока Y никак не изменятся.

Когда рука игрока X находится ниже порога $1/3$, мы знаем, что вне зависимости от того, что он будет делать, две ставки всегда окажутся в банке, если рука его оппонента также лежит в интервале от 0 до $1/3$. Игрок X получит вэлью от чек/рейза (по сравнению со ставкой), если рука игрока Y оказывается в диапазоне $[1/3, 2/3]$, но теряет это ставку, если у оппонента рука будет между $2/3$ и 1. Таким образом, игрок X безразличен к чек/рейзу или бету на всей области $[0, 1/3]$.

Примечание от переводчика: Мы считаем, что игрок X безразличен, поскольку его ожидание никак не меняется.

С другой стороны, когда рука игрока X будет между $1/3$ и $5/9$, он потеряет возможность делать прибыльные чек/рейзы из-за дополнительной ставки, которую он проиграет против хороших рук оппонента. Значит, ему стоит просто ставить со всем этим диапазоном. С руками хуже $5/9$ игрок X сделает чек.

Мы можем заново оценить решение игры, предполагая, что игрок X будет следовать такой стратегии:

- Бет с руками лучше, чем $5/9$
- Чек и колл с руками хуже, чем $5/9$.

Эта стратегия имеет точно такое же ожидание, как «настоящая» оптимальная стратегия игрока X против оптимальной стратегии игрока Y . В свою очередь, если бы стратегия игрока Y не была фиксированной, он бы мог начать эксплуатировать своего оппонента.

Рука игрока X	Рука игрока Y	Вероятность	Исход	Ожидание
$[0, \frac{1}{3}]$	$[0, \frac{1}{3}]$	$\frac{1}{9}$	0	0
$[0, \frac{1}{3}]$	$[\frac{1}{3}, 1]$	$\frac{2}{9}$	-1	$-\frac{2}{9}$
$[\frac{1}{3}, \frac{5}{9}]$	$[0, \frac{1}{3}]$	$\frac{2}{27}$	+2	$+\frac{4}{27}$
$[\frac{1}{3}, \frac{5}{9}]$	$[\frac{1}{3}, \frac{5}{9}]$	$\frac{4}{81}$	0	0
$[\frac{1}{3}, \frac{5}{9}]$	$[\frac{5}{9}, 1]$	$\frac{8}{81}$	-1	$-\frac{8}{81}$
$[\frac{5}{9}, 1]$	$[0, \frac{5}{9}]$	$\frac{20}{81}$	+1	$+\frac{20}{81}$
$[\frac{5}{9}, 1]$	$[\frac{5}{9}, \frac{2}{3}]$	$\frac{4}{81}$	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{1}{27}$
$[\frac{5}{9}, 1]$	$[\frac{2}{3}, 1]$	$\frac{4}{27}$	0	0
Сумма				$+\frac{1}{9}$

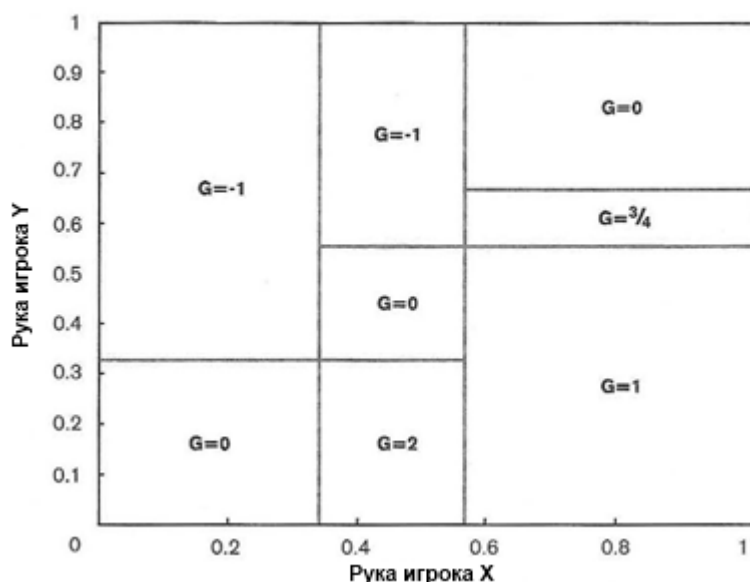


Рисунок 18.3. Цена игры для $[0,1]$ игры #7

Цена этой игры составляет $\frac{1}{9}$, что на $\frac{1}{72}$ лучше для игрока X, чем в предыдущей игре. На самом деле, когда мы решали этот пример, мы думали, что ценность чек/рейза для игрока X будет гораздо выше - в районе половины исходной цены игры. В реальности же эта стратегическая возможность не оказывает большого влияния на стратегию игрока Y. Действительно, он начинает делать чуть более лузовые рейзы и чуть более тайтовые беты, но этого все равно недостаточно, чтобы нивелировать его позиционное преимущество.

Последние две игры без фолдов, которые мы рассмотрели, давали игрокам возможность делать бесконечное количество рейзов. Чтобы посчитать цену для игры из примера 16.3 (где еще не было чек/рейзов), мы можем воспользоваться ее симметричностью после второй ставки. Решение этой игры выглядело так:

$$x_1 = 1/(1 + 2r)$$

$$x_n = r_{n-1}x_1 \text{ (для нечетных } n > 1)$$

$$y_1 = (1 + r) x_1$$

$$y_n = r_{n-1} x_1 \text{ (для четных } n > 1)$$

Давайте рассмотрим несколько диапазонов, начиная с самых слабых. Матрица выплат в нашем случае будет выглядеть следующим образом (руки игрока X сверху, игрока Y - слева):

	$[0, x_1]$	$[x_1, y_1]$	$[y_1, 1]$
$[0, x_1]$	* (см. ниже)	+1	+1
$[x_1, y_1]$	-1	0	+1
$[y_1, 1]$	-1	0	0

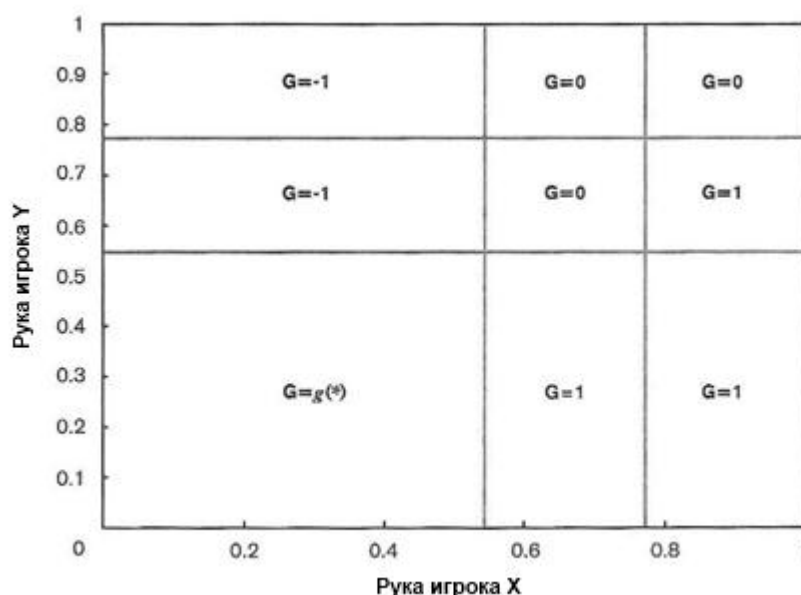


Рисунок 18.4. Цена игры для $[0,1]$ игры #6

Мы отметили звездочкой область, где у обоих игроков оказывается рука старше x_1 , поскольку посчитать ее ожидание напрямую не представляется возможным, ведь она включает в себя произвольное число порогов (с различными размерами выигрыша на каждом из них). Естественно, мы не можем оценить всю бесконечную последовательность порогов. Вместо этого, представьте ситуацию, когда у обоих игроков будет рука из интервала $[0, x_1]$. Получим вспомогательную игру (где игрок X делает бет).

Пусть g - ожидание игрока Y в области, помеченной «*». В ней мы имеем:

Рука игрока X	Рука игрока Y	Вероятность	Исход	Ожидание
$[y_2, x_1]$	$[y_2, x_1]$	$(x_1 - y_2)^2$	0	0
$[y_2, x_1]$	$[0, y_2]$	$(y_2)(x_1 - y_2)$	+2	$2(y_2)(x_1 - y_2)$
$[0, y_2]$	$[y_2, x_1]$	$(y_2)(x_1 - y_2)$	-1	$-(y_2)(x_1 - y_2)$
$[0, y_2]$	$[0, y_2]$	y_2^2	-g	$-gy_2^2$

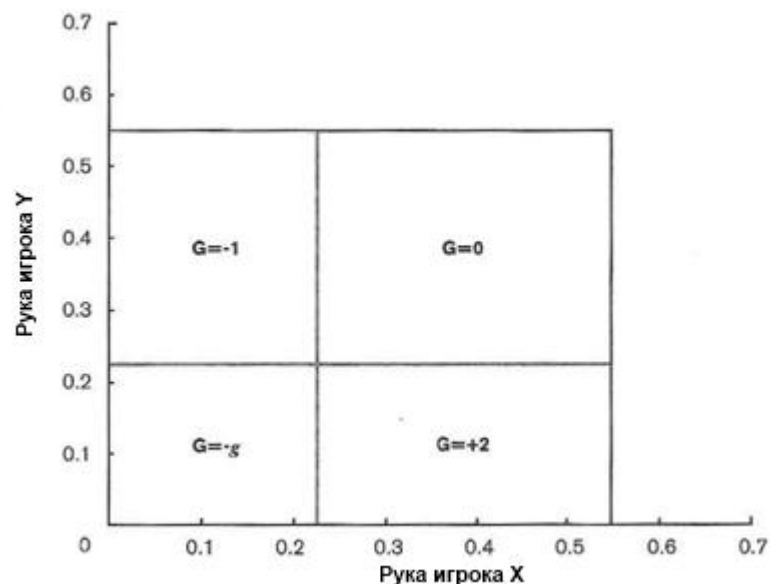


Рисунок 18.5. Цена игры для $[0, 1]$ игры #6 в помеченной области

После еще одного рейза эта игра становится идентичной игре #6, за исключением того факта, что теперь ситуация поменялась на обратную. У обоих игроков есть некие руки из заданного интервала, и игрок, сделавший последний рейз имеет ожидание -g.

Теперь найдем значение g:

$$\begin{aligned}
 g &= y_2(x_1 - y_2) - gy_2^2 \\
 g &= rx_1(x_1 - rx_3) - gr^2x_1^2 \\
 gr^2x_1^2 + g &= rx_1(x_1 - rx_1) \\
 gr^2 + g &= r - r^2 \\
 g(1+r^2) &= r - r^2 \\
 g(2(1 - r)) &= r - r^2 \\
 g &= r/2
 \end{aligned}$$

Таким образом, ожидание для области, где у обоих игроков оказываются сильные руки, составляет $r/2$.

Внесем это значение в исходную матрицу:

	$[0, x_1]$	$[x_1, y_1]$	$[y_1, 1]$
$[0, x_1]$	$r/2$	$+1$	$+1$
$[x_1, y_1]$	-1	0	$+1$
$[y_1, 1]$	-1	0	0

Посчитаем математическое ожидание для всей игры:

$$\langle Y \rangle = (1 - y_1)(y_1 - x_1) + rx_1^2/2$$

$$\langle Y \rangle = (1/4)(1/4) + r(1/8)$$

$$\langle Y \rangle = 1/16 + r/8$$

$$\langle Y \rangle \approx 0.11428$$

Мы можем сравнить полученное значение с $1/8$, ценой первой игры, которую мы разобрали в этой главе (две ставки, без чек/рейза). Очевидно, что игрок X выигрывает от возможности сделать ответный ре-рейз, однако влияние каждого последующего рейза на общее ожидание от игры будет становиться все меньше. Мы можем убедиться в этом, посчитав порог $x_3 = r^2/(1 + 2r) = 0.09384$. Чтобы игрок X смог поставить в банк третью ставку (с рукой лучше x_3), у его оппонента должен оказаться диапазон y_2 , что произойдет лишь 22% раз. Значит, вероятность такого исхода составляет всего 2%.

Последняя из решенных нами игр без фолдов позволяла участникам делать бесконечное число рейзов, и при этом разрешала игроку X применять чек/рейз (пример 16.4). Найти ожидание игрока Y нам снова поможет рассмотренный выше метод.

В игре с двумя ставками и чек/рейзом игрок X был безразличен к чек/рейзу и ставке со всеми руками сильнее y_2 . То же самое оказывается верным и для случая с бесконечными рейзами. Игрок X безразличен к чек/рейзу и бету между любыми двумя порогами игрока Y. Тогда стратегия игрока X значительно упрощается:

$$x_1 = y_1$$

$$x_3 = y_3$$

... и так далее.

Для области, где диапазоны обоих игроков старше y_1 , мы снова обнаруживаем, что ее ожидание составляет $r/2$. Мы призываем наших читателей самостоятельно убедиться в том, что это действительно так.

Получаем простую матрицу выплат:

	$[0, y_1]$	$[y_1, 1]$
$[0, y_1]$	$r/2$	$+1$
$[y_1, 1]$	-1	0

Вычисляем ожидание игры:

$$\langle Y \rangle = ry_1^2/2$$

$$\langle Y \rangle = r/4$$

$$\langle Y \rangle \approx 0.10355$$

Появление стратегической возможности «чек/рейз» снова незначительно улучшило ожидание игрока X. Для сравнения, возможность делать ставку урезала ожидание игрока Y ровно вдвое, с $1/4$ до $1/8$.

Мы еще вернемся к сопоставлению ожидаемых выигрышей от различных игр. Нашей следующей задачей будет определение цены игры для случаев с конечным размером банка.

Самым простым представителем этого класса игр был пример 11.3 - игра на половине улицы с фолдами. Решение для него выглядело так:

$$y_1 = (1 - \alpha)/(2 - \alpha)(\alpha + 1)$$

$$x_1^* = 2y_1$$

$$1 - y_0 = \alpha y_1$$

Здесь мы будем использовать G_n для обозначения ожидания игрока Y в различных областях стратегии, начиная со слабейшей (где $n = 0$).

Когда рука игрока X оказывается в диапазоне $[0, y_1]$, его лучшей стратегией будет колл - он X выиграет одну ставку против блефов игрока Y, но против вэлью бетов не получит ничего.

$$G_2 = \langle X \text{ на } [0, y_1] \rangle$$

$$G_2 = -\alpha y_1$$

Примечание от переводчика: Ожидание в этой области отрицательное, поскольку хотя авторы и приводят аргументы со стороны игрока X, цена игры считается по отношению к игроку Y. Значит, если игрок X обладает нейтральным ожиданием против вэлью бетов на диапазоне $[0, y_1]$, и выигрывает одну ставку против блефов, то игрок Y именно эту ставку будет проигрывать со всеми своими блефами.

Ожидание от чек/колл для игрока X против вэлью бетов оппонента будет нейтральным, поскольку если диапазоны обоих игроков равны по

силе (а мы рассматриваем случай, когда рука игрока X берется из интервала $[0, y_1]$, и поскольку стратегия игрока Y является фиксированной, то он будет ставить на вэлью также с $[0, y_1]$), то их ожидание будет равно нулю, ведь ни один из них не может выиграть на дистанции.

Когда рука игрока X оказывается на отрезке $[y_1, y_0]$, он становится безразличным к коллу или фолду с каждой из них. Он выигрывает ставку против блефов, но проигрывает вэлью бетам. Раз это так, мы можем считать, что он всегда будет скидывать свою руку (для упрощения расчетов). Тогда игрок Y ничего не получает со своими вэлью руками, но выигрывает банк размером P в случае успешного блефа.

$$G_1 = \langle X \text{ на } [y_1, y_0] \rangle$$

$$G_1 = P\alpha y_1$$

$$G_1 = (1 - \alpha)y_1$$

Если же игроку X попалась рука в промежутке от y_0 до 1, он всегда будет делать фолд, отдавая банк своему оппоненту. Игрок Y, в свою очередь, в среднем выиграет половину банка с руками из того же интервала (поскольку рука хуже, чем у игрока X на этом интервале у него окажется ровно половину раз):

$$G_0 = \langle X \text{ на } [y_0, 1] \rangle$$

$$G_0 = P\alpha y_1/2$$

$$G_0 = y_1(1 - \alpha)/2$$

Чтобы найти цену игры, нам нужно умножить полученные значения G_n на длины соответствующих интервалов:

$$G = y_1 G_2 + (y_0 - y_1) G_1 + (1 - y_0) G_0$$

$$G = y_1(-\alpha y_1) + (1 - y_1 - \alpha y_1)(1 - \alpha)y_1 + \alpha y_1^2(1 - \alpha)/2$$

$$G = (1 - \alpha)y_1 - (2 - \alpha)(1 + \alpha)y_1^2/2 \quad (18.1)$$

Мы можем упростить полученное выражение, используя известное значение y_1 (из формулы выше):

$$G = y_1(1 - \alpha)/2$$

В $[0,1]$ игре #9 (пример 17.1) мы рассматривали стратегии игроков на полной улице. И снова для нахождения цены игры мы можем применить тот же алгоритм. В области $[0, y_1]$ оказывается, что чек и бет игрока X обладают одинаковым ожиданием против оптимальной стратегии оппонента:

Рука игрока Y	<X, чек>	<X, бет>
[0, x ₁]	+1	+1
[x ₁ , y ₁]	-1	-1
[y ₁ , y ₁ [*]]	0	-1
[y ₁ [*] , y ₀]	0	0
[y ₀ , 1]	-1	0

Решение для игрока Y выглядело следующим образом:

$$y_1 = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$$

$$y_0 = (1 + \alpha_2)/(1 + \alpha)$$

$$y_1^* = 1 - \alpha$$

Как вы можете заметить, игрок Y выигрывает одну ставку с руками из области [y₁, y₁^{*}] после чека игрока X (по сравнению со ставкой), но проигрывает в области [y₀, 1]. Мы можем доказать, что эти области идентичны по своему размеру следующим образом:

$$y_1^* - y_1 = (1 - \alpha) - (1 - \alpha)/(1 + \alpha) = (\alpha - \alpha_2)/(1 + \alpha) = \alpha y_1 = 1 - y_0$$

Таким образом, с руками из диапазона [0, y₁] игрок X безразличен к чеку и бету против оптимальной стратегии оппонента. Это значит, что мы можем использовать наши выводы из предыдущего примера. Цена этой игры будет идентична таковой для игры #2 (пример 11.3), единственное отличие заключается в пороге y₁.

Используем уравнение 18.1:

$$G = (1 - \alpha)y_1 - (2 - \alpha)(1 + \alpha)y_1^2/2 \quad (18.1)$$

Но теперь мы подставим в него другое значение y₁:

$$y_1 = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$$

$$G = (1 - \alpha)^2/(1 + \alpha) - (2 - \alpha)(1 - \alpha)^2/2(1 + \alpha) \quad (18.1)$$

$$G = (1 - \alpha)^2(2 - 2 + \alpha)/2(1 + \alpha)$$

$$G = \alpha(1 - \alpha)^2/2(1 + \alpha)$$

Игра из примера 17.2 разрешала делать рейз только игроку Y. Для определения ее цены мы можем использовать следующие G из игры с одной ставкой:

$$G_1 = \langle X \text{ на } [y_1, y_0] \rangle$$

$$G_1 = P\alpha y_1$$

$$G_1 = (1 - \alpha)y_1$$

$$G_0 = \langle X \text{ на } [y_0, 1] \rangle$$

$$G_0 = P\alpha y_1/2$$

$$G_0 = y_1(1 - \alpha)/2$$

Что касается G_2 , где рука игрока X оказывается в диапазоне $[y_1, y_2]$, мы знаем, что если он будет делать бет, то игрок Y будет рейзить достаточно часто, чтобы сделать его безразличным к коллу. Вэлью рейзы игрока Y всегда будут старше рук из рассматриваемого диапазона, так что игрок X может лишь надеяться побить блеф. Мы можем сравнить ожидание игрока X от чек/колл с ожиданием от бет/колл для всех рук в этой области:

Рука игрока Y	$\langle X, \text{чек/колл} \rangle$	$\langle X, \text{бет/колл} \rangle$
$[0, y_2]$	+1	+2
$[y_2, y_1]$	0	0
$[y_1, y_1^*]$	0	-1
$[y_1^*, y_2^\#]$	0	-2
$[y_2^\#, y_0]$	0	0
$[y_0, 1]$	-1	0

Опять же, мы можем показать, что игрок X безразличен к выбору одной из этих линий. Как вы можете помнить, одно из уравнений безразличия, составленных нами для этой игры, имело вид:

$$y_1^* - y_1 = (P + 1) (y_2^\# - y_1^*) + (1 - y_0)$$

В случае бет/колл игрок X выигрывает:

$$2 (y_2^\# - y_1^*) + y_1^* - y_1 - 2y_2$$

Используем указанное выше значение $y_1^* - y_1$, получим:

$$(P + 3) (y_2^\# - y_1^*) + 1 - y_0 - 2y_2 = -y_2 + \alpha y_1$$

В случае чек/колл, игрок X получает:

$$-(y_2 - 0) + (1 - y_0) = -y_2 + \alpha y_1$$

Значит на интервале $[y_2, y_1]$ игроку X будет все равно, что делать: чек/колл, бет/фолд или бет/колл. Небольшая заметка для тех из вас, кто собирается поработать над решением более сложных $[0,1]$ игр, такое **тройное безразличие** зачастую может сократить количество уравнений, а также существенно их упростить.

Проще всего нам будет искать ожидание игрока Y против рук игрока X из заданного диапазона, когда последний делает чек и колл. В таком случае:

$$G_2 = \langle X \text{ на } [y_2, y_1] \rangle = y_2 - \alpha y_1$$

С руками сильнее, чем y_2 игроку X стоит играть через бет/колл. Тогда он получает нейтральное ожидание, если оппонент будет рейзить на вэлью, а также выигрывает одну или две ставки, когда игрок Y уравнивает или делает блеф рейз. Значит, ожидание игрока Y составит:

$$G_3 = \langle X \text{ на } [0, y_2] \rangle = (y_1^* - y_2) - 2(y_2^\# - y_1^*)$$

$$G_3 = y_2 - y_2^\# - (y_2^\# - y_1)$$

$$G_3 = y_2 - (1 - \alpha) - \alpha_2 y_2$$

$$G_3 = (1 - \alpha_2)y_2 - 1 + \alpha$$

Складывая взвешенные значения G получим:

$$\langle Y \rangle = y_2 G_3 + (y_1 - y_2) G_2 + (y_0 - y_1) G_1 + (1 - y_0) G_0$$

$$\langle Y \rangle = y_2 G_3 + (y_1 - y_2) G_2 + (y_0 - y_1) G_1 + (1 - y_0) G_0$$

$$\langle Y \rangle = y_2 (G_3 - G_2) + y_1 G_2 + (y_0 - y_1) G_1 + (1 - y_0) G_0$$

$$\langle Y \rangle = -(1 - \alpha)y_2 - \alpha_2 y_2^2 + (1 + \alpha)y_1 y_2 + (1 - \alpha)y_1 - (1 + \alpha)(2 - \alpha)y_1^2/2$$

Решение для $[0,1]$ игры #11 (пример 17.3, разрешен чек/рейз, в банке осталось две ставки) будет совпадать с решением для игры без фолдов. Можно доказать, что игрок X безразличен к чек/рейзу и бет/коллу в области $[0, y_2]$, тогда цена игры из примера 17.3 будет считаться по той же формуле, что и в игре #10 (но с другими значениями y_1 и y_2). В результате мы получим еще меньшее ожидание для игрока Y .

Пожалуй, здесь нам стоит прерваться, поскольку процесс определения цены игр уже должен казаться вам вполне рутинным делом, а методы, которые мы описали выше, помогут вам найти ожидание для любой другой $[0,1]$ игры.

Уроки $[0,1]$ игр

Теперь давайте перейдем от сухих цифр к осмыслению полученных результатов. График ниже отражает некоторые зависимости между рассмотренными выше играми:

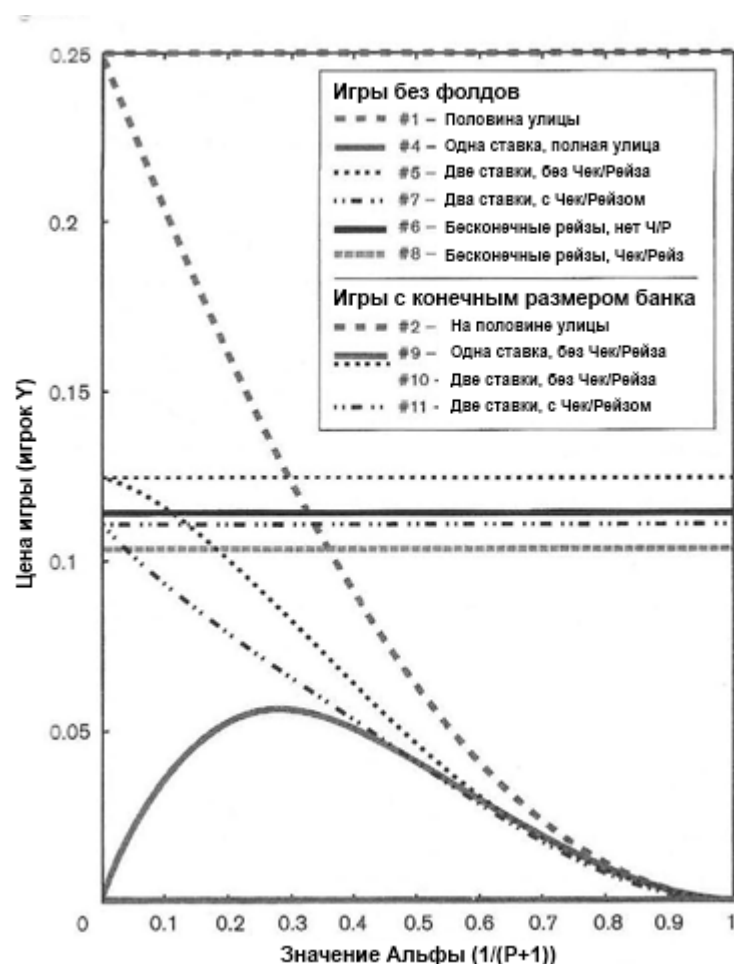


Рисунок 18.6. Цена игры для различных $[0,1]$ игр

Как вы могли заметить, некоторые игры оказываются лишь частными случаями своих более сложных аналогов. Так, например, игра #1 – ни что иное как производная игры #2. Действительно, если в последней мы сделаем банк бесконечно большим, то получим условия, стратегию, а также цену (равную нулю) для игры #1. Подобная зависимость наблюдается между всеми играми без фолдов и советующими им аналогам с конечным размером банка.

Кроме того, мы можем вывести некоторые новые игры просто добавляя стратегические альтернативы к старым. Например, игра #7 идентична игре #5, однако в ней игрок X получает возможность делать чек/рейз. И если мы сравним ожидания игроков в каждом из этих случаев, то еще раз убедимся в аксиоме, рассмотренной нами в самом начале этого раздела книги:

Стратегические альтернативы обладают неотрицательной ценностью.

Возьмем, к примеру, игры на половине улицы #1 и #2. В последней мы разрешили игрок X делать фолд на ставку оппонента, тем самым дав ему новый стратегический выбор. Это сразу же нашло отражение в цене игры (то есть в ожидании игрока Y) – она уменьшилась. То же самое мы могли наблюдать и для следующих пар:

Игра #1 и игра #4, где игрок X получил возможность делать ставку.
 Игра #4 и игра #5, где игрок Y получил возможность делать рейз.
 Игра #5 и игра #6, где игрок X получил возможность делать ре-рейз.
 Игра #5 и игра #7, где игрок X получил возможность делать чек/рейз.

Во всех этих случаях игрок, который получил новую стратегическую возможность, увеличивал свой ожидаемый выигрыш.

Вторая интересная зависимость проявляется в коэффициенте r в $[0,1]$ играх. В реальном покере его значение будет изменяться под влиянием блокеров, игры на нескольких улицах и т.п. Однако идея о том, что вы должны делать на ривере рейз примерно с 41% от диапазона ставки оппонента, еще не раз пригодится вам за столами.

Рассмотрим следующую игру. Пусть ваш друг предложил сыграть в разновидность Холдема, где каждый игрок получает по две карты, затем сдаются все три улицы, и на последней из них можно делать ставки. Игрок Y может либо поставить, либо дойти до шоудауна, а игрок X, в свою очередь, может сделать чек/рейз, причем количество рейзов в последнем случае ничем не ограничено. Тогда оптимальная стратегия для такой игры будет выглядеть примерно следующим образом: один игрок поставит с r своих рук, его оппонент сделает рейз с r^2 рук, на что получит ре-рейз с r^3 и так далее. Предположим, что на столе лежат $J♥ 9♣ 8♠ 3♦ 2♣$. У каждого из участников раздачи может оказаться одна из 1 081 рук.

Рука	Комбинации	Сумма
QT	16	16
T7	16	32
JJ, 99, 88, 33, 22	30	62
J9, J8	18	80
J3 или две пары хуже	72	152
AJ, KJ, QJ	36	188
JT, J7, J4	60	248
A9-Q9, T9, 97-94	96	344
A9-Q9, T9, 97-94	96	440
Остальные руки	641	1081

$(1081)r \approx 448$
 $(1081)r^2 \approx 185$
 $(1081)r^3 \approx 77$
 $(1081)r^4 \approx 32$
 $(1081)r^5 \approx 13$

Однако чтобы найти настоящую оптимальную стратегию для этой игры, нам потребовалось бы учесть все блокеры, неравномерно распределенные руки и т.п. И конечно же, мы никогда не откажемся от рейзов с натсами.

С другой стороны, найденные нами приблизительные пороги говорят о следующем: первую ставку мы можем делать с любой третьей парой и лучше, вторую - с QJ и лучше, третью - с лучшими двумя парами, четвертую - со вторым натсом, пятую - только с натсом.

Можем ли мы использовать эти результаты в покере? Не совсем, поскольку действия на предыдущих улицах и вытекающие из них диапазоны меняют распределение рук на ривере. Но правило 41% (если ваш оппонент не может сделать фолд - например, банк уже слишком большой) является вполне приемлемым ориентиром. В играх, где оппоненты имеют возможность скидывать свои карты, нам придется скорректировать эту цифру до 35% или около того (поскольку мы еще получаем рейз от натсов, но фолд от слабейших комбинаций).

Стоит отметить, что этот пример не только показывает как можно применять коэффициент r за покерным столом, но и затрагивает, возможно, самый главный урок в $[0,1]$ играх. Все это время мы разделяли диапазоны участников игры на различные зоны чистых стратегий, где на порогах мы наблюдали безразличие к выбору конкретного действия.

В наших расчетах цены игры мы полагали, что стратегия игрока Y не изменится. Причем как оказалось, в большинстве вэлью областей игрок X был безразличен к выбору линии розыгрыша. Иными словами, даже если игрок Y следует оптимальной стратегии, его оппонент может играть по стратегии, которая несколько отличается от оптимальной (при этом ничего не теряя). Мы называем такие стратегии *гибкими*.

В то же время, если игрок X следует оптимальной стратегии, то игрок Y не имеет права делать ошибки - даже если он решит не ставить с руками чуть лучше, чем u_1 , он сразу потеряет в ожидании. Такие стратегии мы будем называть *строгими*. Как правило, стратегии игрока X в $[0,1]$ играх будут гибкими, поскольку даже если он забудет поставить с руками чуть лучше, чем его порог для ставки, игрок Y зачастую сделает бет сам (причем с широким диапазоном). Очевидно, что если игрок Y сделает такую же ошибку, то за него никто деньги в банк внести не сможет.

Если вы оказались на месте игрока, чья стратегия обязана быть строгой (что часто случается для всех участников раздачи в реальном покере), то чтобы играть оптимально вам придется очень серьезно подойти к выбору диапазонов для каждой линии. Например, на ривере стоит определиться с границами каждой из областей, подумать о том, что вы собираетесь делать в ответ на рейз, а также сколько ставок вы хотите сделать банк со своими сильными руками.

Кроме того, строгие стратегии предполагают, что зачастую мы не будем играть по смешанным стратегиям с отдельными руками - такое будет случаться только на

порогах, разделяющих области чистой стратегии. Однако, как правило, мы будем играть близкие по силе руки в схожей манере.

Также стоит отметить, что в стратегиях для $[0,1]$ игр с конечным размером банка некоторые пороги существуют исключительно для балансировки диапазона. Например, каждому вэлью бету должно соответствовать определенное количество блефов, а также рук, с которыми мы сделаем колл или фолд в ответ на рейз. Такая логика не раз придет вам на помощь за покерным столом. Начните с определения своего диапазона вэлью бетов. Затем подумайте, каким должен быть диапазон блефа в этой ситуации. Как часто вам следует блефовать? Насколько оптимально соотношение ваших блефов и вэлью бетов? А если вы делаете рейз, вы когда-либо блефуете? С какими руками? Подобная цепочка рассуждений позволит вам сформировать сбалансированную стратегию, которую очень сложно эксплуатировать.

В заключение этой главы мы рассмотрим последнюю $[0,1]$ игру в книге, которая открывает интересную особенность Хай-Лоу игр.

Пример 18.1 - $[0,1] \times [0,1]$ игра

В этой вариации $[0,1]$ игр каждый участник получает два случайных числа (абсолютно не связанных между собой) из равномерно распределенного диапазона от 0 до 1. Первое число означает его «Хай» руку, второе - «Лоу». Правила этой игры во многом повторяют таковые для обычных $[0,1]$ игр: сильнейшими считаются руки, которые ближе всего к нулю, причем лучшая «Хай» рука выиграет только половину банка, а лучшая «Лоу» - другую половину.

Руку каждого из игроков мы будем обозначать через (x, y) , где x и y находятся на интервале от 0 до 1.

В этой игре ни один из участников не может скинуть свои «карты», чек/рейз делать нельзя, однако игрок X может делать бет, а его оппонент в праве ответить рейзом. И поскольку это игра без фолдов, размер банка не имеет никакого значения.

Интересно, что большую часть ставок в этой игре будут составлять **полублефы** - в этой главе мы еще ни разу не говорили о них. Такие ставки делаются в надежде выиграть половину банка в случае колла, и являются очень популярными в Хай-Лоу играх (хотя также встречаются и в Холдеме, например, бет с тузом старшим на дважды спаренной доске - здесь в случае колла от другого туза мы выиграем ровно половину банка).

Одним из способов анализа такой игры является графическое изображение всех возможных пар x и y . Причем вместо единичных порогов мы будем рассматривать линии-границы, заключающие в себе диапазон рук для некоего действия. Введем

следующую параметризацию: пусть существуют три кривых, x_1 , y_1 ; и y_2 (по аналогии с $[0,1]$ игрой #5), мы будем говорить, что рука находится «под» кривой, если она ближе к $(0,0)$ и «над» кривой - если ближе к $(1,1)$. Кривые находятся в следующем соотношении:

$$(0, 0) < y_1 < x_1 < y_2 < (1, 1)$$

Каждой из этих кривых будет соответствовать свое уравнение безразличия, однако вывести их будет несколько сложнее. Так, мы начнем с определения стратегии игрока X , затем найдем на ее основе стратегию игрока Y , и в конце попробуем доказать (путем изменения отдельных частей стратегии), что стратегия для игрока X действительно является оптимальной.

Предположим, что кривая x_1 задается уравнением $y = 1 - x$. Здесь мы используем аналогию с $[0,1]$ игрой без фолдов, где порог x_1 составлял $1/2$.

Примечание от переводчика: Линия, заданная этим уравнением делит всю область определения игры (то есть область возможных рук) пополам.

Теперь давайте рассмотрим границу y_2 . Игрок Y должен быть безразличен между коллом (с руками над y_2) и рейзом (под y_2). Следующий шаг - определение областей, где один из игроков имеет положительное ожидание. Очевидно, что во многих случаях банк будет просто поделен, и ожидание каждого из участников будет равно нулю. Для любой точки (x, y) на кривой y_2 :

Когда рука игрока X находится в области, заданной точками $\{(0, 0), (0, y), (x, 0), (x, y)\}$, игрок Y теряет одну ставку делая колл, но две, если сделает рейз. Это единственная область, где игрок X выигрывает у своего оппонента. В свою очередь, игрок Y выиграет банк у оппонента в области, ограниченной следующими точками: $\{(x, 1 - x), (1 - y, y), (x, y)\}$.

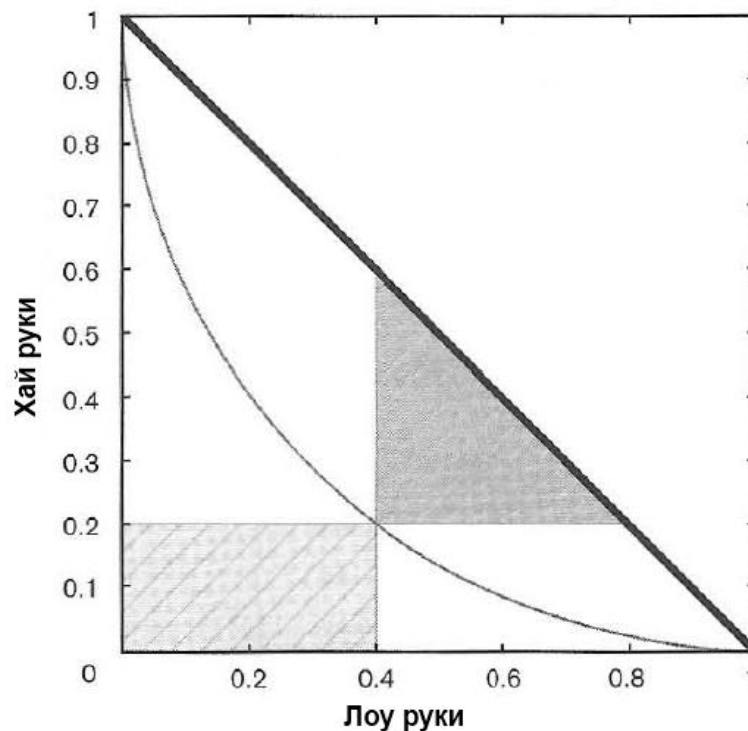


Рисунок 18.7. Графическое представление стратегий для $[0,1] \times [0,1]$ игры

Уравниваем площади этих двух областей, получим:

Примечание от переводчика: Слева находится площадь прямоугольника, справа - площадь прямоугольного треугольника.

$$\begin{aligned}
 xy &= \frac{1}{2} (1 - y - x) (1 - x - y) \\
 2xy &= 1 - y - x - y + xy + y^2 - x - x^2 + xy \\
 1 &= x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \\
 1 &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2
 \end{aligned}$$

Искушенные в алгебре читатели естественно заметят, что мы получили формулу для круга с радиусом 1 и центром в (1, 1). Таким образом, кривая y_2 равна четверти этого круга.

Вернемся к y_1 и рассмотрим безразличие игрока Y между чеком и бетом. Он выиграет одну ставку, если сделает бет против руки игрока X из области, ограниченной $\{(1, 1), (1, y), (x, 1), (x, y)\}$ и проиграет одну ставку, если рука его оппонент попадет в треугольник $\{(x, y), (x, 1 - x), (y, 1 - y)\}$.

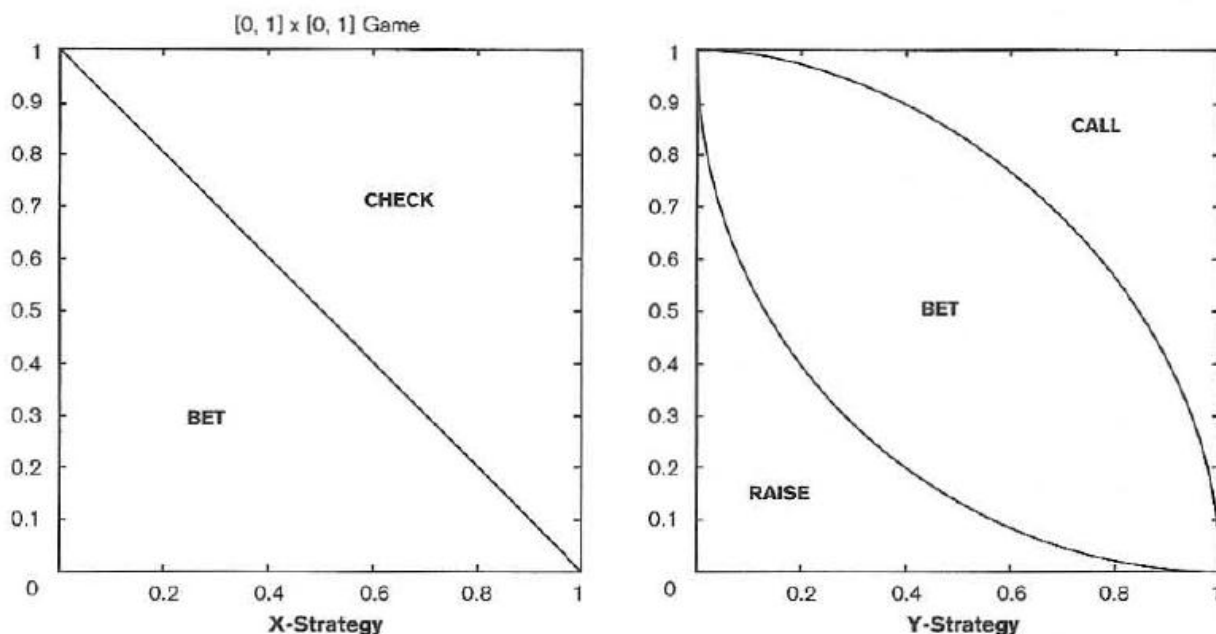
Снова приравниваем площади двух областей:

$$\begin{aligned}
 (1 - x)(1 - y) &= \frac{1}{2} (y - (1 - x))(x - (1 - y)) \\
 1 - x - y + xy &= \frac{1}{2} (y - 1 + x)^2 \\
 1 - x - y + xy &= \frac{1}{2} (y^2 - y + xy - y + 1 - x + xy - x + x^2)
 \end{aligned}$$

$$2 - 2x - 2y + 2xy = y^2 - 2y + 2xy - 2x + x^2 + 1$$

$$1 = y^2 + x^2$$

Имеем уравнение для круга с радиусом 1 и центром в (0,0). График стратегий обоих игроков напоминает мяч для регби, с центром на линии $y = 1 - x$.



Самое время обратиться к кривой x_1 и доказать, что она действительно задается уравнением $y = 1 - x$. На всем протяжении этой кривой игрок X должен быть безразличным к чеку и бету. Причем он потеряет на одну ставку меньше, если сделает чек (а не бет) когда у его оппонента оказывается рука ниже y_2 , ведь в таком случае он не получит рейз. С другой стороны, если он не поставит, то потеряет вэлью против рук выше y_1 . А для всех рук в области между y_1 и y_2 ожидаемый выигрыш будет равен нулю, поскольку банк будет поделен между игроками поровну.

Как мы уже знаем, размер областей бета и чека для игрока X должен быть одинаковым, а линия, идущая из точки (0, 1) в (1, 0) как раз делит область определения игры пополам. Значит, порог x_1 действительно описывается уравнением $y = 1 - x$.

Итак, если мы имеем дело с Хай-Лоу игрой с двумя оставшимися ставками, без фолдов, без блокеров, без чек/рейза, то игрок Y должен ставить с $\pi/4$ своих рук!

Условия этой игры действительно могут показаться несколько надуманными. С другой стороны, они и не претендуют на звание точной модели Хай-Лоу игр. Однако практическое применение у полученной модели все же имеется - в некоторых играх, например в Хай-Лоу Стаде, мы иногда оказываемся в положении, где фолд делать нельзя, поскольку на седьмой улице велика

вероятность того, что у оппонента окажется только одна хорошая рука (Хай или Лоу). И в этом случае мы должны ставить значительно чаще, чем многие привыкли думать.

Нужно запомнить

- Сравнение математического ожидания от различных игр позволяет лучше оценить значимость различных идей и линий.
- Появление новой стратегической возможности у одного из игроков увеличивает его математическое ожидание.
- Когда мы пытаемся оценить ожидание от игры, зачастую мы можем считать, что стратегия одного из игроков останется неизменной, а затем выбрать в стратегии его оппонента такие линии, которые бы упростили наши вычисления.
- Некоторые стратегии называются строгими, поскольку для них даже незначительные отклонения от оптимальных линий оборачиваются существенными потерями в ожидаемом выигрыше. Существуют также и гибкие стратегии - они могут отклоняться от оптимальных линий без ущерба для своего математического ожидания.

Глава 19

На пути к покеру: Статичные игры на нескольких улицах

В предыдущих главах мы рассмотрели больше количество игр на половине и на полной улице. Одно из главных достоинств таких примеров заключается в том, что они относительно просты для решения, а значит, могут помочь нам в понимании последствий изменения определенных аспектов игры. Однако настоящей покер редко ограничивается половиной или даже одной полной улицей. Как мы покажем в этой и следующих главах, добавление дополнительных улиц в корне меняет стратегии игроков.

Мы начинаем с анализа *статичных* игр. В них существует несколько улиц торговли, однако сила рук обоих участников остается неизменной. Эти игры позволяют нам показать, как работают блефы на нескольких улицах, без излишнего усложнения рассматриваемых задач (например, дро существенно затрудняют анализ подобных ситуаций). Как только мы разберемся с парой простых примеров, мы перейдем к решению более сложных и реалистичных игр, в которых присутствуют руки-дро.

Самой элементарной статичной игрой на двух улицах является игра против ясновидящего - подход к ее решению чем-то напоминает таковой для игр на половине и полной улице.

Пример 19.1 - Статичная игра с ясновидящим на двух улицах

- Две полные улицы.
- Сила рук остается неизменной
- Размер банка - P единиц
- Размер ставки - одна единица
- Игрок Y ясновидящий

Вспомним, что в игре с ясновидящим на одной улице игрок X никогда не делал бет, потому что такие ставки всегда имели отрицательное математическое ожидание. Действительно, раз игрок Y был ясновидящим (и видел все карты), он мог эксплуатировать любую ставку своего оппонента.

То же самое повторяется и в этой игре. Игрок X будет вынужден либо делать чек и колл, либо чек и фолд. Здесь это происходит только потому, что наша игра статична, то есть, игрок Y знает, какая рука у него окажется в конце раздачи. Однако если бы здесь присутствовали дро, и игрок Y не знал, чем все закончится, то у его оппонента появилась бы возможность делать ставки на вэлью.

В игре с ясновидящим на одной улице мы вычислили, что игрок Y должен ставить со всеми натсам и блефовать с α своих слабых рук. В свою очередь, игроку X следовало скидывать α рук, способных побить блеф и уравнивать с остальными.

В игре на двух улицах появляется еще одна улица для ставки. Значит, оба игрока получают дополнительные стратегические возможности. Так, игрок Y теперь может:

- Сделать чек на двух улицах (стратегия Y_0)
- Сделать чек на первой улице и поставить на второй (стратегия Y_1)
- Поставить на первой улице, но сделать чек на второй (равносильно стратегии Y_1)
- Поставить на двух улицах (стратегия Y_2)

Очевидно, что игрок Y предпочтет поставить на обеих улицах с натсами, поскольку так он сможет максимизировать свое ожидание. Диапазон для стратегий Y_0 и Y_1 будет состоять в основном из блефов, плюс какая-то часть рук, которые желательно разыгрывать по стратегии Y_2 . Также игроку Y стоит предпочитать второй вариант Y_1 , по которому он делает бет, а затем чек. Вполне понятно, что его чек на первой улице часто скажет игроку X о том, что у его оппонента натса нет.

Игрок X должен сделать мертвые руки игрока Y безразличными между этими тремя линиями. Для этого он может использовать следующие стратегии:

- Фолд на первой улице (стратегия X_0)
- Колл на первой улице, но фолд на второй (стратегия X_1)
- Колл на двух улицах (стратегия X_2)

Получаем следующую платежную матрицу (ожидание игрока Y):

	X_0	X_1	X_2
Y_0	0	0	0
Y_1	$+P$	-1	-1
Y_2 (блеф)	$+P$	$+(P+1)$	-2
Y_2 (вэлью)	0	+1	+2

В стратегии Y_2 , мы будем называть диапазон натсов y_v , а диапазон блефов - y_b . Также, частота использования стратегий для игрока X будет обозначаться через переменные x_0 , x_1 и x_2 , а для игрока Y - через y_0 , y_1 и y_2 .

В результате получаем следующее безразличие между γ_1 и γ_0 .

$$0 = Px_0 - x_1 - x_2$$

Мы знаем, что $x_1 + x_2 = 1 - x_0$ (вполне очевидно, что частота использования всех стратегий не может быть больше 100%). Тогда:

$$0 = 1 - x_0 - Px_0$$

$$x_0 = 1/(1 + P) = \alpha$$

На первой улице игрок X должен прибегнуть к той же самой стратегии, что и в игре на половине улицы - фолд с α рук, колл с остальными.

Безразличие между γ_1 и γ_2 (блеф):

$$\alpha P - x_1 - x_2 \alpha = \alpha P + (P + 1)x_1 - 2x_2$$

$$(P + 2)x_1 = x_2$$

$$x_1 + x_2 = 1 - \alpha, \text{ поэтому}$$

$$1 - \alpha - x_1 = (P + 2)x_1$$

$$x_1 = \alpha_2 (1 - \alpha)$$

На второй улице игрок X также будет играть в схожем ключе. После того как он выкинет α своих рук на первой улице, весь его диапазон составит $(1 - \alpha)$. Однако размер банка увеличился на две единицы, поэтому на второй улице он должен делать фолд с α_2 оставших рук. На самом деле, это очень важная идея:

Неясновидящий игрок может рассматривать каждую улицу в отдельности, как если бы игра велась не на нескольких, а на одной улице.

Теперь, рассмотрим стратегии для игрока Y. Он должен сделать оппонента безразличным к выбору между тремя стратегиями: x_0 , x_1 и x_2 . Между X_0 и X_1 имеем следующее уравнение безразличия:

$$Py_1 + Py_by_2 = -y_1 + (P + 1) y_by_2 + y_vy_2$$

$$(P + 1) y_1 = y_vy_2 + y_by_2$$

$$y_1 = \alpha y_2$$

Здесь мы сталкиваемся со вторым важным выводом в этой игре:

Руки, с которыми игрок Y блефует на первой улице, а потом сдается на второй, находятся в соотношении α с руками, с которыми он ставит (на вэлью или блеф) на второй улице.

Далее, безразличие между X_1 и X_2 :

$$-y_1 + (P + 1) y_b y_2 + y_v y_2 = -y_1 - 2y_b y_2 + 2 y_v y_2$$

$$y_v y_2 = (P + 3) y_b y_2$$

$$y_b = \alpha_2 y_v$$

Таким образом, на второй улице у игрока Y ставки на вэлью и блефы находятся в стандартном соотношении (здесь мы уже говорим только об оставшихся руках). И снова мы заменяем коэффициент на α_2 , из-за возросшего размера банка.

Давайте еще раз повторим вышесказанное, это важно. На последней улице у игрока Y окажутся диапазоны натсов и блефов, составленные в соответствии с текущим размером банка. Однако эти диапазоны он определяет еще на первой улице, причем они находятся в зависимости от частоты его ставки в последнем раунде торговли. Это приводит к тому, что игрок Y вынужден блефовать чаще, чем в играх на одной улице.

Пусть банк составляет 2 единицы на первой улице, при этом диапазон натсов игрока Y ограничен. Тогда на второй улице в банке окажется 4 единицы - здесь игрок Y должен будет ставить с натсами, а также блефами (в количестве $\frac{1}{5}$ от натсов). Как ему получить такой диапазон? Он должен представить, что весь его диапазон для ставки на второй улице - это «вэлью руки» на первой улице, с которыми он всегда делает бет.

Поскольку банк на первой улице составляет 2 единицы, он должен будет ставить со всеми «вэлью руками», а также блефовать с третью этого диапазона. Как мы только что определили, «вэлью диапазон» игрока Y на первой улице будет равен $\frac{6}{5}$ (все натсы, плюс $\frac{1}{5}$ блефов), значит, он должен будет блефовать с $\frac{2}{5}$ настоящих натсов, но сдаваться с ними на следующей улице. Таким образом, общее количество мертвых рук, с которыми игрок Y будет ставить на первой улице, составит $\frac{3}{5}$ от его натсов.

Примечание от переводчика: Фактически, авторы говорят следующее. На второй улице мы должны блефовать достаточно часто. Однако блефовать мы должны и на первой улице. Как нам структурировать свой диапазон таким образом, чтобы на каждой улице у нас оказывалось достаточное количество блефов, но при этом и нужное количество натсов?

Самый очевидный выход - мы считаем, что весь наш диапазон для ставки на второй улице (и блефы, и натсы) это «вэлью руки» на первой улице. Значит, если мы всегда с ними будем ставить, то на второй улице у нас окажется именно тот диапазон, который нам нужен для оптимальной игры.

Но мы не должны забывать и про блеф на первой улице. Мы уже определились, что точно поставим с «вэлью рукам», так как этот диапазон нам нужен на второй улице. Осталось только определить, как часто нужно ставить с блефами на первой. Коэффициент a подскажет, что блефовать мы должны с третьей «вэлью рук» (банк все еще равен двум единицам).

Пусть “ z ” - наш диапазон настоящих натсов (которые мы ставим на вэлью на второй улице). Тогда диапазон блефа на второй улице составляет пятую часть “ z ”. Сумму этих диапазонов мы называли «вэлью руками» для первой улицы, она равна $\frac{6}{5}z$. Теперь мы ищем число рук, с которыми должны блефовать на первой улице. Умножаем $\frac{6}{5}z$ на $\frac{1}{3}$ и получаем $\frac{2}{5}z$. Это значит, что на первой улице мы должны ставить с $\frac{2}{5}$ настоящих натсов.

Итого. Игрок Y будет блефовать с $\frac{2}{5}$ натсов на первой улице, и с $\frac{1}{5}$ на второй, однако последний диапазон уже включен в «вэлью руки» на первой улице. Значит, в целом он начинает блефовать чаще!

Вы можете заметить: «Но зачем усложнять себе жизнь? Разве я не могу ставить на флопе чуть чаще, не объединяя диапазоны?» Нет, поскольку все наши блефы и вэлью беты должны находиться в соотношении a , что и показано в уравнениях безразличия.

После того, как он поставит с таким диапазоном на первой улице, он должен сдать с $\frac{2}{3}$ своих мертвых рук на второй (согласно уже известному нам уравнению $1 - a$). В итоге получаем диапазон блефа на второй улице равный именно $\frac{1}{5}$ натсов. Игрок X никак не может эксплуатировать такую стратегию - мы уже показали выше, что он безразличен ко всем своим стратегическим возможностям.

Этот результат может быть обобщен для любого количества улиц и любых размеров ставок.

Теперь давайте представим, что мы играем в следующую игру:

- Игроки ставят анте по 2 единицы каждый
- Оба игрока получают некие руки, причем игрок Y знает руку оппонента
- Сдается полная доска, но видит ее только игрок Y
- Диапазон игрока Y состоит наполовину из натсов, наполовину из блефов
- В игре присутствуют три улицы торговли, на флопе ставки по одной единице, на терне и ривере по две
- На вскрытии выигрывает лучшая рука

В этой игре ожидание от ставки для игрока X будет отрицательным на всех улицах. Более того, решение здесь ничем не отличается от случая с двумя ставками, мы лишь сделаем поправки на дополнительную улицу и новые правила бетсайзинга.

Размер банка к риверу составит $4 + 2 + 4 = 10$ единиц, а размер ставки будет равен 2. На ривере игрок Y сделает бет на вэлью со всеми натсами, которые составляют половину от всех его рук, а также на блеф с $\frac{2}{12}$ от этого диапазона (или $\frac{1}{12}$ от всех рук). Таким образом, общий диапазон для ставки на ривере составит $\frac{7}{12}$.

На терне, банк равен 6 единицам, размер ставки - 2. Диапазон «вэлью рук» игрока Y составит $\frac{7}{12}$ от числа всех его возможных рук, плюс он поставит на блеф с четвертью от «вэлью рук». Иными словами, на терне он должен будет сделать бет с $\frac{35}{48}$ от стартовых комбинаций.

На флопе банк равен 4 единицам, ставки по 1 единице. И снова игрок Y будет иметь диапазон «вэлью рук» размером в $\frac{35}{48}$, плюс пятую часть от этого диапазона он должен будет поставить на блеф. Значит, на флопе он будет ставить с $\frac{42}{48}$ (или $\frac{7}{8}$) от своего стартового диапазона.

Решение для этой игры выглядит следующим образом: игрок Y ставит с $\frac{7}{8}$ рук на флопе, сдается с $\frac{1}{12}$ после флопа и с $\frac{7}{48}$ после терна (то есть с частью блефов). Игрок X же просто падает с α от своих рук на каждой улице. Цену этой игры можно легко определить, представив, что игрок X скидывает уже на флопе (поскольку он безразличен к выбору действия). В одном случае из восьми он заберет банк, что делает ожидание его оппонента равным 1.5 единицам. На самом деле, удивительно, что у игрока X есть хоть какой-то шанс вернуть малую часть своих денег в такой «нечестной» игре.

Как мы уже говорили, этот алгоритм решения распространяется на игры с любыми размерами ставок. В тех из них, где ясновидящий диктует еще и бетсайзинг (например, в безлимитном Холдеме), мы можем воспользоваться принципом максимизации ожидания, рассмотренным в прошлых главах.

Пример 19.2 - Статичная безлимитная игра с ясновидящим на двух улицах

- Две полные улицы.
- Сила рук остается неизменной
- Размер банка - 1 единица
- Размер стэков - N единиц
- Ставки произвольного размера
- Игрок Y ясновидящий

Сначала мы обратимся к игре на двух улицах; однако сам принцип решения может быть применен и к случаям с произвольным количеством улиц.

В предыдущем примере мы видели, что неясновидящий игрок играет на каждой улице так, как если бы это была отдельная игра на одной улице, делая фолд с α своих рук и уравнивая с остальными. В свою очередь, ясновидящий использует коэффициент α , чтобы правильно составить свои диапазоны на нескольких улицах одновременно.

Эти зависимости сохраняются даже когда размеры ставок могут быть заданы ясновидящим игроком. Чтобы найти оптимальную стратегию, нам потребуется лишь выразить ожидание ясновидящего игрока через s_1 и s_2 (бетсайзинг на первой и второй улицах), а затем найти максимум полученной функции. При банке в одну единицу имеем следующую матрицу выплат:

	X_0	X_1	X_2
Y_0	0	0	0
Y_1	+1	$-s_1$	$-s_1$
Y_2 (блеф)	+1	$+(1 + s_1)$	$-(s_1 + s_2)$
Y_2 (вэлью)	0	$+s_1$	$+(s_1 + s_2)$

Используем ту же модель для уравнений безразличия, что и в прошлой игре:

$$x_0 - s_1 x_1 - s_1 x_2 = 0$$

$$x_0 = s_1(1 - x_0)$$

$$x_0 = s_1 / (1 + s_1)$$

И снова игрок X вынужден скидывать α своих рук. Здесь $\alpha = s / (1 + s)$, ведь размеры ставок не заданы заранее.

$$x_0 + (1 + s_1)x_1 - (s_1 + s_2)x_2 = x_0 - s_1 x_1 - s_1 x_2$$

$$(1 + 2s_1)x_1 = s_2 x_2$$

$$x_2 = x_1 (1 + 2s_1) / s_2$$

$$x_2 + x_1 = x_1 (1 + 2s_1 + s_2) / s_2$$

Чему равно α_2 в этой игре?

После первой улицы размер банка будет равен $1 + 2s_1$. Тогда α_2 составит $s_2/(1 + 2s_1 + s_2)$. Подставляя это в уравнение, полученное выше, получаем:

$$x_2 + x_1 = x_1 / \alpha_2$$

$$x_1 = \alpha_2(x_2 + x_1)$$

Мы уже сталкивались с этим ответом выше. Игрок X должен рассматривать каждую улицу в отдельности и руководствоваться лишь соответствующим значением α . Так, на вторую ставку он должен скинуть α_2 от рук, которые уравнивают первую $(x_2 + x_1)$.

Безразличия для игрока X также мало чем отличаются от лимитного случая:

	X_0	X_1	X_2
Y_0	0	0	0
Y_1	+1	$-s_1$	$-s_1$
Y_2 (блеф)	+1	$+(1 + s_1)$	$-(s_1 + s_2)$
Y_2 (вэлью)	0	$+s_1$	$+(s_1 + s_2)$

$$y_1 + y_2 y_b = -s_1 y_1 + (1 + s_1) y_2 y_b + s_1 y_2 y_v$$

$$(1 + s_1) y_1 = s_1 y_2 y_b + s_1 y_2 y_v$$

$$y_1 = y_2 s_1 / (1 + s_1)$$

$$y_1 = \alpha y_2$$

Как и раньше, количество рук, с которыми игрок Y блефует один раз равно α от общего диапазона ставки на второй улице.

$$-s_1 y_1 + (1 + s_1) y_2 y_b + s_1 y_2 y_v = -s_1 y_1 - (s_1 + s_2) y_2 y_b + (s_1 + s_2) y_2 y_v$$

$$(1 + s_1) y_2 y_b + s_1 y_2 y_v = -(s_1 + s_2) y_2 y_b + (s_1 + s_2) y_2 y_v$$

$$(1 + 2s_1 + s_2) y_2 y_b = s_2 y_2 y_v$$

$$(1 + 2s_1 + s_2) y_b = s_2 y_v$$

$$y_b = \alpha_2 y_v$$

Получается, что это решение подходит для любых размеров ставок (при условии, что диапазоны участников не слишком сильны). Чтобы определить оптимальные размеры s_1 и s_2 , нам нужно найти максимум для функции ожидаемого выигрыша игрока Y.

Здесь мы можем прибегнуть к интересному упрощению, которое также поможет нам в понимании принципа выбора оптимального бетсайзинга. Предположим, что игрок Y ставит s_1 в банк 1. Если оппонент уравнивает, то банк увеличится с 1 до $(1 +$

$2s_1$). Пусть r_1 - коэффициент, задающий отношение нового банка к старому в случае колла ставки s_1 . То же самое касается и r_2 , но уже для ставки s_2 .

$$r_n = (p_n + 2s_n)/p_n$$

Естественно, рассматриваемое здесь r не имеет ничего общего с коэффициентом рейзов из уравнения 14.1.

Как следует из приведенного выше определения, для любой улицы верно следующее:

$$r = 1 + 2s$$

(если в начале улицы размер банка равен 1)

Вычтем из обеих частей уравнения s , получим:

$$r - s = 1 + 2s - s$$

$$r - s = 1 + s$$

$$r - s = (2 + 2s)/2$$

$$r - s = (1 + r)/2$$

Также верно будет и следующее

$$\alpha = s/(1 + s)$$

$$\alpha = s/(r - s)$$

Примечание от переводчика: Это уравнение получилось следующим образом.

$$r = 1 + 2s$$

$$r = 1 + s + s$$

$$r - s = 1 + s$$

Делаем замену, получаем требуемую модификацию α .

Пусть величина M_n выражает размер диапазона «вэлью рук», будь то ривер (где мы имеем ввиду натсы) или одна из ранних улиц торговли (где имеется ввиду комбинация блефов и натсов). На любой улице количество рук, с которыми мы будем делать бет (на вэлью или блеф) будет равно (B_n):

$$B_n = s_n M_n / (r_n - s_n) + M_n$$

$$B_n = M_n (r_n - s_n + s_n) / (r_n - s_n)$$

$$B_n = M_n r_n / (r_n - s_n)$$

$$B_n = 2M_n r_n / (1 + r_n)$$

Это очень важное уравнение. Фактически, здесь мы нашли множитель, который можем применять на любой улице, чтобы найти диапазон для блефа.

Так, на второй улице нашей игры весь диапазон для ставки составляет (пусть у игрока Y диапазон натсов равен y):

$$B_2 = 2yr_2 / (1 + r_2)$$

В то же время диапазон для ставки на первой улице будет выглядеть следующим образом:

$$B_1 = 2B_2r_1 / (1 + r_1)$$
$$B_1 = 4yr_1r_2 / (1 + r_1)(1 + r_2)$$

Давайте еще раз пройдемся по всем выкладкам и выведем нужным нам ответ.

Мы определили r_n как отношение размера банка после ставки и колла на текущей улице к размеру банка до нее.

Мы составили уравнение, которое позволяет нам выразить общий диапазон для ставки (с блефами и вэлью бетами) на любой улице:

$$B_n = 2M_nr_n / (1 + r_n)$$

Здесь M_n - это количество рук, с которыми будет сделана ставка на следующей улице (если таковые остались), или количество натсовых рук (если мы находимся на последней улице).

Если игрок Y ставит s_1 и s_2 с оптимальной частотой, то игроку X будет безразлично, что делать на любой из улиц: колл или фолд. Однако не стоит рассчитывать на то, что игрок X просто скинет свои руки, и его оппонент заберет банк с блефами. Наоборот, игрок X будет стараться играть по оптимальной стратегии, которая предусматривает и коллы. Значит, игрок Y будет стараться поставить в банк как можно больше денег с натсами (следовательно, и с блефами). Тогда сумма s_1 и s_2 должна быть равна всему стэку игрока Y, то есть N.

Пусть игрок X никогда не скидывает свою руку (поскольку он безразличен к выбору действия, такое упрощение уместно). Поскольку $s_1 + s_2 = N$ в любом случае, игрок Y получит наивысшее ожидание, если максимизирует свой диапазон для ставки.

Общее количество рук, с которыми игрок Y поставит:

$$B_1 = 4yr_1r_2 / (1 + r_1)(1 + r_2)$$

Очевидно, что $4u$ это константа, поэтому нам нужно найти максимум для следующего выражения:

$$r_1 r_2 / (1 + r_1)(1 + r_2)$$

$r_1 r_2$ также является константой (размеры стэков в раздаче, N , естественно, величина постоянная):

$$r_1 = (1 + 2s_1)$$

$$r_2 = (1 + 2s_1 + 2s_2) / (1 + 2s_1)$$

$$r_2 = (1 + 2N) / (1 + 2s_1)$$

$$r_1 r_2 = (1 + 2N)$$

То есть, теперь мы ищем максимум для:

$$1 / (1 + r_1)(1 + r_2)$$

Мы знаем, что r_1 и r_2 положительны; следовательно, мы можем просто минимизировать знаменатель (тогда мы и получим максимальное значение этой дроби):

$$(1 + r_1)(1 + r_2) = 1 + r_1 + r_2 + r_1 r_2$$

$$(1 + r_1)(1 + r_2) = 2 + 2N + r_1 + r_2$$

Не обращаем внимание на константы. Нам осталось найти минимум для $(r_1 + r_2)$, при условии, что $r_1 r_2$ является величиной постоянной. Оказывается, что это выражение достигает своего минимум только при $r_1 = r_2$.

На самом деле, этот ответ можно обобщить для произвольного количества улиц. Используя ту же логику, мы можем определить, что ожидание игрока Y в игре с тремя улицами составит:

$$B_1 = 8u r_1 r_2 r_3 / (1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)$$

Однако, если $B_1 \geq 1$, тогда игроку Y будет не хватать блефов. В таком случае он должен будет поставить величину приращения банка. А игрок X , в свою очередь, будет вынужден скинуть со **всеми** руками.

Снова отбросим все константы, получим выражение $r_1 + r_2 + r_3$, которое нам нужно минимизировать, причем $r_1 r_2 r_3$ будет являться величиной постоянной. И снова эта сумма окажется минимальной при $r_1 = r_2 = r_3$.

Мы называем такую прогрессию ставок (на каждой улице банк увеличивается на одно и ту же часть) **геометрическим ростом банка**. Эта идея очень важна для понимания бетсайзинга в безлимитном покере в целом.

Итак, когда мы имеем дело со статичной игрой и один из участников ясновидящий, оптимальная стратегия предполагает одинаковые приращения банка на каждой улице, причем в итоге мы должны поставить весь свой стэк в центр стола.

Ниже мы приведем небольшой пример, в котором хорошо видна разница между только что проанализированной стратегией (против оппонента, следующего оптимальной стратегии) и линией, что может подсказать вам интуиция.

Пример 19.3

- На начало раздачи стэки игроков X и Y составляют \$185, анте по \$5.
- Игроку Y сдается одна карта из полной колоды.
- Три улицы торговли, ставки без ограничений.
- На вскрытии игрок Y выигрывает только с A или K, проигрывает во всех остальных случаях.

Эта игра эквивалентна игре с ясновидящим, которую мы обсуждали ранее, однако в этом случае мы имеем дело с тремя улицами торговли.

Для начала, мы можем найти шоудаун вэлью, то есть ожидание игрока Y, если оба участника просто дойдут до вскрытия без ставок. Он будет выигрывать в $\frac{2}{13}$ случаев, значит, его ожидание без учета анте составит \$1.54, однако если мы вычтем отсюда вложенные в банк деньги, то получим минус \$3.46.

Чтобы сделать эту игру прибыльной, Y должен добавить к своему ожидаемому выигрышу \$3.46 делая ставки на трех улицах. Давайте сравним ожидания от двух различных стратегий бетсайзинга:

$\mathcal{I}_1$: Игрок Y ставит ровно треть своего стэка на каждой улице.

$\mathcal{I}_2$: Игрок Y ставит согласно принципу геометрического приращения банка

Очевидно, для $\mathcal{I}_1$ каждая ставка будет составлять \$60. В стратегии $\mathcal{I}_2$ мы можем использовать тот факт, что $10r_1r_2r_3 = 10r^3 = \$370$. Значит, r равняется кубическому корню из 37, или же 3,3322. Кроме того, На каждой улице $p_n + 2s_n = rp_n$

Улица #1:

$$\$10 + 2s_1 = \$10r$$

$$s_1 = \$11.66$$

Улица #2:

$$\$33.32 + 2s_2 = \$33.32r$$

$$s_2 = \$38.86$$

Улица #3:

$$\$111.04 + 2s_3 = \$111.04r$$

$$s_3 = \$129.48$$

Игрок X будет играть по оптимальной стратегии, уравнивая $p_n/(p_n + s_n)$ раз на каждой улице. Его ожидаемый выигрыш в таком случае составит:

Улица	Ставка Y (χ_1)	Частота колла X	Ставка Y (χ_2)	Частота колла X
1	\$60	14.29%	\$11.66	46.2%
2	\$60	68.42% -> 9.77%	\$38.86	46.2% -> 21.3%
3	\$60	80.6% -> 7.88%	\$129.48	46.2% -> 9.84%
Всего	\$60	7.88%	\$90	4.06%

Мы знаем, что игрок Y получит нейтральное ожидание со своими блефами. Однако для вэлью бетов его математическое ожидание будет равно:

$$<\chi_1> = (14.29\%) (\$60) + (9.77\%) (\$60) + (7.88\%) (\$60) = \$19.16$$

$$<\chi_2> = (46.2\%) (\$8.34) + (21.3\%) (\$22.26) + (9.84\%) (\$59.40) = \$26.41$$

Таким образом, игрок Y в среднем выигрывает на 7 долларов больше от стратегии геометрического приращения банка. И этого вполне достаточно, чтобы игра стала приносить ему прибыль. Здесь стоит заметить, что максимальное экс-шоудаун вэлью для игрока Y не может превышать шоудаун вэлью игрока X - в таком случае последнему бы только оставалось скинуть свою руку и отдать оппоненту \$5 анте.

Примечание от переводчика: Полученные результаты для этих двух стратегий мы должны умножить на 2/13, поскольку вкладывать деньги в банк мы будем только с этими вэлью руками. Причем полученное произведение будет нашим экс-шоудаун вэлью (ведь в нем не учитывается анте). Затем нам необходимо сравнить полученный результат с шоудаун вэлью (\$-3.46).

Рассмотрим график зависимости r от размера стэка на двух и трех улицах торговли:

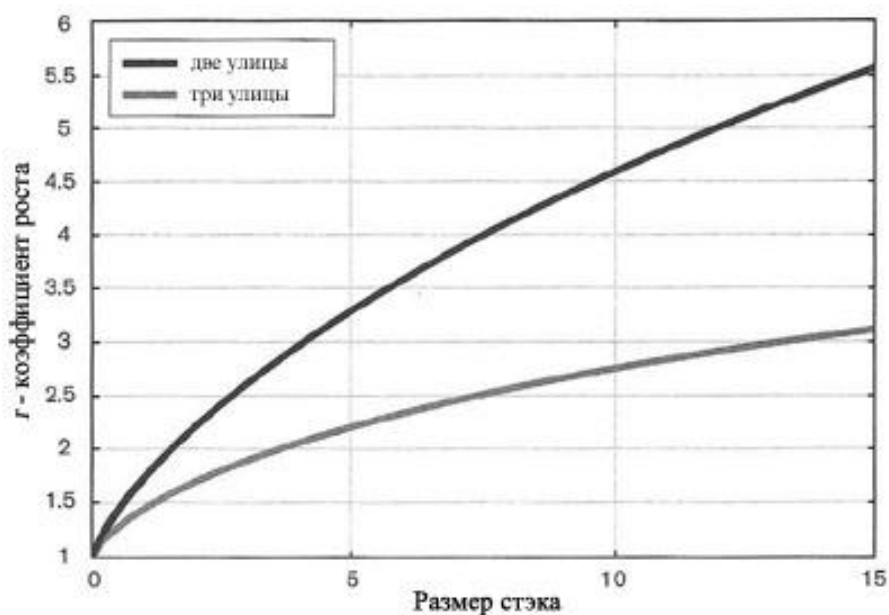


Рисунок 19.1. Геометрический рост банк для двух и трех улиц

При r равном 3, s достигает значения 1, то есть мы начинаем ставить ровно размер банка. Как вы можете заметить, чтобы такие беты были оптимальными, стэки должны быть как минимум в 13 раз больше размера банка. В то же время при стэках в 3,5 раза больше банка ставки в половину банка достаточны для того, чтобы можно было вложить все деньги по стратегии геометрического приращения.

Аукционные игры (игры на бесконечном числе улиц)

Последние из статичных игр, которые мы изучим в этой главе, имеют мало общего с покером; в сущности, структура их решений достаточно сильно отличается от многих из рассмотренных выше игр.

Однако такие игры помогают лучше понять по крайней мере один важный принцип, и кроме того имеют несколько просто интересных свойств. Эти игры происходят на бесконечном числе улиц и называются **аукционными**.

Пример 19.4

Мы начинаем с рассмотрения игры с ясновидящим на очень большом количестве улиц.

- М полных улиц
- Сила рук игроков не изменяется от улицы к улице
- Размер банка - 1 единица
- Ставки ограниченного размера (стэки по S единиц)
- Игрок Y ясновидящий

Применяя принцип геометрического приращения банка к ситуации с M улиц, получим следующее:

Итоговый размер банка составит (после того, как игроки вложат в банк свои стэки) $1 + 2S$.

$$P = 1 + 2S$$

Рост банка на каждой улице будет равен корню степени M из P (это геометрический рост банка для M улиц),

$$G = P^{(1/M)}$$

Размер ставки s (для текущего размера банка) на каждой улице будет равен:

$$s = (G - 1)/2$$

Предположим, что мы делаем колл на первой улице, где банк равен 1. Игрок Y поставит с оптимальным вэлью диапазоном u_v , а блефовать он будет с $s/(1 + s)$ от u_v . В итоге он будет ставить с диапазоном $u_v(1 + 2s)/(1 + s)$.

Мы можем переформулировать это следующим образом. Отношение количества рук, с которыми он поставит на $m + 1$ улице к количеству рук, с которыми он поставит на m улице равно:

$$r_b = (1 + 2s)/(1 + s)$$

В некотором смысле эту величину можно назвать мультипликатором блефов. Представьте, что мы анализируем игру на двух улицах со стэками в 1 единицу и таким же банком. Геометрическое приращение в таком случае предполагает, что мы должны разогнать банк с 1 до 3 за две улицы. Значит r в этой игре равно $\sqrt{3}$, а размер ставки на каждой улице составит $(\sqrt{3} - 1)/2$, или примерно 0,366. Далее идут блефы. Пусть игрок Y имеет в своем диапазоне u вэлью бетов, тогда на ривере он будет блефовать с $us/(1 + s)$ рук. Причем для выбранного бетсайзинга выражение $s/(1 + s)$ примерно равно 0,268. Таким образом, на ривере игрок Y будет ставить с $1,268u$ рук, а на терне - с $(1,268)^2u$. Подставляем 0,366 вместо s в формулу для r_b , получим, что $r_b = 1,268$.

Пусть количество натсов в диапазоне игрока Y на протяжении всей игры выражается неким u . Тогда u_m - количество рук, с которым он ставит на улице ($m + 1$), а u_m - диапазон вэлью бета, то есть, $u_m = u$. В свою очередь, u_0 мы будем называть диапазон для ставки на первой улице. Получим:

$$y_m = y_0(r_b)^m$$

$$y_M = y_0(r_b)^M = y$$

$$y_m = y(r_b)^{m-M}$$

$$y_0 = y(r_b)^{-M}$$

Однако здесь мы можем столкнуться с определенными трудностями. Предположим, что $y_0 > 1$. Тогда возникает ситуация, которую мы уже обсуждали ранее - игроку Y просто не хватает блефов в диапазоне. В таком случае оптимальной стратегией для него будет бет, а игрок X будет обязан скидывать все свои руки.

В противном случае игрок X будет уравнивать $1/(1 + s)$ раз. Пусть x_m - это число рук, с которыми он делает колл на улице ($m + 1$). Тогда:

$$r_c = 1/(1 + s)$$

$$x_m = (r_c)^m$$

Примечание от переводчика: Это уравнение фактически значит, что игрок X должен рассматривать каждую улицу в отдельности и уравнивать a раз.

В любом из этих случаев, если игрок Y следует оптимальной стратегии, игрок X оказывается безразличными к коллу или фолду. Поэтому цена рассматриваемой игры составляет $y_0 - y$, что представляет собой интересную зависимость ожидания от количества блефов в диапазоне игрока Y .

Теперь обратимся к игре совершенного иного типа.

Пример 19.5 - Аукционная игра

- Сила рук не изменяется от улицы к улице
- Ставки ограниченного размера (стэки по S единиц)
- Размер банка - 1 единица

Каждый игрок делает ставку, но не говорит о ней своему оппоненту, затем обе ставки вскрываются одновременно.

Мы будем обозначать размеры ставок через s_x и s_y . Очевидно, что каждая из них должна находиться на интервале $[0, S]$. Обе ставки прибавляются к банку.

Если $s_x > s_y$, то игрок X выигрывает. Если $s_y > s_x$, то выигрывает игрок Y . Если $s_x = s_y$, то происходит вскрытие (обычно такое будет происходить, когда обе ставки оказываются равны стэкам).

Действительно, эта игра мало чем напоминает покер. Однако давайте попробуем на время абстрагироваться от этого факта. Представьте, что мы имеем дело с некой покерной игрой со статичными руками на M улицах по описанным выше правилам.

Для каждой руки, которая у нас может оказаться, мы подберем свое значение s_x , которое будет составлять некую долю от нашего стэка S .

На каждой улице мы будем ставить одинаковую часть нашего оставшегося стэка $\varepsilon = S/M$, пока мы не достигнем определенного порогового значения s_x , выше которого мы подниматься не готовы. После этой точки мы просто сделаем чек и сдадимся. ε - это греческая буква эпсилон, которая была введена ранее и представляет некую очень малую величину. Как мы увидим в этой игре, с ростом числа улиц ε будет стремиться к 0. Если наш оппонент сделает рейз любого размера, то мы уравниваем только в том случае, если он окажется меньше порогового значения, и на следующей улице продолжим ставить ε с учетом оставшегося стэка и улиц торговли. Если же рейз окажется выше нашего порога, мы сделаем фолд.

Примечание от переводчика: Мы будем ставить ε на каждом шагу аукциона (то есть будем считать размер каждой ставки исходя из размера начального стэка) поскольку мы не хотим слишком быстро прийти до нашего порога, и не хотим показывать оппоненту, что замедляемся около пороговой точки (это бы происходило если бы мы использовали в формуле вместо S наш порог) - в таком случае он может сделать рейз и забрать у нас банк.

Теперь предположим, что мы играем против идеального оппонента. Каково его ожидание от эксплуатации нашей стратегии? Чтобы определить, чему равен наш порог, он должен будет уравнивать, пока мы не сделаем чек. То есть он не может эксплуатировать нас в столь элементарном ключе. В сущности, он получит прибыль только в том случае, если наша стратегия заставит нас поставить немного больше, чем s_x . Предположим, что количество улиц равняется 100, а $s_x = 0,601$. Для первых 60 улиц наша ставка будет равна 0,01. На 61 улице мы все еще не достигли заданного порога, однако мы не можем начать ставить меньше, не сделав нашу стратегию открытой для эксплуатации (оппонент сразу поймет, что это и есть наш порог). Поэтому, мы снова ставим 0,01, доводя нашу общую ставку до 0,61. Это значение на 0,009 больше, чем то, которым мы собирались рисковать; и практически против всех рук, с которыми оппонент уравнивал до этого момента, мы теряем эти дополнительные 0,009.

Давайте посмотрим, каким ожиданием для идеального оппонента обладает рейз. Пусть мы делаем ставку на какой-то определенной улице, доводя общий размер поставленных денег до x . Так как мы только что поставили, он должен знать, что

значение порога s_x должно быть не меньше, чем $x - \varepsilon$. Предположим, что он делает рейз до y единиц. Тогда возможны три сценария

- $s_x < y$. В этом случае мы делаем фолд. Однако оппонент мог бы выиграть больше (как минимум $s_x - x$) просто уравнивая наши ставки, пока мы не сдадимся.
- $s_x > y$. В этом случае мы сделаем колл. Однако после этого наш размер ставки для каждой улицы уменьшится - вместо $(S - x)/M_{ост}$ мы будем делать ставку меньшего размера, $(S - y)/M_{ост}$. Учитывая, что мы уже показали, как оппонент может заработать на нашей стратегии сумму до ε , он, очевидно, не захочет уменьшать эту величину.
- $s_x = y$. В этом случае мы уравниваем, но затем всегда сделаем чек и сдадимся. А идеальный оппонент не выиграет ничего.

Получается, что единственный выбор для идеального оппонента - делать колл, пока мы не скажем чек.

На решение этой игры можно посмотреть и с точки зрения теории игр. Пусть существует некая пара стратегий (X, Y) , причем мы знаем ожидание для идеального оппонента против X и против Y . Однако цена игры будет находиться между этими двумя значениями, поскольку оптимальная стратегия игрока X будет обладать меньшим ожиданием, чем стратегия идеального оппонента, то же самое верно и для игрока Y . Таким образом, цена игры для идеального оппонента в лучшем случае составит $G - \varepsilon$ (где G - цена игры при использовании оптимальной стратегии).

И поскольку мы знаем, что если количество улиц в игре, M , стремится к бесконечности, то ε будет стремиться к 0, так как M - знаменатель выражения $\varepsilon = S/M$. Получается, что цена любой игры сводится к цене аукционной игры с соответствующими параметрами. А играя в аукционную игру на произвольном числе улиц максимум, что мы потеряем - это ε .

Примечание от переводчика: Параграф выше значит, что если количество улиц в игре уходит в бесконечность, то позиция перестает иметь всякое значение, также как и эксплуатация.

Пример 19.6

Далее мы рассмотрим аукционную игру с ясновидящим.

- Игрок Y ясновидящий.
- Правила аукционной игры со стэками S единиц и начальным банком равным 1 единице.

Пусть у игрока Y есть y натсов. Тогда мы будем рассматривать всего три типа рук: руки игрока X , которые ничем не отличаются друг от друга, натсы игрока Y и воздух игрока Y . Вполне понятно, что игрок Y будет всегда выбирать $s_y = S$ с натсами, ведь он захочет поставить в банк как можно больше денег с очень сильной рукой. Пусть $x(s)$ - часть рук, с которой игрок X будет ставить как минимум s , а $y(s)$ - часть рук, с которой Y будет ставить как минимум s .

Стратегия игрока Y будет заключаться в том, чтобы ставить S с натсовыми руками и выбирать s_y для блефов таким образом, что он будет постепенно с ними пока у него не останется $y(S) = y$. Чтобы сделать игрока Y безразличным между ставками s и $(s + \Delta s)$ с мертвой рукой, мы можем сделать следующее. (Δs или «дельта s » обычно используется для обозначения незначительных приращений величины s):

$$-\Delta x = x(s + \Delta s) - x(s)$$

(x , то есть доля рук, готовых внести в банк деньги, будет уменьшаться с увеличением s).

Примечание от переводчика: Авторы используют не совсем понятные формулы, ответа от них дожидаться не удалось. Вполне вероятно, что это формулы из примера 19.4.

$$-x\Delta s + \Delta x\Delta s + (1 + 2s)(-\Delta x) = 0$$

$$(1 + 2s + \Delta s) \cdot \Delta x = x\Delta s$$

$$-\Delta x/x = \Delta s/(1 + 2s - \Delta s)$$

При $\Delta s \rightarrow 0$ получим:

$$-\Delta x/x = \Delta s/(1 + 2s - \Delta s)$$

$$-\Delta x/x \approx \Delta s/(1 + 2s)$$

$$-dx/x = ds/(1 + 2s)$$

Примечание от переводчика: Здесь подразумевается, что мы получили форму производной (поскольку производная - это также приращение функции).

Проинтегрировав обе части, мы получаем:

$$-\ln(x) + C = \ln(1 + 2s)/2$$

$$\ln(Cx^2) = \ln(1 + 2s)$$

$$x(s) = k / \sqrt{1 + 2s}$$

Очевидно, $x(0) = 1$, так как все руки должны поставить хотя бы 0. Следовательно, $k = 1$, и тогда:

$$x(s) = 1 / \sqrt{1+2s}$$

Тем же образом игрок Y должен сделать оппонента безразличным между s и $s + \Delta s$:

$$\begin{aligned} (-\Delta y)(1 + 2s + \Delta s) + y(\Delta s) &= 0 \\ -\Delta y/y &= \Delta s/(1 + 2s + \Delta s) \end{aligned}$$

При $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} -dy/y &= ds/(1 + 2s) \\ y(s) &= k/\sqrt{1+2s} \end{aligned}$$

Мы знаем, что $y(S) = y_0$, поэтому:

$$y = k / \sqrt{1+2S}$$

Таким образом, $y(s) = y \sqrt{\frac{1+2S}{1+2s}}$, а $x(s) = 1 / \sqrt{1+2s}$.

Однако в этом случае, опять же, y_0 может быть больше 1. Значит, решение игры выглядит следующим образом:

$$y(s) = y \sqrt{\frac{1+2S}{1+2s}} \text{ (или 1, мы ищем наименьшее значение)}$$

$$x(s) = 1 / \sqrt{1+2s} \text{ (или 0, если } y(\sqrt{1+2s}) > 1)$$

Иными словами, каждое из этих выражений означает то количество рук, с которым игроки X или Y (соответственно) будут ставить по меньшей мере s на аукционе (при стэках S).

Например, если стэки составляют 10 единиц и игрок Y имеет в своем диапазоне 50% натсов, то он будет ставить как минимум s :

$$\begin{aligned} y(1) &= (0,5) \sqrt{(1+2*10)/(1+2*1)} \\ y(1) &= (0,5) \sqrt{7} \\ y(1) &\approx 1,323 \end{aligned}$$

Так как это значение больше 1, то ему следует делать бет со всеми диапазоном.

Он будет ставить как минимум 5 с руками:

$$y(5) = (0,5) \sqrt{(1+2*10)/(1+2*5)}$$

$$y(5) = (0,5) \sqrt{\frac{21}{11}}$$

$$y(5) \approx 0,691$$

Получается, что игрок Y будет ставить со всеми натсами и еще с 0,191 от общего числа рук в качестве блефов.

Примечание от переводчика: Очевидно, что если $y(s)$ больше единицы, то это невозможный случай, ведь диапазон игрока Y не может составлять 132%. Значит, мы просто говорим о том, что будет ставить со всеми руками. Но если доля рук, с которыми он поставит некое количество денег s меньше единицы, тогда чтобы найти нужную долю блефов, нам из полученного значения придется вычесть долю натсов.

Также легко показать, что при $M \rightarrow \infty$ мы только что получили решения для игры против ясновидящего на M улицах. Мы специально не будем рассматривать случаи, когда у игрока Y в диапазоне не хватает блефов и поговорим о более привычной ситуации, когда оба игрока следуют смешанным стратегиям на первой улице.

Чтобы избежать путаницы по отношению к переменной s , пусть

$$s_n = (G - 1)/2,$$

Это выражение задает частоту ставки на одной улице (пример 19.4)

Мы можем использовать следующие упрощения:

$$s_n = (G - 1)/2 \approx \ln(G)/2 = (\ln P) / 2M$$

Из решения покерной игры с ясновидящим (пример 19.1), мы знаем, что $x_m = r_c^m$.

$$x_m = r_c^m$$

$$x_m = (1 + s_1)^{-m}$$

$$x_m \approx e^{-ms_1}$$

$$x_m \approx \exp\left(-\frac{m}{2M} \ln P\right)$$

$$x_m \approx P^{-m/2M}$$

Также мы знаем, что размер банка после этой улицы будет равен:

$$\begin{aligned}1 + 2s_1 &= G_m \\ 1 + 2s_1 &= P^{m/M}\end{aligned}$$

Произведем замены и получим:

$$x_m = (1 + 2s_1)^{-1/2}$$

$$x_m = x(s)$$

То же самое справедливо и для $y(s)$.

Нужно запомнить

- Игру против ясновидящего можно продлить на несколько улиц. В таком случае ключевым элементом решения будут «вложенные» друг в друга диапазоны, при которых ясновидящий должен чаще блефовать, но затем сдаваться с частью блефов на следующих улицах.
- Для безлимитной игры с ясновидящим на нескольких улицах оптимальным бетсайзингом является геометрическое приращение банка.
- С увеличением количества улиц позиционное преимущество сводится к нулю - аукционная игра полностью симметрична.
- Как показывает аукционная игра, в играх со статичными руками имеет смысл делать небольшие ставки на каждой улице. Однако этот принцип может не соблюдаться в играх с дро.
- Неясновидящий игрок должен рассматривать игру на нескольких улицах как последовательность игр на одной улице.
- Количество рук, с которыми игрок Y блефует на текущей улице, но затем сдается, находится в соотношении a с общим диапазоном, который он поставит на второй улице.

Глава 20

Тянем дро: Игры с дро на нескольких улицах

В прошлой главе мы изучали игры на нескольких улицах против ясновидящего, где ценность рук не изменялась на протяжении всей раздачи. Мы показали, что игрок, который не является ясновидящим, должен принимать решения как если бы игра проходила на одной улице. В свою очередь, ясновидящий игрок комбинировал свои диапазоны и стремился построить свою стратегию таким образом, чтобы на ривере у него было оптимальное соотношение блефов и натсов.

В этой главе мы сделаем рассматриваемые игры несколько более сложными, добавив в них дро. Это значит, что теперь в диапазонах игроков окажутся руки, которые могут улучшиться на одной из следующих улиц торговли.

Также мы будем использовать термины *открытое дро* (очевидное дро, которое закрылось на одной из улиц; например - третья карта к флэшу на ривере), а также *скрытое дро* (неочевидные дро; также применяется для ситуаций, где только один из игроков знает, закрылось ли дро, как, например, в Стаде).

Мы начнем с анализа еще одной игры против ясновидящего, в которой, как ни странно, нет никаких дро. Тем не менее, она послужит неплохой отправной точкой для последующего анализа.

Пример 20.1 - Игра против ясновидящего (открытые дро)

- Лимитный Холдем, в банке 6 больших ставок
- Игрок X показывает свою пару тузов
- Диапазон игрока Y состоит из $7/8$ одномастных червовых рук, а также $1/8$ воздуха
- Доска имеет вид: $Q♥ 7♦ K♥ 4♣ 8♥$

Решение для первой игры с ясновидящим, которую мы рассмотрели в этой книге (приер 11.1) подскажет, что игрок Y должен ставить на вэлью со всеми флэшами, а также блефовать с достаточным количеством мертвых рук, чтобы игрок X оказался безразличен к коллу. Используя уже знакомые нам соотношения блефов и вэлью бетов, мы можем вывести следующую оптимальную стратегию:

Игрок X делает чек, игрок Y ставит все флэши ($7/8$) и α мертвых рук ($1/8$ от своего диапазона). Игрок X должен скидывать α от всех своих рук ($1/7$) и уравнивать с оставшимися $6/7$.

Пример 20.2

- Лимитный Холдем, вышел терн, в банке 4 больших ставки
- Игрок X показывает свою пару тузов
- Диапазон игрока Y состоит на $\frac{1}{10}$ из одномастных червовых рук, а также из $\frac{9}{10}$ воздуха
- Доска имеет вид: Q♥ 7♦ K♥ 4♣

Для упрощения расчетов давайте считать, что флэш закроется на ривере ровно 20% раз. Мы также не будем обращать внимания на тот факт, что нужная карта будет приходить реже, поскольку у игрока Y на руках иногда окажется пара червовых карт.

Какие действия игроки будут предпринимать на терне? Во второй части книги мы уже анализировали похожие игры. Вполне очевидно, что игрок X будет делать ставку во всех случаях без исключения. А так как у игрока Y сейчас нет рук, которые бы были впереди тузов, он будет делать колл только при наличии подходящих шансов банка. Однако он также уравнивает и с некоторой частью своих блефов, надеясь забрать банк на ривере, если выйдет третья карта к флэшу. Мы можем найти этот диапазон исходя из итогового размера банка. После бета и колла на терне в центре стола окажутся 6 больших ставок. Игрок Y захочет блефовать на третьей карте к флэшу $\alpha = 1/(P+1) = \frac{1}{7}$ от своего вэлью диапазона, или с $\frac{1}{70}$ от всех своих возможных рук.

Примечание от переводчика: Здесь используется коэффициент α , а не α_2 , поскольку авторы рассматривают ситуацию на одной конкретной улице (ривер), а не череду ставок на нескольких улицах (как это было в предыдущей главе).

Теперь представьте, что на ривере вышла 8♥. Мы получаем ту же ситуацию, что и в примере 20.1 – в банке 6 больших ставок, диапазон игрока Y содержит в себе как флэши, так и блефы, текстура доски ничем не отличается.

Игрок Y будет ставить со всеми флэшами, а также блефами, которые должны составлять $\frac{1}{7}$ от количества флэшей. Вполне понятно, что больше мертвых рук на ривере у него не окажется (он делал колл на терне в расчете на блеф именно с этим диапазоном).

Перед тем как мы продолжим обсуждать решение для этой игры, давайте остановимся и подумаем, как часто игроку X следует уравнивать. В игре на одной улице частота колла была $\frac{6}{7}$. Однако в этом случае, как вам уже подсказывает интуиция, ответ будет несколько иным.

Пусть игрок X решает всегда скидывать свою руку - как мы уже оговорили выше, его оппонент будет играть на ривере оптимально и сделает игрока X безразличным к коллу или фолду. С другой стороны, мы знаем, что если бы игрок X решил никогда не делать колл, то игроку Y не составило бы труда его эксплуатировать. В таком случае, поскольку на ривере у игрока Y оказывается весьма ограниченный набор рук, который он подбирал для оптимальной игры только на этой улице, ему нужно будет изменить свой диапазон для колла на терне и включить в него больше блефов.

Но здесь есть пара подводных камней. Чтобы чаще блефовать на ривере, игроку Y придется делать на терне колл с мертвой рукой, а третья карта к флэшу выйдет только в одном случае из пяти. Иными словами, $\frac{4}{5}$ раз он не сможет реализовать свой замысел, так как тузам его оппонента ничего не будет угрожать. Так что все это время игрок Y будет терять ставку, сделанную на терне. Он может себе это позволить себе только если игрок X действительно никогда не делает колл на ривере - тогда $\frac{4}{5}$ раз он потеряет одну ставку, но выиграет пять, когда на ривере выйдет флэш; общее ожидание составит плюс $\frac{1}{5}$ ставки.

Значит, игроку X нужно найти альтернативную стратегию. На самом деле, он должен стараться сделать своего оппонента безразличным не к блефу на ривере с мертвой рукой, а к линии «Колл на терне с блефом, бет на третьей карте к флэшу на ривере».

Пусть x - частота колла игрока X на ривере. Если мертвые руки его оппонента падают уже на терне, их ожидаемый выигрыш составит 0. Чтобы они оказались безразличны к альтернативной линии, ее ожидание также должно равняться нулю. Мертвые руки теряют 2 ставки, когда на ривере приходит флэш, но тузы игрока X все равно делают колл; выигрывают 5 в случае успешного блефа; а также проигрывают 1 ставку, если на ривере не вышла третья карта к флэшу.

$$\langle \text{Мертвые руки, фолд} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Мертвые руки, колл} \rangle &= p(\text{колл}) p(\text{флэш на ривере}) (-2) + \\ &+ p(\text{флэш на ривере}) p(\text{фолд}) (5) + p(\text{бланк на ривере}) (-1) \end{aligned}$$

$$\langle \text{Мертвые руки, колл} \rangle = x\left(\frac{1}{5}\right) (-2) + \left(\frac{1}{5}\right) (1 - x) (5) + \frac{4}{5} (-1)$$

$$\langle \text{Мертвые руки, колл} \rangle = x\left(-\frac{7}{5}\right) + \frac{1}{5}$$

$$x\left(-\frac{7}{5}\right) + \frac{1}{5} = 0$$

$$x = \frac{1}{7}$$

Здесь можно сделать несколько выводов об игре на двух улицах.

Первый:

Чтобы блеф выглядел правдоподобно, его должен подкреплять диапазон сильных рук.

При поиске оптимальной стратегии на ривере мы никогда не должны забывать о стоимости розыгрыша соответствующего диапазона. Так, готовые руки могут реже уравнивать на ривере при закрывшемся дро, поскольку они уже заставили его заплатить на терне. Фактически, готовые руки извлекли нужное им вэлью на предыдущей улице, так что оппонент с дро никак не может эксплуатировать такую стратегию, поскольку оно не будет закрываться на ривере достаточно часто.

Этот принцип находит свое применение и в реальном покере. Например, на самом деле нет ничего хуже, чем оказаться в ситуации с открытым дро на руках. Как мы показали чуть выше, игрок X должен был уравнивать всего с $\frac{1}{7}$ частью своего диапазона на ривере (вместо $\frac{6}{7}$, значит, флэш получает гораздо меньше вэлью!), причем игрок Y ничего от этого не выиграл.

Значительный перевес в эквити на терне позволяет игроку X чаще сдаваться на закрывшемся флэше, ведь его оппонент уже заплатил большое количество денег за возможность блефовать на ривере.

Более того, как вы могли заметить, тот факт, что игрок Y является ясновидящим, почти никак ему не помогает - это происходит в первую очередь из-за слабости его диапазона. Однако, как правило, оптимальные стратегии не поставят вас в подобное положение (с очевидным дро). Покерный теоретик Пол Пудит какое-то время назад даже вывел «Фундаментальную Теорему Дро». Она гласит следующее: если мы ожидаем экшен на следующих улицах в раздаче, каждая наша линия розыгрыша должна содержать в себе натсы для любых карт, которые могут выйти на стол.

Примечание от переводчика: Эту теорему следует понимать так. Если мы думаем, что мы можем получить вэлью на следующих улицах торговли (например, блефуя, либо ставя с натсами), то какую бы линию розыгрыша мы не выбрали, каждая из них должна иметь свой набор натсов для любой вышедшей карты.

Например, если мы играем на терне через чек/колл, когда на доске есть флэш-дро, то у нас должны быть как сеты (натсы на картах, которые не закрывают флэш), а так и флэш-дро (натсы на картах, которые закрывают флэш).

Второй вывод касается применения теории игр в покере:

Игры на нескольких улицах нельзя представить в виде связанных между собой игр на одной улице; решение для таких игр зачастую предполагает в корне иную стратегию.

В первом примере из этой главы мы рассматривали стратегию игры на ривере безотносительно терна. Однако решение для игры на двух улицах, как оказалось, существенно отличалось, хоть ситуация на ривере (после ставок на терне) никак не изменилась.

Это и есть наиболее важное различие между математическим анализом шахмат и покера - в шахматах цепочка действий, по которой мы оказались в той или иной ситуации никогда не важна. В то же время в покере каждое действие имеет определенный вес и влияет на стратегию для следующих улиц торговли.

И эта особенность покера представляет собой главное препятствие при вычислении оптимальных стратегий - ни одна раздача не происходит в вакууме. Действия игроков на предшествующих улицах всегда должны быть приняты в расчет, мы всегда имеем дело с сложными и многоуровневыми диапазонами. Более того, мы не можем назвать найденное решение оптимальным, если оно не было получено для полной версии игры, учитывающей все возможные факторы.

И это препятствие сегодня выглядит непреодолимым в первую очередь из-за недостатка вычислительных мощностей современных компьютеров, а также многопользовательской природы покера. Тем не менее, в этой и следующей главе мы продолжим изучать вспомогательные игры на нескольких улицах в поисках идей и результатов, которые позволили бы нам принимать более грамотные решения за столом.

Пример 20.3 - Игра против ясновидящего (смешанные дро)

Представьте, что вместо обычного набора рук, состоящего из дро и блефов, у игрока Y оказывается диапазон, в котором $x\%$ долю занимают флэш-дро (главное дро), $y\%$ - слабые скрытые дро (например, нижние пары, которые могут усилиться до сета), а $z\%$ - мертвые руки. Для упрощения расчетов будем считать, что флэш-дро закроется в 20% случаев, а слабые дро - в 4% (события независимые).

Слабым дро недостает прямых шансов банка для колла на терне даже с учетом потенциального выигрыша на ривере. Однако поскольку игрок Y в любом случае будет уравнивать с частью своих слабейших рук, чтобы иметь сбалансированный диапазон на ривере, он вполне может предпочесть колл с андерпарами вместо колла с мертвыми руками.

Итак, игрок X делает ставку, игрок Y ее принимает с диапазоном, состоящим из трех частей. Причем даже если флэш не закроется на ривере, 4% раз он попадет в сет на бланковой карте. Тогда он поставит свои сеты на вэлью и сбалансирует их

с определенным количеством блефов (в их числе промазавшие дро, слабые пары, которые не попали в сет на ривере, а также все мертвые руки с флопа).

В примере 20.2 было очевидно, какие руки игрок X должен был сделать безразличными к блефу. Однако здесь ему нужно выбирать: сделать оппонента безразличным к коллу со слабыми закрытыми дро или с мертвыми руками. Конкретное решение зависит от доли этих рук в диапазоне игрока Y.

Если $x = 10\%$, а $z = 90\%$, то мы получим ту же самую игру, которую решили в предыдущем примере.

Теперь представьте, что $x = 10\%$, а $y = 90\%$ (иными словами, мертвых рук у игрока Y нет). Тогда игрок X должен сделать своего оппонента безразличным к блефу со слабыми дро. Для этого ему стоит уравнивать на ривере настолько часто, чтобы игроку Y не было разницы, что делать. Пусть x_f - частота колла игрока X на ривере с тремя картами к флэшу, а x_n - частота колла на любой другой карте.

Давайте рассмотрим одно из закрытых дро игрока Y. С ним он может сыграть по одной из нескольких линий. Мы представим их в виде матрицы, поскольку она делает процесс решения более удобным. Обозначения, которые мы будем использовать для стратегий игрока Y выглядят так:

[<Действие на терне>/<Действие на ривере, если вышел флэш>/<Действие на ривере, если вышел бланк >]

Например, [F//] значит фолд на терне, в то время как [C/B/K] - колл флопа, блеф на три-флэш ривере и чек на любой другой карте. При этом если игрок Y попадет в сет, то всегда поставит на вэлью - в таком случае его выигрыш составит 5 ставок из банка плюс некоторые потенциальные ставки, которые зависят от решения игрока X (x_f раз он уравнивает на третьей карте к флэшу и x_n раз на бланке). Также будем считать, что $1/4$ раз сет игроку Y даст третья карта к флэшу.

$$V_{\text{set}} = \left(\frac{3}{4}\right) (5 + x_n) + \left(\frac{1}{4}\right) (5 + x_f)$$

Примечание от переводчика: Это уравнение показывает математическое ожидание от ставки на ривере с сетом. Причем очевидно, что на трех картах к флэшу и на бланке тенденции к коллу у игрока X будут разными (как было отмечено выше).

Эти уравнения получаются следующим образом. Во-первых, мы считаем, если мы забираем банк после фолда оппонента, то выигрываем 5 ставок: 4 ставки из банка плюс ставка оппонента на терне. В общей сложности на ривере банк составляет 6 ставок, однако мы

рассматриваем одну ставку в качестве вложений на терне, когда оцениваем линию целиком. В случае колла мы выиграем 6 ставок (4 + 1 + 1).

На третьей карте к флэшу оппонент уравнивает (x_f) раз, а скинет - ($1 - x_f$) раз. Имеем уравнение:

$$\begin{aligned} x_f (5 + 1) + (1 - x_f) (5) \\ 6x_f + 5 - 5x_f \\ 5 + x_f \end{aligned}$$

Таким же образом находим уравнение и для x_n .

Линия игрока Y	Ожидание игрока Y	Ожидание при $x_n = 1$ и $x_f = 1$
[F//]	$-(1/25)(4) = -0.16$	
[C/V/V]	$(1/25)V_{\text{set}} + (19/100)(-2x_f + 5(1-x_f)) + (77/100)(-2x_n + 5(1-x_n))$	
[C/V/K]	$(1/25)V_{\text{set}} + (19/100)(-2x_f + 5(1-x_f)) - 77/100$	
[C/K/V]	$(1/25)V_{\text{set}} - 19/100 + (77/100)(-2x_n + 5(1-x_n))$	
[C/K/K]	$(1/25)V_{\text{set}} - 19/100 - 77/100$	$72/100$

Коэффициенты $1/25$, $19/100$, и $77/100$ показывают вероятность попадания в сет (с третьей картой к флэшу или нет), вероятность попадания во флэш (но не в сет), а также вероятность полного бланка на ривере.

Из матрицы становится очевидно, что колл и чек на ривере на любой карте всегда будет доминируемой стратегией. Пусть x_n и x_f равны единице (это лучший сценарий для сета). Тогда $\langle [C/K/K] \rangle = 1/25 (6) - 96/100 = -72/100$, что существенно хуже, чем ожидание от фолда на терне

Мы также знаем, что диапазон для блефа на третьей карте к флэшу будет шире, чем диапазон для блефа на любой другой карте (поскольку в первом случае наши блефы лучше подкреплены сильными руками). Значит, должен существовать некий диапазон [C/V/K] помимо [C/V/V].

Причем поскольку на ривере у нас всегда окажутся блефы обоих типов, ставка с ними на ривере без флэша должна подчиняться смешанной стратегии.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} <[C/B/B]> &= <[C/B/K]> \\ \frac{77}{100} (-2x_n + 5(1 - x_n)) &= - \frac{77}{100} \\ 5 - 7x_n &= -1 \\ x_n &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

Мы также знаем, что игрок Y обязан блефовать на ривере хоть какой-то процент раз, так как у него не всегда оказываются натсы:

$$\begin{aligned} \frac{4}{100} V_{\text{set}} + \frac{19}{100} (-2x_f + 5(1-x_f)) - \frac{77}{100} &= \frac{16}{100} \\ \frac{1}{25} ((\frac{3}{4})(5+\frac{6}{7})+(\frac{1}{4})(5+x_f))+ \frac{19}{100} (5-7x_f) &= \frac{61}{100} \\ x_f &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Это очень интересный результат. Добавление в диапазон игрока Y скрытых дро, которые гораздо слабее флэш-дро, заставляет его оппонента делать колл в три раза чаще. Дело в том, что когда на доске возможно лишь некое скрытое дро (не вышла третья карта к флэшу), игрок X обязан уравнивать $\frac{6}{7}$ раз, чтобы его оппонент был безразличен к блефу. В то же время, если на ривере закрылось очевидное дро, то он может перейти к стратегии колла лишь в трех случаях из семи.

Что касается стратегии игрока Y, он должен разыгрывать достаточное количество слабых дро, чтобы иметь нужное количество блефов на ривере с третьей картой к флэшу. Если он продолжает на терне с y скрытых дро, на ривере у него окажется готовая рука $\frac{1}{9}y + \frac{1}{10}$ раз, в то время как коэффициент α должен быть равен $\frac{1}{7}$. Тогда:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{7}) (\frac{1}{9}y + \frac{1}{10}) &= \frac{8}{9}y \\ \frac{8}{9}y &= \frac{1}{63} + \frac{1}{70} \\ y &= \frac{9}{550} \end{aligned}$$

(эта цифра немного больше, чем $\frac{1}{70}$ диапазона, с которой игрок Y должен был продолжать в предыдущей игре)

Теперь давайте обратимся к более общему случаю, где у игрока Y оказываются все три типа рук. Игроку X уже придется выбирать, какую часть диапазона оппонента он хочет сделать безразличной к выбору действия. Как мы уже отмечали выше, игрок Y первым делом внесет в свой диапазон для блефа руки с номинальным эквити (скрытые дро), и только если их не хватит, начнет добавлять в него воздух (с которым он будет блефовать на третьей карте к флэшу).

В некотором смысле рассматриваемая нами ситуация похожа на $[0,1]$ игры. Так, весь диапазон игрока Y разделен на несколько областей: флэш-дро, слабые скрытые дро, воздух. С каждой из них он должен играть по определенной стратегии, чтобы сбалансировать свою стратегию и не дать оппоненту эксплуатировать себя. При этом в определенной точке мы будем наблюдать порог, на котором станет возможной смешанная стратегия - с этой рукой он будет безразличным к выбору действия.

Иногда этим порогом окажется слабое дро (как мы убедились в примере, где не было воздуха), иногда - мертвая рука (как в случае без слабых дро). Однако если в диапазоне игрока Y немного слабых дро, то игрок X никак не сможет сделать своего оппонента безразличным к коллу и блефу на ривере с этими руками - для игрока Y эта линия всегда будет обладать большим ожиданием, чем ее альтернативы.

Присутствие в диапазоне игрока Y флэш-дро позволяет скрытым дро (естественно, лишь какой-то их части) уравнивать ставку на терне, так как в случае, если на ривере выйдет третья карта к флэшу, они получают возможность блефовать, и это обеспечит им положительное ожидание (хотя на терне у этих рук и не было прямых шансов банка для колла).

Интересно, что игрок X не может добиться безразличия игрока Y к коллу с флэш-дро, ведь в лимитном покере он никогда не поставит в банк достаточное количество денег, чтобы колл для такого дро оказался убыточным.

Пусть $x = 30\%$, $y = 1\%$, а $z = 69\%$. Тогда игрок X будет стараться сделать оппонента безразличным к коллу и блефу с мертвой рукой, однако в таком случае игрока Y ответит коллом со всеми слабыми дро. В то же время, при $x = 30\%$, $y = 50\%$, и $z = 20\%$, игрок X должен стремиться сравнять ожидание для игрока Y от колла и блефа со скрытыми дро.

Кстати, эта игра в какой-то мере является ответом на вопрос, который мы часто слышим от читателей: «Какие дро мы должны стараться сделать безразличным к линии колла и блефа на следующей улице?». Самые сильные!

Теперь перейдем к более сложной игре против ясновидящего на двух улицах, где открытая рука оказывается в одном банке с неизвестным диапазоном.

Пример 20.4

- Холдем, игра начинается с терна (полторы улицы)
- Карты игрока X лежат рубашкой вниз
- Игрок Y получает некую руку u , выбранную случайным образом из его диапазона возможных рук Y
- Размер банка - P единиц

Итак, игроку Y известна рука оппонента, он также знает, какие карты могут выйти на ривере. Ради упрощения расчетов мы будем полагать, что если у обоих участников окажутся руки одинаковой силы, игрок Y всегда выиграет.

Давайте рассмотрим следующую ситуацию:

- Рука игрока X: A♠ Q♣
- Доска: A♥ J♠ 8♦ 7♣
- Диапазон игрока Y: {99+, AQ+}

Можем составить матрицу рук и соответствующих им вероятностей победы на шоудауне (при условии, никто не будет делать ставок):

Рука	Вероятность	Вероятность победы
AA	$\frac{1}{39}$	1
KK	$\frac{6}{39}$	$\frac{2}{44}$
QQ	$\frac{3}{39}$	$\frac{2}{44}$
JJ	$\frac{3}{39}$	1
TT	$\frac{6}{39}$	$\frac{6}{44}$
99	$\frac{6}{39}$	$\frac{6}{44}$
AK	$\frac{8}{39}$	$\frac{41}{44}$
AQ	$\frac{6}{39}$	$\frac{41}{44}$
Сумма	1	

Далее, мы можем сгруппировать этот диапазон по вероятности победы на вскрытии (не обращая внимания на типы рук) - получим распределение $\bar{Y}$:

$$\{(1, \frac{4}{39}), (\frac{41}{44}, \frac{14}{39}), (\frac{6}{44}, \frac{12}{39}), (\frac{2}{44}, \frac{9}{39})\}$$

Здесь и далее мы будем считать, что новое распределение эквивалентно Y. Почему? Дело в том, что хоть руки, которые имеют одинаковую вероятность выигрыша на вскрытии, и составлены из разных карт, по большому счету они взаимозаменяемы. Действительно, поскольку игрок Y знает о руке оппонента, ему нет разницы, с чем выигрывать. Кроме того он никогда не проплатит лишнюю ставку, сделанную игроком X на вэлью.

В этом примере мы снова имеем дело со стратегией на двух улицах, однако игра на ривере будет сравнительно простой для обоих участников. Игрок с готовой рукой сделает чек (если он действует первым), на что его оппонент (с известным распределением) поставит на вэлью со всеми натсами, а также с частью блефов, которая задается знакомым нам уравнением $1/(P + 1)$. Далее игрок X уравнивает с $P/(P + 1)$ раз со своей открытой рукой.

В таком случае, блефы игрока Y будут обладать нулевым ожиданием, а натсы - выигрывать ему одну ставку. Причем те деньги, которые он будет выигрывать на ривере, можно считать «потенциальными выигрышами» от колла на терне. Но поскольку стратегия на ривере для обоих участников раздачи будет элементарной (если они играют оптимально), мы можем включить это ожидание в наши расчеты по стратегии терне. Тогда ожидаемый выигрыш скрытой руки (P^t) будет равен размеру банка на ривере плюс $P/(P+1)$ ставок на ривере.

$$P^t = P + P/(P+1)$$

Игроку X придется проплачивать $P/(P+1)$ от своих рук, поскольку игра ведется на полтора улицах.

Давайте представим, что после терна в банке оказываются пять единиц. Теперь игрок Y поставит на ривере со своими натсами, и получит колл в $5/6$ случаев. Таким образом, ожидаемый выигрыш скрытой руки составит $35/6$.

Вернемся к новому распределению рук $\bar{Y}$. Давайте выстроим все части этого диапазона в соответствие с их вероятностью выигрыша, от лучшей к худшей:

- $4/39$ рук имеют эквити 1.
- $14/39$ рук имеют эквити $41/44$
- $12/39$ рук имеют эквити $6/44$
- $9/39$ рук имеют эквити $2/44$

Составим функцию, которая бы возвращала нам вероятность победы для заданной руки в зависимости от ее положения в диапазоне.

$y(t)$ = вероятность победы лучшей руки в диапазоне $\bar{Y}$ после того, как мы уберем t лучших рук из диапазона $\bar{Y}$ ($0 \leq t \leq 1$).

$y(0)$ = вероятность выигрыша лучшей руки в $\bar{Y}$.

$y(1)$ = вероятность выигрыша худшей руки в Y' .

Примечание от переводчика: Это действительно плохое определение задаваемой функции. Можно было объяснить гораздо проще (что, собственно, и сделано в примере ниже). Если $t = 1/4$, то мы просто смотрим на часть диапазона, которая отстоит от 0 (лучшей руки) на $1/4$ и определяем, какова вероятность победы для класса рук, в который мы только что попали.

В нашем распределении функция $y(t)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 1 \\
y(1/4) &= 41/44 \\
y(1/2) &= 6/44 \quad (\text{медианная рука}) \\
y(1) &= 2/44
\end{aligned}$$

Примечание от переводчика: $y(0)$ - вероятность победы лучшей руки, $y(1)$ - худшей. $y(1/4)$ - отсчитываем от 0 ровно четверть комбинаций (то есть четверть от 39), это примерно 9.75 комбинаций, то есть мы попадаем в область $14/39$, в ней вероятность победы равна $41/44$. Точно также считается и $y(1/2)$.

Еще одна функция, которая нам пригодится при анализе этой игры - среднее эквити (то есть средняя вероятность победы) лучших t рук в рассматриваемом диапазоне. Ее мы будем называть $y^\theta(t)$. Фактически, мы определяем математическое ожидание для выбранной части распределения. Так, например, $y^\theta(1/2)$ означает среднее значение $y(t)$ для лучших 50% рук. Вот так выглядит $y^\theta(t)$ для заданного распределения:

$$\begin{aligned}
y^\theta(0) &= 1 \\
y^\theta(1/4) &= (16/156)(1) + (23/156)(41/44) \approx 0.23995 / 0.25 \approx 0.95980 \\
y^\theta(1/2) &= (8/78)(1) + (28/78)(41/44) + (3/78)(6/44) \approx 0.44231 / 0.5 \approx 0.88462 \\
y^\theta(1) &\approx 0.48951
\end{aligned}$$

Функцию $y^\theta(t)$ можно выразить и по-другому:

$$y^\theta(t) = \left(\int_0^t y(t) dt \right) / t$$

К слову, $y^\theta(1)$ - это очень важное значение, поскольку показывает среднее эквити для всех рук в исходном распределении Y (ведь мы уже отмечали, что распределения Y и $\bar{Y}$ в целом тождественны). Представьте, что $y^\theta(1) = 1$, тогда игрок Y будет ставить на терне, а его оппонент - всегда скидывать, ведь его эквити в банке равно нулю! И наоборот, когда $y^\theta(1) = 0$, игрок Y никогда не сможет выбрать банк.

Пример 20.5 - Игра против ясновидящего на полутора улицах

- Холдем, игра начинается с терна (полторы улицы, на терне игрок X всегда делает чек)
- Карты игрока X лежат рубашкой вниз
- Игрок Y получает некую руку u , выбранную случайным образом из его диапазона возможных рук Y
- Размер банка - P единиц
- Рейзы делать нельзя *

* Есть только одна очень специфичная ситуация, где игрок X захочет сделать чек/рейз, когда отношение между диапазоном игрока Y , скорректированным банком на терне и ривере попадает в очень узкий интервал значений. Поэтому чтобы сделать наши расчеты чуть проще, мы исключаем рейзы из стратегий обоих игроков.

Чтобы решить эту игру, сначала нам нужно представить себе как могут выглядеть оптимальные стратегии. Если диапазон игрока Y очень сильный (так что у игрока X остается совсем мало эквити), то он просто сделает бет и заберет банк. С другой стороны, если его диапазон содержит в себе смесь слабых и сильных рук, игрок Y сделает бет с лучшими из них, а с остальными - чек. И в случае, когда диапазон игрока Y совсем слабый, он предпочтет чек на терне, чтобы посмотреть бесплатный ривер.

Теперь давайте попробуем найти некоторые пороги. Как обычно, все значения математического ожидания будут рассматриваться с позиции игрока Y .

Пусть игрок Y ставит со всем своим диапазоном на терне. В случае колла от оппонента, банк на ривере составит $P + 2$, а его лучшие руки будут «стоять» $(P + 2)^t$. Эта линия обойдется игроку Y в одну ставку. Ставки на ривере уже включены в P^t . Если игрок Y поставит и получит фолд от оппонента, то он выиграет P единиц.

Когда левая часть неравенства ниже (ожидание игрока Y от розыгрыша 100% рук на терне) будет больше ожидания в случае фолда от игрока X, игроку X всегда следует скидывать и таким образом минимизировать ожидание своего оппонента.

$$\begin{aligned}y^0(1)(P+2)^t - 1 &\geq P \\ y^0(1) &\geq (P+1)/(P+2)^t \\ y^0(1) &\geq (P+1)(P+3) / (P+2)(P+4)\end{aligned}$$

Примечание от переводчика: Здесь авторы рассматривают самый плохой сценарий для игрока X, его проще всего просчитать. Если окажется, что этот сценарий выполняется, рассмотрение игры можно

заканчивать - мы нашли оптимальную стратегию. То есть здесь решение идет от обратного.

Также, как вы можете помнить, $y^{\theta}(1)$ - это среднее эквити для всего диапазона игрока Y , с которым он и ставит на терне.

Значит, если среднее эквити диапазона игрока Y больше, чем $(P+1) / (P+2)^t$ он может делать бет и выигрывать банк. Это и будет для него оптимальной стратегией, причем у игрока X никогда не будет колла на терне. Назовем это Случай #1.

Случай #1

Условие: $y^{\theta}(1) \geq (P+1)/(P+2)^t$

Ход раздачи: игрок Y ставит, игрок X скидывает руку

Давайте рассмотрим одну интересную идею. Пусть руки игрока Y удовлетворяют условию этого случая, но на терне он делает чек и ставит на ривере. Может ли игрок X иногда уравнивать эту ставку?

Нет. В таком случае стратегию игрока X будет очень легко эксплуатировать. Пусть в диапазоне игрока Y есть $1/3$ часть рук, которые выиграют всегда, а оставшиеся $2/3$ выигрывают почти всегда. Тогда игрок Y может применять следующую стратегию:

Бет со всеми руками, у которых нет 100% эквити на терне (так что игроку Y придется сделать фолд), чтобы забрать P единиц из банка.

Чек с натсами на терне, бет на ривере, и молиться о колле, чтобы выиграть больше, чем P единиц

Поскольку оптимальная стратегия игрока X не должна давать оппоненту возможность играть по такой линии (а, значит, и улучшать свое ожидание), оптимальной стратегией для игрока X будет фолд в ответ на любую линию и на любой улице.

Получается, что если диапазон вашего оппонента настолько сильный, что вы должны скидывать свою руку в ответ на ставку или рейз, то стратегия фолда даже на следующих улицах в ответ на любой экшен будет по крайней мере ко-оптимальной.

Избежание подобной эксплуатации - еще один аргумент в пользу игры по сбалансированной стратегии.

Теперь обратимся к ситуации, когда игрок X решает всегда делать колл. Если это так, то ожидание игрока Y от чека с рукой u составит $(P^t)u$. То есть игрок Y

сделает чек на терне, и если он выиграет на ривере, ожидание его руки составит P^t . Ожидание игрока Y от ставки с рукой y составит $(P+2)^t y - 1$. Тогда ему нужно всегда ставить, если:

$$\begin{aligned} y(P+2)^t - 1 &\geq y(P^t) \\ y &\geq 1/((P+2)^t - P^t) \end{aligned}$$

Это значит, что в случае когда игрок X собирается уравнивать в каждой раздаче, игрок Y получает прибыль от своих ставок (по сравнению с чеком), если его рука y старше найденного нами значения.

Для большинства размеров банка P это выражение чуть меньше $1/2$. Например, при $P=3$, мы получим 0.48. Очевидно, что игрок Y получает положительное ожидание от ставок, когда его эквити в раздаче превышает 50%. Однако ценность найденного неравенства в том, что, как оказалось, он может ставить и с руками чуть хуже, благодаря потенциальным шансам банка.

Самое время ввести еще одно обозначение. Зачастую нам нужно будет количественно определить диапазон рук, где эквити нашей руки оказывается выше некоего порога y_0 . Например, группу рук $\{y \mid y \geq y_0\}$ можно обозначить через $\{y(t) \mid t \leq \mathcal{T}\}$, где $\mathcal{T}$ выражает количество комбинаций. Приведем пример из распределения $\bar{Y}$:

$$\{(1, 4/39), (41/44, 14/39), (6/44, 12/39), (2/44, 9/39)\}$$

Представьте, что мы хотим найти в этом диапазоне все руки, чье эквити больше $y_0 = 1/2$. Очевидно, что в эту группу войдут все руки с 100% эквити, с $41/44$ эквити, то есть {AA, JJ, AK, AQ}. Тогда $\mathcal{T} [1/2] = 18/39$, поскольку выбранные нами руки в сумме имеют 18 комбинаций.

В некотором смысле $\mathcal{T} [y_0]$ является обратной функцией от $y(t)$, которая возвращает нам эквити лучшей руки из оставшихся. В свою очередь, $\mathcal{T} [y_0]$ говорит нам о том, сколько рук в заданном диапазоне имеют как минимум заданное эквити.

Тогда мы можем сказать, что:

$$t_0 = \mathcal{T} [1/((P+2)^t - P^t)]$$

Где t_0 - это порог, на котором игрок Y должен начать ставить со всеми руками, чье эквити больше t_0 (при условии, что игрок X всегда делает колл). Кстати, можно также говорить, что эквити его диапазона ставки в таком случае составляет $y^0(t_0)$.

Если игрок Y действительно делает бет с таким диапазоном, то его оппоненту следует уравнивать 100% раз, пока среднее эквити диапазона игрока Y не превышает $(P+1)/(P+2)^t$ (как мы уже показали в Случае #1).

Случай #2

Условия: $y^0(t_0) \leq (P+1)/(P+2)^t$

$t_0 = T[(1/(P+2)^t - P^t)]$

Ход раздачи: Игрок Y делает бет, игрок X уравнивает

Итак, мы рассмотрели два крайних случая - когда эквити игрока Y стремится к 100%, и когда у игрока Y оказывается недостаточно сильная рука, чтобы не дать оппоненту возможность сделать колл.

Самое время рассмотреть третий случай, где игрок X будет применять смешанную стратегию. Здесь диапазон ставки игрока Y слишком силен, чтобы игрок X мог просто уравнивать каждый раз, но еще не настолько силен, чтобы игроку X было выгоднее делать фолд со всем диапазоном.

Вместо этого игрок X будет делать колл достаточно часто, чтобы оппонент был безразличен к блефу, но при этом и скидывать столько рук, чтобы игрок Y не смог эксплуатировать его.

Таким образом, у игрока X появится «частота фолда на терне», мы будем называть ее α' , но с некоторыми оговорками. Дело в том, что поскольку мы находимся только на терне, и в игре остается еще одна улица, мы не можем использовать привычное уравнение $\alpha = 1/(P+1)$. Помните, что все руки игрока X одинаковы, следовательно, его стратегия может быть описана лишь одной переменной (частота колла/фолда на терне). На ривере же он, как и прежде, будет уравнивать $P/(P+1)$ раз.

Пусть игрок X скидывает α' раз и уравнивает $(1 - \alpha')$ раз, тогда мы можем выразить стратегию игрока Y через α' . Очевидно, что он будет ставить только когда ожидание от бета будет выше ожидания от чека.

$$\langle Y, \text{бет с рукой } x \rangle = \alpha'P + (1 - \alpha')(y(P+2)^t - 1)$$

$$\langle Y, \text{чек с рукой } x \rangle = yP^t$$

$$\alpha'P + (1 - \alpha')(y(P+2)^t - 1) \geq yP^t$$

$$y[(1 - \alpha')(P+2)^t - P^t] \geq 1 - \alpha'(P+1)$$

Левая сторона уравнения будет положительной при $\alpha'P < 2$, или $\alpha' < 2/P$.

Правая сторона окажется больше нуля при $\alpha' > 1/(P + 1)$. Это значит, что если игрок X решит скидывать чаще, чем $1/(P + 1)$, то игроку Y нужно начать ставить со всем диапазоном.

$$y [(1 - \alpha')(P + 2)^t - P^t] \geq 1 - \alpha'(P + 1)$$

$$y \geq (1 - \alpha'(P + 1)) / [(1 - \alpha')(P + 2)^t - P^t] \quad (20.1)$$

Здесь мы можем использовать еще одно свойство оптимальных стратегий. Если игрок X следует некой смешанной стратегии, которая предполагает коллы и фолды с его рукой, он должен быть безразличен к выбору конкретного действия. В противном случае он мог бы улучшить свое эквити, просто поменяв частоту колла. Предположим, что игрок Y ставит с оптимальным диапазоном $\mathcal{T}$. Тогда:

$$\begin{aligned} y^\theta(\mathcal{T})(P + 2)^t - 1 &= P \\ y^\theta(\mathcal{T}) &= (P + 1) / (P + 2)^t \end{aligned}$$

Теперь обратимся к свойствам $y^\theta(t)$. Это убывающая функция, так что верным будет следующее неравенство: $y^\theta(1) \leq y^\theta(t) \leq y^\theta(0)$. Мы также знаем порог $(P + 1) / (P + 2)^t$, при котором игрок Y начинает ставить со всеми руками, чье эквити выше заданного порога. Значит, должно выполняться одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} \#1: \quad & y^\theta(1) \geq (P + 1) / (P + 2)^t \\ \#2: \quad & y^\theta(0) \leq (P + 1) / (P + 2)^t \\ \#3: \quad & y^\theta(\mathcal{T}) = (P + 1) / (P + 2)^t \end{aligned}$$

Первый сценарий мы описали в Случае #1, когда игрок Y ставит весь свой диапазон, а игрок X всегда отвечал фолдом.

Второй сценарий был рассмотрен в Случае #2. Игрок Y ставил только с руками, у которых было положительное ожидание против 100% колла игрока X.

Третий сценарий - новый. Если $y(\mathcal{T}) > 1 / ((P + 2)^t - P^t)$, то пороговая рука (при которой игрок X становится безразличным к коллу) - все еще «хорошая». Таким образом, игрок Y сделает бет, но получит колл от игрока X, так как фактически мы все еще имеем дело со вторым случаем.

Однако если $y(\mathcal{T}) < 1 / ((P + 2)^t - P^t)$, то в силу вступает уравнение 20.1, по которому игрок Y будет ставить только с руками, обладающими положительным ожиданием:

$$y \geq (1 - \alpha'(P + 1)) / [(1 - \alpha')(P + 2)^t - P^t]$$

Производим замену на $y(\mathcal{T})$ вместо y и решаем для α' , получим:

$$\alpha' = (1 - y(\mathcal{T})[(P+2)^t - P^t]) / (P+1 - y(\mathcal{T})(P+2)^t)$$

В этом случае игрок Y выбирает $\mathcal{T}$ таким образом, чтобы игрок X был безразличен к коллу или фолду против всего диапазона лучше, чем $\mathcal{T}$. В свою очередь, игрок X будет уравнивать или падать с частотой, которая сделает его оппонента безразличным к ставке ровно на пороге $y(\mathcal{T})$.

Случай #3

Условие: Ни первый, ни второй случай не подходят

Игрок Y ставит со всеми руками, удовлетворяющими $y^0(\mathcal{T}) = (P+1)/(P+2)^t$

Игрок X скидывает $\alpha' = (1 - y(\mathcal{T})[(P+2)^t - P^t]) / (P+1 - y(\mathcal{T})(P+2)^t)$ своих рук, уравнивает с остальными.

Теперь давайте рассмотрим несколько примеров. Для начала вернемся к руке, с которой все началось:

Рука игрока X: A♠ Q♣

Доска: A♥J♠ 8♦ 7♣

Диапазон игрока Y: {99+, AQ+}

Матрица рук игрока Y:

Рука	Вероятность	Вероятность победы
AA	$1/39$	1
KK	$6/39$	$2/44$
QQ	$3/39$	$2/44$
JJ	$3/39$	1
TT	$6/39$	$6/44$
99	$6/39$	$6/44$
AK	$8/39$	$41/44$
AQ	$6/39$	$41/44$
Сумма	1	

Мы получили производное распределение для игрока Y:

$$\{(1, 4/39), (41/44, 14/39), (6/44, 12/39), (2/44, 9/39)\}$$

Пусть размер банка составляет 5 ставок. Давайте определим, какой из рассмотренных случаев нам подходит больше всего.

Случай #1:

$y^0(1)$ составляет примерно 0.48

$$(P+1) / (P+2)^t = (6) / (6^3/8) = 48/63, \text{ или около } 3/4$$

Значит, это точно не случай #1, поскольку $y^0(1)$ оказывается меньше $(P+1)/(P+2)^t$.

Это и понятно - диапазон игрока Y в нашем случае недостаточно сильный, чтобы ставить в 100% случаев. Игроку X принадлежит значительная часть банка, поэтому он точно не станет скидывать все свои руки.

Случай #2:

Для начала, найдем t_0 .

$$t_0 = \mathcal{T} [(1/((P+2)^t) - P^t)] = \mathcal{T}[8/15]$$

$\mathcal{T}[8/15]$ возвращает нам число комбинаций, чье эквити больше $8/15$. Вполне очевидно, что в нашем диапазоне это $18/39$ от всех рук. Если следующее неравенство выполняется, то мы имеем дело со случаем номер два:

$$y^0(t_0) \leq (P+1) / (P+2)^t$$
$$y^0(18/39) \leq 48/63$$

Среднее эквити старших $18/39$ диапазона игрока Y составляет:

$$y^0(18/39) = (4/18) (1) + (14/18) (41/44) \approx 0.94697$$

Значит, и этот случай также нам не подходит. Что, впрочем, также вполне ожидаемо - у игрока Y в диапазоне есть не только слабые, но также и достаточно много сильных рук. Так что игрок X не может уравнивать 100% раз, поскольку тогда его оппонент может начать ставить только с сильнейшими руками и тем самым эксплуатировать его стратегию.

Получается, что мы имеем дело со случаем #3. Тогда все, что нам нужно сделать - найти такое $\mathcal{T}$ для игрока Y, при котором бы игрок X оказался безразличным к коллу.

$$y^0(\mathcal{T}) = (P+1) / (P+2)^t$$
$$y^0(\mathcal{T}) = 48/63$$

Мы можем пойти от обратного:

$$\{(1, 4/39), (41/44, 14/39), (6/44, 12/39), (2/44, 9/39)\}$$

$$48/63 = [(4/39)(1) + (14/39)(41/44) + (y)(6/44)] / (18/39 + y)$$

(где y - доля рук с эквити $6/44$, которые игрок Y поставит)

$$48/63(18/39 + y) = [(4/39)(1) + (14/39)(41/44) + (y)(6/44)]$$

$$y \approx 0.13655$$

$$\mathcal{T} = y + 18/39 \approx 0.59808$$

Итак, игрок Y должен ставить с 59.8% своих лучших рук. Сколько раз должен уравнивать его оппонент?

$$\alpha' = (1 - y(\mathcal{T})[(P+2)^t - P^t]) / (P + 1 - y(\mathcal{T})(P+2)^t)$$

$$\alpha' = (1 - (6/44)(15/64)) / (6 - (6/44)(63/8))$$

$$\alpha' \approx 0.19651$$

Примерно с 19.6% своих рук.

Из этой игры можно извлечь три ценных урока.

- Потенциальные шансы - важная составляющая оптимальной стратегии в играх на нескольких улицах. Как правило, их решение оказывается весьма сложной задачей. В этой игре P^t фактически определяет величину потенциальных шансов в раздаче. Как мы увидели из приведенных выше решений, связанная стратегия для нескольких улиц может существенно отличаться от стратегии для каждой улицы в отдельности. Пусть на терне банк составляет 5 единиц. Тогда если один из игроков скидывает чаще, чем $1/(P+1)$ он открывает себя для возможной эксплуатации (оппонент просто начнет блефовать с большим количеством рук). Однако в нашем случае при банке в 5 единиц, игрок X должен скидывать почти пятую часть своих рук. Это обусловлено тем, что он находится в невыгодном положении не только на терне, но и на ривере. Таким образом, фолд на ранней улице предотвращает проплату вэлью бетов оппонента в дальнейшем. Значение этой идеи очень сложно недооценить - игры на нескольких улицах отнюдь не тождественны нескольким играм на одной улице, связанным воедино.
- Структура диапазонов оказывает огромное влияние на оптимальную стратегию. Когда диапазон игрока Y состоит только из натсов, его оппоненту следует всегда избавляться от своей руки. Но если он окажется несколько слабее, то игрок X всегда будет иметь достаточные шансы банка для колла.

- Игроки не могут сделать друг друга безразличными к розыгрышу определенных рук. Более того, как правило, безразличными к выбору действия они могут оказаться только на одном пороге, который и задает форму всей стратегии. В последнем случае значения T и α' как раз были этими порогами. Причем если игрок Y следует оптимальной стратегии, игрок X может варьировать свой порог α' на достаточно широком интервале, при этом ничего не теряя.

Несколько мыслей об играх с дро

В последней игре из этой главы мы рассмотрели достаточно общий случай, когда игрок X не мог поставить на терне. К слову сказать, мы проработали решения и для гораздо более сложных игр, однако, в конечном счете, решили не включать их в эту главу из-за громоздкости решений, а также условности использованных диапазонов. Но мы все же уделим немного времени обсуждению идей, которые мы почерпнули из полученных результатов.

Так, в играх с различными видами дро мы обнаружили, что гораздо лучше иметь в диапазоне немного очень сильных рук и много слабых, чем много средних дро. Представьте себе следующие распределения. В одном 25% натсов и 75% воздуха, в другом - 100% рук с 25% эквити. Если мы рассматриваем вероятность выигрыша на шоудауне, то эти диапазоны идентичны - их среднее эквити составляет 25%. Однако диапазон с натсами разыгрывается гораздо лучше в играх на двух улицах, поскольку чаще собирает вэлю с рук хуже. С дро же нам часто приходится ждать, пока ривер принесет нужную карту, и уже потом ставить на вэлю или блефовать. Интересно, что диапазоны с большим количеством сильных рук часто приближают своего обладателя к статусу ясновидящего.

В результате мы получили подтверждение уже озвученной выше идеи. В играх на нескольких улицах необходимо держать свои диапазоны сбалансированными, и иметь на каждой улице соответствующее количество натсов и блефов.

Что касается игр на полных двух улицах, мы столкнулись с рейзами на полублеф. В случаях, когда диапазон игрока Y оказывался достаточно слабым, либо содержал в себе большое количество рук-дро, игрок X делал донк-бет на терне. В свою очередь, игрок Y отвечал рейзом с сильными руками, которые балансировал полублефами. Со средними и слабыми дро он предпочитал либо делать колл, либо фолд (если он уже сбалансировал свой диапазон нужным количеством полублефов).

И третья идея, которую мы бы хотели здесь осветить, касается игр против ясновидящего. В них ценность открытых дро оказывается значительно ниже таковой для скрытых дро. Действительно, против последних неясновидящий оппонент должен скидывать α своих рук, в то время как при игре против открытых

дро, он мог избавляться более чем от половины диапазона (мы уже рассматривали подобные ситуации выше).

Сложность игр на нескольких улицах пока представляет собой непреодолимое препятствие для покерного анализа - для них требуется введение многих переменных, влияющих на формы диапазонов игроков, размер банка и т.п. Более того, это касается лишь игр на двух улицах с лимитными ставками. Если бы мы знали, каким образом может изменяться сила диапазонов или каким образом несколько играемых улиц влияют на потенциал дро, нам бы не составило труда решить любую покерную игру. Но пока мы вынуждены довольствоваться решением простых (относительно) вспомогательных игр и усваивать их уроки, а также те крупницы информации, которые нам удастся найти.

Нужно запомнить

- В основе анализа игр на нескольких улицах лежат два принципа. Первый - чтобы иметь возможность делать правдоподобные блефы, мы должны подкреплять их сильными диапазоном. Второй - игры на нескольких улицах не тождественны нескольким связанным между собой играм на одной улице.
- Если диапазон одного из игроков содержит в себе только дро, но никогда не сильные руки, его ожидаемый выигрыш, как правило, будет очень низким.
- Скрытые дро гораздо более предпочтительны, чем открытые, поскольку против них оппонент вынужден чаще проплачивать.
- Некоторые дро (или готовые руки) настолько сильны (или предлагаемые им шансы банка настолько малы), что мы не можем сделать их безразличными к выбору действия. Но когда мы выбираем какие дро мы хотим сделать безразличными, нам стоит выбирать сильнейшие (из числа тех, для которых это действительно возможно).
- Потенциальные шансы оказывают очень большое влияние на частоту различных действий, когда в диапазонах игроков присутствуют дро. В игре против ясновидящего вся игра построена на ожидании в банке на последней улице.
- Если диапазон вашего оппонента настолько сильный, что вы должны скидывать свою руку в ответ на ставку или рейз, то стратегия фолда даже на следующих улицах в ответ на любой экшен будет по крайней мере ко-оптимальной.

Глава 21

Практическое занятие: Применяем теорию игр

На протяжении третьей части книги мы изучали различные вспомогательные и реальные игры, стараясь получить лучшее представление о том, какие факторы могут оказывать влияние на оптимальную стратегию в покере. Но самое сложное, естественно, - это применение выведенных правил и закономерностей непосредственно за покерным столом. Как уже было отмечено в предисловии к этой книге, мы не собираемся давать никаких конкретных советов по игре, так что даже эта глава будет посвящена более-менее общим темам (во многом из-за чрезвычайной сложности рассматриваемой игры). Для того чтобы лучше проиллюстрировать процесс применения теории игр на практике, мы приведем несколько примеров розыгрыша в обобщенных ситуациях, где поговорим о различных идеях и моделях, затронутых в этой книге.

Конечно же, мы не претендуем на то, что описанные ниже стратегии являются оптимальными или неэксплуатируемыми. Более того, мы готовы утверждать прямо противоположное - как мы уже показали, даже в простейших играх реализация оптимальной стратегии представляет определенные сложности. Мы можем только надеяться, что вы усвоите две основные темы из обсуждения ниже: баланс и правильный уровень агрессии с вэлью руками. В качестве основной игры для наших примеров мы выбрали наиболее популярную форму покера на сегодняшний день - безлимитный Холдем.

И первое, что стоит заметить - при анализе любой игры с неограниченными ставками, размеры стэков приобретают особое значение. Для некоторых примеров мы поговорим о стратегиях при различных стэках, однако чаще всего мы будем концентрировать ваше внимание лишь на некоем конкретном размере. Мы также будем игнорировать любые дополнительные источники информации, которые могут оказаться в нашем распоряжении, в том числе теллсы и статистику.

Поскольку покер является многопользовательской игрой, оптимальных стратегий для него не существует (мы еще затронем эту тему в пятой части). Поэтому мы сосредоточимся на поиске ко-оптимальных или хотя бы сбалансированных стратегий, которые мы сможем применять против большинства оппонентов в условиях почти полного отсутствия информации.

Подробное обсуждение природы такой многогранной игры как покер может занять не одну сотню страниц, так что мы приложим максимум усилий, чтобы свести все отвлеченные комментарии к минимуму. Также вы заметите, что мы не будем обсуждать конкретные раздачи, поскольку знание рук, которые оказались у игроков лишено всякого смысла в рамках этой главы. Нас будет интересовать исключительно линия розыгрыша, а также соответствующие ей диапазоны.

Мы начнем изучение практических аспектов теории игр с ситуаций на префлопе.

Игра на префлопе (оупен-рейз)

Вопреки распространенному мнению, составление стратегии для игры на префлопе далеко не простое занятие. Существует множество факторов, которые мы должны принять во внимание при выведении диапазонов, с которыми мы желаем вступить в раздачу. Например, представьте себе ситуацию, когда все оппоненты до вас скинули свои карты, и вы принимаете решение об оупен-рейзе.

Наша стратегия на префлопе фактически может быть выражена через распределение вероятностей для каждой руки, причем в нем мы должны будем указать частоту рейза (а также его размер), частоту лимпа, частоту фолда. Наш опыт в решении $[0,1]$ игр подсказывает, что многие из этих стратегий будут чистыми, а руки, с которыми мы решим играть по смешанной стратегии, чаще всего окажутся в пороговых точках. Здесь, однако, важно сделать оговорку о том, что блекеры играют видную роль в Холдеме, так что, на наш взгляд, смешанные стратегии окажутся применимыми для еще большего числа рук.

Теперь давайте поговорим о составлении нашей стратегии. Это и впрямь непростая задача - хоть мы и можем разбить все возможные действия на категории, они все равно окажутся тесно связанными друг с другом. Например, мы можем разделить всю префлоп стратегию на три основных блока:

- Какие руки мы разыгрываем
- Делаем ли мы с ними рейз или лимп
- Какой размер рейза выбрать

Каждый из этих блоков сложен по-своему, но все они взаимосвязаны. Скажем, мы принимаем решение о розыгрыше 88 из ранней позиции со стэком в 20 больших блайндов. Во-первых, существенное влияние на ответ будет оказывать наша общая стратегия для этой позиции. Пусть мы всегда делаем лимп с руками, с которыми хотим продолжать игру. Тогда 88 наверняка будет обладать положительным ожиданием в рамках такой стратегии. С другой стороны, если мы обычно делаем рейз до четырех блайндов, то такая пара, скорее всего, должна отправиться в пас.

Для того, чтобы правильно сбалансировать все доступные нам стратегические альтернативы, нам потребуется информация о каждой разыгрываемой руке. Представьте, что наша стратегия заключается в рейзе со всеми стартерами, с которыми мы собираемся вступить в игру, и фолде с остальными. Тогда нашей единственной задачей будет поиск рук, которые обладают положительным ожиданием от розыгрыша в рамках всего нашего диапазона рейза. Или мы можем

всегда делать лимп с подходящими руками, при этом скидывая остальные. В этом случае мы также будем искать прибыльные руки, но уже в разрезе нового диапазона. Третьей возможной стратегией будет смесь рейзов и лимпов, но тогда нам придется разобраться с балансом между руками для рейза и лимпа таким образом, чтобы конечная стратегия не выдавала оппонентам никакой дополнительной информации.

Таким образом, нашей главной целью будет анализ ожидаемого выигрыша для всего диапазона стартовых рук и определение такого диапазона, который бы гарантировал максимальное ожидание для каждой руки. Цикличность этой задачи делает нахождение ко-оптимальной префлоп стратегии практически невозможным. Поэтому на практике мы обычно будем считать одну из вышеуказанных переменных константой, и пытаться определить значения остальных.

Мы предпочитаем никогда не делать лимп, когда все оппоненты скинули свои карты (за исключением редких случаев в блайндах). Этому есть несколько причин. Во-первых, в каждой позиции мы будем разыгрывать диапазон гораздо сильнее, чем те случайные стартеры, которые еще остались в раздаче. Таким образом, мы можем ожидать, что наша рука часто окажется лучшей, а, значит, нам стоит начать разгонять банк уже на префлопе. Во-вторых, мы убеждены, что гораздо предпочтительнее давить на блайнды и предлагать им непривлекательную цену для продолжения раздачи, чем подстраховываться от возможных потерь против сильных рук оппонентов. Как мы уже показали в этой части книги, безразличие оппонентов к выбору действия является важной составляющей оптимальных стратегий. Здесь же мы в некотором смысле будем пытаться сделать блайнды безразличными к коллу или рейзу, когда остальные игроки скинут свои карты. В-третьих, потенциальные потери, которые мы можем понести вследствие отказа от смешанной стратегии лимпов и рейзов, с лихвой окупаются тем фактом, что мы можем достаточно эффективно скрывать истинную силу нашей руки, играя по стратегии рейза.

Следующим важным аспектом является позиция. Если мы делаем рейз на полном столе из UTG+1, то за нами оказываются еще шесть игроков, чьи решения могут существенно скорректировать нашу стратегию, плюс не следует забывать о том, что у любого из них иногда окажется сильная рука. Так что если мы решимся зайти в банк с пограничным стартером, мы очень часто получим рейз или ре-рейз, что автоматически заставляет нас более ответственно подходить к выбору диапазона для продолжения игры.

Однако чем ближе мы подбираемся к баттону, тем меньше случайных рук остается перед нами, а это значит, что мы можем начать делать рейзы и с более слабыми стартерами. На баттоне же для нас открывается возможность игры с максимально широким диапазоном, не в последнюю очередь благодаря позиционному преимуществу и дополнительному ожиданию, которое оно дает. Но

даже в этом случае нам следует выбирать только те руки, которые увеличат ожидание от розыгрыша всего диапазона.

Для начала, давайте представим диапазон, в котором нет никаких рук. Будем добавлять в него комбинации, которые могут улучшить наше ожидание, причем в какой-то момент мы достигнем предела, за которым каждая новая рука будет лишь уменьшать ожидаемый выигрыш. Важно понимать, что математическое ожидание для каждой новой руки мы будем рассматривать уже в контексте нового диапазона. Объясним на примере. Пусть первой рукой в нашем распределении рук окажутся AA. Пока будем считать, что мы всегда делаем рейз, причем в позиции UTG мы будем делать рейз до двух блайндов только с AA и ни с одной другой рукой.

Поскольку мы хотим найти стратегию, которую невозможно эксплуатировать, будем считать, что мы сообщили всему столу о нашем намерении делать рейз только с AA. Тогда оппоненты естественно никогда не захотят отвечать ре-рейзом ни с одной рукой. Более того, скорее всего они будут скидывать все подряд (за исключением случаев, когда их стэки составляют всего пару блайндов). Так что наше ожидание от розыгрыша с AA будет близким к сумме блайндов, поставленных в раздаче. Вполне очевидно, что место для улучшения нашей стратегии все еще имеется. Давайте добавим следующую руку, KK. Наш диапазон так и остался очень сильным, однако теперь блайнды, наверное, могут делать колл с руками, в которых есть туз. Но в общем и целом, наше ожидание все еще будет примерно равно сумме блайндов.

Далее мы будем добавлять в диапазон и другие стартеры: QQ, AKs, AKo и т.д. В какой-то момент наш диапазон окажется достаточно слабым, чтобы другие игроки за столом (особенно блайнды) захотели ввязываться с нами в раздачу. В таком случае мы должны понимать, что мы уже не получим много денег от слабых рук, однако наше ожидание от розыгрыша AA существенно возрастет. Например, если наш диапазон составляют руки {99+. AQ+}, пара тузов в среднем будет оплачиваться гораздо чаще по сравнению с диапазоном {KK+}.

Составляя диапазон, который максимизирует ожидание для всех рук, мы должны принимать во внимание блокеры, а карты, которые могут выйти на доску. В большинстве игр, которые мы проанализировали в предыдущих главах, функция силы всех рук был монотонной (то есть одна рука была либо сильнее, либо слабее своих соседей). Но представьте ситуацию с общими картами в Холдеме, где у нас могут оказаться либо AJs, либо 98s. Как вы уже, наверное, знаете, AJs находится впереди случайной руки. Однако на многих флопах вероятность того, что у нас может оказаться 98s повысит ожидаемый выигрыш для всего диапазона, ведь как мы показали в главах 19 и 20, наличие натсов в диапазоне на многих досках дает нам огромное преимущество, особенно при глубоких стэках. Кстати, в последнем случае нам следует иметь еще более широкий диапазон для оупен-рейза (хотя некоторые руки в нем и будут играть по смешанным стратегиям): AXs, слабые

пары, одномастные коннекторы и другие стартеры, которые имеют шанс попасть в натс на средних и низких досках.

Однако мы никогда не будем играть слабые руки ради того, чтобы запутать оппонента - помните, мы уже говорили о том, что оптимальные и ко-оптимальные стратегии никогда не включают в себя такие заведомо убыточные линии. Важно соблюдать баланс между возможностью попасть в натс и посредственным шоудаун вэлью таких рук. Например, при бесконечно больших стэках мы, скорее всего, сможем играть 52s из позиции UTG в плюс - в таком случае мы сможем изображать натс на досках вида A34sss. Однако мы никогда и ни при каких обстоятельствах не будем открывать 52o в этой же ситуации.

Последняя тема, которую мы затронем в этом разделе - размеры рейзов. Чтобы лучше продемонстрировать нашу логику, для начала мы говорим о противостоянии префлоп рейзера и блайндов. Вполне очевидно, что последние являются ключевыми участниками в любой раздаче, ведь они уравнивают рейзы чаще других игроков за столом из-за более привлекательных шансов банка. В свою очередь, префлоп рейзер может столкнуться с двумя типами ситуаций. Первая - он может получить рейз или колл от оппонента с хорошей рукой. Вторая - если ни у кого не оказалось ничего стоящего, то, скорее всего, он окажется на флопе с одним из блайндов. Поэтому при выборе размера рейза нам важно найти золотую середину между этими двумя случаями. Так, в первом мы хотим инвестировать в банк как можно меньше - тогда потенциальный выигрыш оппонента уменьшается, а со своими натсами мы всегда сможем сделать ре-рейз на префлопе или большую ставку на поздних улицах. Во втором же мы наоборот хотим сделать рейз достаточно большого размера, чтобы оказать давление на большой блайнд, но при этом и извлечь вэлью с сильными руками. Поэтому, скажем, рейз до десяти больших блайндов с сильным диапазоном часто получит лишь фолд от оппонента. Так что когда мы делаем оупен-рейз, мы хотим поставить игроков в блайндах в максимально сложное положение со средними руками. Естественно, мы не можем сделать их безразличными к коллу с сильными стартерами. Хотя точнее было бы сказать, что сделать это мы можем, однако в таком случае мы бы жертвовали слишком большой долей нашего общего математического ожидания.

Это значит, что наш бетсайзинг может и должен меняться на префлопе в зависимости от силы нашего диапазона и позиции, ведь вероятность получить рейз от сильной руки, когда мы находимся, скажем, на кат-оффе, гораздо ниже. Однако не стоит варьировать размеры своих рейзов в излишне широком диапазоне - не забывайте о том, что сокрытие информации также имеет свое место в игре, и любая очевидная стратегия может только навредить нашему ожидаемому выигрышу.

В итоге, рекомендуемая стратегия на префлопе будет включать в себя следующие элементы:

- Нам стоит делать рейз со всеми руками, с которыми мы хотим продолжать.
- Размеры наших рейзов должны варьироваться в зависимости от позиции, силы диапазона, наших ожиданий от игры на постфлопе. С появлением анте мы должны соответствующим образом подстраивать бетсайзинг.
- Мы должны составлять диапазоны таким образом, чтобы все руки, которые мы собираемся разыгрывать, имели положительное ожидание против оставшихся оппонентов (считаем, что они играют по близкой к оптимальной стратегии).

Игра на префлопе с короткими стэками (пуш)

В разделе выше мы обсуждали бетсайзинг исходя из предположения, что стэки на префлопе были достаточно большими, так что все рейзы делались в расчете на следующие улицы торговли. Однако с уменьшением эффективных стэков, зачастую такая стратегия окажется нежелательной.

Представьте, что наши стэки составляют всего три больших блайнда, и мы решаем сделать рейз до двух блайндов из позиции UTG+1. Очевидно, что мы окажемся в очень глупой ситуации, если один из блайндов решит уравнивать наш рейз: в банке окажется $4\frac{1}{2}$ больших блайнда, а в нашем стэке всего один, так что на постфлопе нам будет очень сложно сделать фолд с любой рукой на любой доске. В результате, оппонент может заставить нас вкладывать деньги в банк когда ему захочется, будь то префлоп или флоп. С другой стороны, если бы мы пошли в олл-ин на префлопе, то у него не было бы никакого выбора кроме колла или фолда. В главе 12 мы уже показали, что стратегические альтернативы имеют неотрицательное ожидание, а это значит, что мы должны стараться лишить нашего оппонента возможности выбирать из нескольких линий.

Но что если в нашем стэке не три, а четыре-пять-пятнадцать блайндов? В какой-то определенной точке наша стратегия изменится, и нам уже не будет выгодно идти в олл-ин на префлопе. Естественно, значение этого порога будет постоянно меняться, в том числе и в зависимости от нашей позиции. Однако мы можем попытаться прикинуть, каким он будет. Пусть мы делаем рейз из средней позиции за полным столом со следующим диапазоном:

{77+, AJs+, AQ+, KQs}

Мы можем рассчитать эквити этого диапазона против стандартного набора рук для ре-рейза, включающего в себя {TT+, AQs+, AK+}; оно составляет 41.9%. На первый взгляд может показаться, что нам придется уравнивать ре-рейз в подавляющем большинстве случаев.

Но это не совсем так. На самом деле, нам абсолютно не интересно, как стоит весь наш диапазон против ре-рейза, ведь, например, мы точно знаем, что всегда сделаем колл с тузами. Таким образом, нам нужно знать лишь эквити худших рук: у 77 будет 33.0%, у AJs 32.0%, а у KQs только 31.88%.

Пусть мы определили некий порог x , который обозначает стэк, при котором мы бы с радостью уравнили олл-ин после мини-рейза на префлопе. Если наш стэк будет меньше x , то нам следует просто делать пуш на префлопе, тем самым лишая оппонента стратегической возможности колла.

Если мы делаем рейз до двух блайндов, и кто-то ставит олл-ин на весь наш стэк, нам придется уравнивать $(x - 2)$ блайндов, чтобы выиграть $(x + 3.5)$. Для того, чтобы мы смогли сделать колл со всем диапазоном, наше ожидание в этом банке со слабейшей рукой должно быть больше цены колла.

$$(0.3188)(2x + 1.5) > x - 2$$
$$x > 6.83$$

Оказывается, что в этом примере нижняя граница для нашего стэка составляет примерно 7 больших блайндов. Естественно, этот результат относится лишь к определенным диапазонам оупен-рейза и ре-рейза, но мы можем решить эту задачу и в более общем виде. Вспомните несколько идей из теории игр, которые мы обсуждали выше:

- Мы должны быть безразличны к пушу со слабейшей рукой в нашем диапазоне, поскольку мы выбираем между фолдом и пушем. И поскольку слабейшая рука как раз находится на пороге, разделяющим эти два действия, что ожидание от олл-ина для нее должно быть примерно равно нулю.
- При размере стэка, являющимся порогом между пушем и обычным рейзом, мы должны быть безразличны между этими двумя действиями (хотя, скорее всего, наши диапазоны для таких линий будут различаться).

Предположим, что за нами сидит оппонент, играющий по стратегии близкой к оптимальной (давайте пока не будем принимать в расчет других игроков за столом). Если он знает, что размер нашего стэка достиг точки, в которой мы безразличны к пушу, то он должен быть готов вступить в раздачу против небольшого рейза с тем же диапазоном, с которым бы он уравнил олл-ин. Если же это не так, то нам не составит труда его эксплуатировать.

Пусть N - диапазон рук, с которым оппонент поставит олл-ин против нашего рейза в x единиц. Тогда в этом диапазоне также окажутся руки, которые имеют положительное ожидание и против нашего олл-ина.

Предположим, что мы делаем пуш со стэком в 6 блайндов и диапазоном {77+, AJs+, KQs}. В таком случае N включает в себя все руки, эквити которых составляет

по крайней мере $\frac{12}{27}$ банка или 44.44%. Если говорить более конкретно, то это {99+, AKs, AKo}. Против такого диапазона нашей худшей рукой будет 77 с 29.91% на победу. Однако если бы мы сделали небольшой рейз, нам все равно пришлось бы уравнивать из-за хороших шансов банка:

$$0.2991(13.5) - 4 > 0$$

Что если мы увеличим размер стэка до 8 блайндов? Тогда порог для ре-рейза поднимется до 45.7%, то есть диапазон оппонента примет вид: {TT+, AKs, AKo}. И снова 77 будут нашей худшей рукой с 31.41% эквити. Причем мы уже не сможем делать колл после мини-рейза на префлопе:

$$(0.3141)(17.5) - 6 < 0$$

Снова сталкиваемся с результатом, который намекает, что если мы делаем оупен-рейз из ранней позиции, то порог между пушем и рейзом будет находиться в районе 7 больших блайндов.

Давайте теперь рассмотрим гораздо более широкий диапазон, с которым мы обычно окажемся на баттоне:

$$\{22+, A2+, K2s+, K8o+, Q8s+, Q9+, J8s+, JT, T8s+, 97s+, 87s\}$$

В этом примере наш стэк составляет 10 блайндов, мы делаем рейз до трех с намерением уравнивать ре-рейз. Тогда диапазон N немного изменится и будет включать себя лишь руки с 46.5% эквити:

$$\{33+, A2s+, A5o+, KTs+, KTo+, QJs\}$$

После ре-рейза от такого диапазона мы должны будем уравнивать 7 блайндов, чтобы выиграть банк в 14.5. С нашей худшей рукой (K8o) у нас будет 33.4% на победу против вышеназванного диапазона:

$$(0.334)(21.5) - 7 > 0$$

Значит, при стэке в 10 единиц мы должны уравнивать со всеми руками. Теперь давайте сделаем небольшую паузу и подумаем, чем олл-ин в таком случае окажется лучше рейза. Для этого нам нужно посчитать ожидание от стратегии пуша и стратегии рейза (при условии, что мы не нарушаем принцип сокрытия информации ни с одной из них).

И здесь мы столкнемся с некоторыми трудностями. Во-первых, мы редко сможем точно оценить ожидаемый выигрыш от розыгрыша некоего диапазона на постфлопе. Во-вторых, многие руки с неплохим шоудаун эквити весьма скверно играют на флопе, терне и ривере. Возьмем, к примеру, AХo - с ними мы делаем

небольшой рейз (до 3 блайндов при стэках 12). На флопе в банке окажется 7.5 блайндов при эффективных стэках 9.

Вполне очевидно, что места для маневра у нас совсем не осталось. Оппонент делает чек. Как нам следует поступить? Если на флопе есть туз, то, естественно, мы должны вложить в банк все оставшиеся деньги, то же самое часто будет относиться и к ситуации, если в пару попал наш кикер. Но что делать на оставшихся 67% флопов, где у нас окажется лишь туз старший? У нас будет достаточно большое эквити, даже слишком большое, чтобы просто отдать банк оппоненту. В свою очередь, у него окажется пара в трети случаев, а еще $\frac{1}{6}$ раз у него будет какое-то дро, с которым он решит дойти до олл-ина. Иными словами, примерно 50% его рук смогут правильно выставиться на флопе - в этом смысле его «степень ясновидения» оказывается выше нашей! Более того, эффективная позиция в раздаче также находится у него - ему достаточно сделать чек и вынудить нас принимать непростое решение. В то же время каждая из наших стратегий имеет свои недостатки.

В случае чека вдогон мы дадим бесплатную карту худшим рукам, плюс позволим некоторым блефам оппонента забрать банк на терне. Однако мы можем и попасть в свои ауты, при этом вернув себе эффективную позицию в раздаче.

Небольшой бет и фолд на чек/рейз не выглядит хорошим решением против возможных блефов и полублефов, ведь тогда оппонента может превратить свои 40%-50% эквити на флопе в 100%.

Небольшой бет и колл чек/рейза будет хорошей линией против дро, но ужасной против готовых рук. Играя по такой стратегии, мы позволяем оппоненту избирательно подходить к составлению диапазона для олл-ина на флопе. То же самое касается и пуша на флопе: мы обнаруживаем силу своей руки, в то время как наш оппонент будет играть строго по шансам банка.

Но все эти трудности решаются сами собой, если мы просто поставим олл-ин на префлопе. Понятно, что при определенных стэках окажется, что мы рискуем слишком большим количеством денег. Поэтому нам необходимо найти ту точку, при которой небольшой рейз становится более предпочтительным решением.

Мы бы могли и дальше искать точки безразличия для разных стэков и диапазонов. Более того, если бы могли оценить ожидание от игры на постфлопе, то нам не составило бы труда определить оптимальные пороги для любой позиции. Однако сейчас мы ограничимся общим правилом для игры на префлопе с короткими стэками: вам стоит делать пуш (а не небольшой рейз) со стэками примерно в 6 раз больше банка до рейза.

Игра на флопе

С выходом на стол карт флопа мы получаем огромное количество информации о силе рук оппонентов. Анализируя флоп, следует обращать на два главных аспекта. Первый - кто был **префлоп агрессором**. Игрок, сделавший последнюю ставку или рейз, будет обладать более сильным диапазоном (при условии ко-оптимальной игры), чем его оппонент, хотя у него также нередко окажутся и слабые руки, с которыми он балансировал свои натсы. Второй - **текстура** флопа. Этот термин скорее относится к возможным дро на руках каждого из игроков, а также к силе этих дро.

Например, доска 9♦ 8♦ 7♣ создает бесчисленное множество дро, и структура диапазонов каждого участника раздачи (вне зависимости от того, насколько тщательно они их балансировали) изменится соответствующим образом. Такие доски мы называем **дровянными**. С другой же стороны, на доске K♠ 8♣ 2♦ никаких дро нет. Максимум, что может здесь получить оппонент - это дро на пару или две пары (с пятью-шестью аутами) Этот тип флопов называется **сухим**. Пожалуй, самым экстремальным примером сухой доски является A♥ A♣ A♦, где существуют лишь несколько хороших дро на пару. Старшинство карт, а также их положение относительно друг друга очень сильно влияют на розыгрыш различных частей наших диапазонов.

Важное отличие реального покера от рассмотренных нами вспомогательных игр заключается в том, что роль префлоп агрессора накладывает серьезный отпечаток на всю постфлоп стратегию, ведь в покере диапазоны игроков, увидевших флоп, зачастую оказываются ассиметричными. Представьте ситуацию, где блайнд уравнивает оупен-рейз из ранней позиции. Как правило, у него окажется гораздо более слабый диапазон, ведь он делал колл и с не очень сильными руками из-за привлекательных шансов банка. Даже при глубоких стэках, когда диапазон оупен-рейза у префлоп агрессора становится шире, это правило соблюдается почти неукоснительно.

Более того, зачастую диапазон агрессора из ранней позиции оказывается настолько сильным, что после чека оппонента он вправе ставить на любом флопе и с любой рукой. Тогда игрок в блайнде должен делать чек со всем своим диапазоном (мы опустим здесь доказательство того, что если ваш оппонент скорее всего поставит со всем своим диапазоном, то чек будет как минимум ко-оптимальной стратегией).

Как легко заметить, такой расклад выгоден в первую очередь префлоп агрессору. Кто-то может сказать, что в подобной ситуации ему иногда будет выгодно делать чек вдогон, чтобы избежать чек/рейза от сильных рук блайнда и посмотреть на терн бесплатно. Однако, на наш взгляд, префлоп агрессор получит большее ожидание, если поставит сам. Ведь его диапазон часто окажется настолько сильным, что он захочет либо извлечь вэлью из оппонента, либо забрать банк

блефом (поскольку они хорошо защищены натсами). Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, аналогичной случаю #1 из предыдущей главы, где один из игроков мог скидывать больше рук, чем предписывала ему оптимальная стратегия, и при этом не думать об эксплуатации со стороны оппонента.

Если же мы взглянем на эту раздачу с точки зрения игрока в блайнде, то кроме слабых рук у нас часто окажутся дро, пары, две пары, сеты и т.п., то есть комбинации, с которыми мы захотим продолжать. После ставки от оупен-рейзера, мы должны составить сбалансированную стратегию, которая бы гарантировала нам максимальное ожидание. Для этого нужно определить имеющиеся стратегические возможности, а также наборы рук, которые подходят для каждой из них.

После чека мы можем сделать рейз, колл или фолд. Очевидно, что нам следует избавиться от слабейших рук - получается, мы уже имеем диапазон для чек/фолда. Но нам также доступны варианты рейза и колла. В этой главе мы не будем анализировать все возможные варианты развития событий для каждой из этих линий, однако мы выведем несколько полезных правил, которым стоит следовать при составлении собственной стратегии.

Представьте, что эффективные стэки в раздаче сравнительно глубоки. Мы, как и наш оппонент, будем руководствоваться определенными областями чистых стратегий, которые разделены между собой порогами (это могут быть как отдельные комбинации, так и целые классы рук). Как обычно, мы будем структурировать свой диапазон таким образом, чтобы сделать другого игрока безразличным к выбору действия в пороговых точках.

Скажем, мы рассматриваем возможность чек/рейза. В таком случае у нашего оппонента будет выбор из трех действий (почти при любом размере стэка). Каждому из них будет соответствовать своя область, причем порогов будет много, поскольку в областях, не предусматривающих фолд (колл и ре-рейз), для балансировки диапазонов должны присутствовать полублефы. Более того, так как это не статичная игра, ценность рук может быть взята как на текущей, так и на будущих улицах торговли.

Когда мы делаем рейз, мы хотим, чтобы оппонент не мог эксплуатировать наш диапазон. Пусть некий порог игрока Y находится между областями u_1 и u_2 . Тогда его оппонент должен разыгрывать такие руки, чтобы в пороговой точке его оппонент был безразличен к игре по u_2 и u_1 . На практике такое безразличие труднодостижимо, однако мы можем использовать следующее упрощение. Нам необходимо структурировать свой диапазон таким образом, чтобы если игрок Y попытается нас эксплуатировать, расширив одну из этих областей, у нас окажется достаточно рук, которые в таком случае получают больше вэлью и тем самым компенсируют потери для другой части диапазона.

Разделим все руки игрока в блайнде на следующие категории:

- 1) Сильные руки (сеты, две пары, стриты и т.п.)
- 2) Руки средней силы (одна пара) со слабыми дро
- 3) Слабые готовые руки с очень сильными дро (флэш-дро с гатшотом или парой)
- 4) Слабые готовые руки со средними дро (флэш-дро или стрит-дро)
- 5) Слабые руки без дро

На самом деле, единственный способ оценить вес каждой из этих категорий в общем диапазоне - найти оптимальную стратегию с заданными диапазонами на префлопе. Но даже эта задача сегодня оказывается неразрешимой. Однако мы можем использовать это деление для того, чтобы показать, как должен примерно выглядеть наш сбалансированный диапазон для чек/рейза.

Очевидно, что больше всего от фолдов оппонента выигрывают дро, особенно слабейшие из них. Фактически, чем слабее наше дро, тем больше наше ожидание от фолда, хотя мы и должны учитывать упущенную прибыль против сильных рук и даже некоторых полублефов.

Если оппонент решает чаще уравнивать с сильными руками (а не делать рейз), мы теряем вэлью со своими натсами и средними комбинациями, однако выигрываем с дро, поскольку им не нужно вкладывать лишние деньги в банк или, того хуже, скидывать в ответ на ре-рейз.

Если оппонент чаще уравнивает со слабыми руками, то ситуация будет прямо противоположной - наши натсы и руки средней силы выиграют, а слабые дро потеряют в ожидаемом выигрыше.

Если оппонент часто делает ре-рейз, мы выиграем с натсами, но потеряем с дро (за исключением случаев, когда у нас очень сильное дро, которое стремится поставить все деньги в банк уже на флопе).

Чтобы получить близкую к оптимальной стратегию, мы должны определить руки, которые выигрывают больше всего от какой-либо конкретной линии, сбалансировать их, а затем убедиться в том, что оставшиеся комбинации (разыгрываемые по линии чек/колл) от этого никак не пострадают.

Мы уже определили, что чек/рейза больше всего подходит для слабых дро. Интересно, что зачастую они оказываются абсолютно неиграбельными, если мы по какой-то причине не можем сделать рейз. Кроме того, нам имеет смысл делать чек/рейз и со значительной частью натсов (как мы уже обсуждали ранее, размер банка должен соотноситься с силой нашего диапазона). Третий тип рук, который также должен оказаться в диапазоне чек/рейза, помогает защищаться против лузовых ре-рейзов и включает в себя очень сильные дро, наподобие стритфлэш-дро. С ними мы просто можем просто пойти в олл-ин против очередного рейза

оппонента - во второй части книги мы показали, что такие руки максимизируют свое ожидание, если оказываются в олл-ине на ранних улицах (даже против очень сильных комбинаций). Худшее, что может случиться с этими руками - мы сделаем рейз, получим колл, и нам придется играть на оставшихся улицах с заметно укороченным стэком. Причем с каждым промахом ценность дро будет падать, и даже в случае выхода нужной карты вероятность проплаты будет невелика. С другой стороны, это также значит, что если оппонент начнет часто уравнивать, ожидая дисбаланса в нашем диапазоне в сторону сильных дро, наши натсы будут получить гораздо больше вэлью.

Таким образом, наш диапазон для чек/рейза должен состоять из очень слабых дро (с которыми мы будем сдаваться в ответ на ре-рейз или уже на терне), некоторых натсов (ведь часть из них нам понадобится для балансировки диапазона чек/колла) и очень сильных дро. Для линии чек/колла в этом случае остаются руки средней силы, несколько натсов и средние дро (например, натсовые флэш-дро). Однако мы уже можем сказать, что этот диапазон сбалансирован, поскольку на терне часть дро превратится в натсы, а на всех остальных картах нашим сетами, двум парам и другим подобным рукам ничего угрожать не будет. Значит, оппонент никак не сможет эксплуатировать такой диапазон.

Как видите, это обсуждение уже зашло достаточно далеко, причем ситуация, рассмотренная выше, была не из разряда чрезмерно сложных. Кроме того, мы не поговорили о размерах ставок и рейзов, а также о текстуре доски.

Эксплуатировать оппонентов сложно - для этого нам нужно по крупницам собирать разрозненные факты, которые зачастую оказываются недостоверными, анализировать их, выстраивать новые линии и кроме всего прочего стараться свести к минимуму возможность ответной эксплуатации. Однако и играть в оптимальный покер ничуть не легче - составление сбалансированных диапазонов для целых линий розыгрыша также заставит вас потратить не один десяток часов.

Теперь давайте затронем тему бетсайзинга. Здесь одним из наиболее важных факторов будет текстура флопа. Так, наличие двух одномастных карт на доске дает множество возможных флэш-дро, которые, в свою очередь, меняют дальнейшие стратегии.

Для начала рассмотрим достаточно сухую доску, KK4, на которой мы оказались в качестве префлоп агрессора с сильным диапазоном. На таком флопе имеет смысл ставить на трех улицах по стратегии геометрического приращения банка, при условии, что у нас средний стэк (так что каждая новая ставка будет находиться в районе от $\frac{1}{3}$ до целого банка). Такой бетсайзинг неплохо балансирует количество денег, которым мы рискуем против сильной части диапазона оппонента, а также вэлью, которое мы извлекаем из слабых дро. И поскольку сила всех дро на этой

доске оставляет желать лучшего, нам не нужно делать большие ставки, чтобы лучшие из них оказались безразличными к выбору действия.

Важно отметить, что чем больше становятся стэки, тем реже нам стоит ставить больше банка. Вместо этого мы можем использовать стратегию геометрического приращения для четырех улиц, оставляя таким образом место для возможного рейза от оппонента. Очевидно, что на сухих досках нам никогда не стоит делать овербет на ранних улицах, иначе мы никак не сможем воспользоваться относительной силой нашего диапазона.

Однако когда на доске оказываются две одномастные карты, или же пара карт, делающих возможными различные стрит-дро, ситуация в корне меняется. Дело в том, что значительная часть диапазона колла или рейза оппонента полностью обесценится на ривере. Но хоть его набор рук и окажется более слабым, его «степень ясновидения» выше нашей, ведь только он знает, было ли у него дро или натс, плюс он никогда не будет проплачивать вэлью бет, например, с промазавшим флэш-дро.

Из-за этого нам стоит ставить больше на ранних улицах торговли, пытаюсь нивелировать преимущество оппонента в экс-шоудаун вэлью ближе к концу раздачи. На досках, где возможны всего несколько дро (скажем, $K\spadesuit 7\heartsuit 2\heartsuit$), мы можем увеличить свой бетсайзинг лишь наполовину. Так, если мы раньше ставили $\frac{1}{2}$ банка, то на таком флопе имеет смысл сделать бет в $\frac{3}{4}$. С другой стороны, если доска очень дровяная, как например $9\spadesuit 8\spadesuit 7\clubsuit$, нам придется вкладывать в банк еще больше денег, вплоть до геометрического приращения для двух улиц.

Естественно, каждая из этих подстроек в бетсайзинге потребует от нас изменения и в диапазонах. Если мы делаем ставки большего размера, то нам следует сузить разыгрываемый диапазон, чтобы избежать эксплуатации со стороны оппонента. Фактически это значит, что нам придется делать чек как со всеми средними, так и со многими очень сильными руками.

Например, на монотонной доске $K\clubsuit 7\clubsuit 4\clubsuit$ (считаем, что мы будем делать бет размером в банк), нам часто придется делать чек как с AQ без крестовой карты, так и с некоторыми сильными парами. Очевидно, что в таком случае мы даем бесплатную возможность слабым дро попасть в нужную карту на терне. Более того, текстура доски также играет на руку оппоненту, ведь любая крестовая карта в его диапазоне может получить на терне флэш. Поэтому чтобы полностью сбалансировать свой диапазон, нам стоит делать чек и с комбинациями, которым все равно, что выйдет на терне. Хорошим примером таких рук будут $A\clubsuit A\heartsuit$ или $A\clubsuit K\heartsuit$ - с ними мы получаем вэлью от блефов оппонента на терне и одновременно защищаем более слабую часть диапазона.

Игра на терне

Теперь давайте поговорим об игре на терне. Этот раздел будет не таким длинным, как предыдущий, во многом потому, что стратегия на терне повторяет уже рассмотренные правила. Здесь все так же важно балансировать различные стратегические возможности, иметь натсы в каждой линии розыгрыша и так далее. Отличительной чертой терна является игра с дро.

Представьте себе ситуацию, где ни одно из очевидных дро не закрылось на четвертой карте. В этом случае сила готовых рук остается примерно той же, что и на флопе, однако дро серьезно обесцениваются, ведь теперь у них остается немногим более 20% на улучшение (а иногда и меньше). Естественно, на терне могут улучшиться и какие-то средние готовые руки, если попадут в две пары или топ пару.

Поэтому в большинстве ситуаций наша стратегия на терне должна выглядеть следующим образом. Пусть мы сделали ставку на флопе с неким диапазоном рук. На терне мы сделаем чек со следующими комбинациями:

- Несколько натсов
- Руки средней силы с флопа, которые улучшились на флопе (например, попали в две пары)
- Некоторые руки средней силы, которые сделают чек/колл на терне (чаще всего в эту категорию попадают руки чуть слабее хорошей топ пары)
- Слабые руки, с которыми мы будем делать чек/фолд (слабые дро)

В то же время, стоит продолжать ставить с:

- Всеми остальными натсами
- Сильными парами и двумя парами
- Сильными полублефами (с которыми мы уравнием рейз, чтобы сбалансировать предыдущую категорию рук)
- Слабыми полублефами (с которыми мы упадем в ответ на рейз).

Конечно, это деление диапазонов не стоит считать истиной в последней инстанции - на него будут оказывать влияние вышедшие карты, текстура доски и т.д. Однако в каждом случае и для каждой возможной линии мы должны выбрать такой диапазон, который наш оппонент не смог бы эксплуатировать. Многие игроки часто спотыкаются именно на терне: они делают рейз на префлопе и получают колл, затем ставят на флопе и видят колл, а на терне решают сдать. Они могли бы сделать свою стратегию менее эксплуатируемой, если бы стали делать чек с руками, готовыми как минимум уравнивать ставку на терне.

Даже когда на терне закрывается очевидное дро, мы можем следовать тем же самым принципам. Но поскольку теперь многие полублефы превратились в сильные готовые руки, имеет смысл перевести некоторые слабые комбинации из диапазона чек/колла в диапазон бета, а худшие руки из диапазона бета в

диапазон фолда. Интересно, что зачастую закрывшееся дро на терне создает множество производных дро. Например, третья карта к флэшу даст тузу той же масти натсовое флэш-дро против всех только что появившихся флэшей и других готовых рук.

Стоит отметить, что натсовые бэкдор флэш-дро занимают особое место в оптимальной стратегии. Во-первых, с ними мы получаем возможность попасть в натс к риверу, если выйдут две подходящие карты - лишнее эквити никогда не помешает. Во-вторых, уменьшается вероятность того, что у оппонента окажется сильное дро, с которым он захочет сделать рейз на флопе. К примеру, у вас $A\clubsuit K\spadesuit$ на доске $K\clubsuit 7\clubsuit 2\heartsuit$, и дело заканчивается пушем в ответ на ваш рейз. Если бы в вашей руке был, скажем, червовый туз, то у оппонента вполне могло бы оказаться натсовое флэш-дро с 12 аутами. Но с $A\clubsuit$ вам следует чаще задумываться о фолде, так как теперь диапазон оппонента в этой ситуации никогда не включает в себя руки вида $A\clubsuit X\clubsuit$ (хоть он и не знает об этом).

Говоря о блокерах, нельзя не отметить, что они становятся не просто важным, а ключевым элементом игры на ривере.

Игра на ривере

Играть на ривере проще всего. Однако на этой улице банк уже, как правило, достаточно большой, так что каждая ошибка может дорого вам обойтись. Так, на ривере сильнее всего проявляются ошибки при составлении диапазонов, сделанные на ранних улицах торговли. На самом деле, мы нисколько не преувеличим, сказав, что цель покера - это оказаться на ривере со сбалансированным диапазоном, состоящим из натсов, средних рук (которые не смогли реализовать свой потенциал из-за вышедших карт) и блефов, причем его сила должна находиться в прямой зависимости от размера банка.

Стратегия на ривере будет напомнить $[0,1]$ игры с ассиметричными распределениям, но с некоторыми оговорками. Во-первых, сила каждой руки в диапазоне будет величиной дискретной (не непрерывной). Во-вторых, блокеры будут оказывать существенное влияние на наши решения.

Однако мы также можем извлечь некоторые уроки и из игры AKQ, в том числе превентивные ставки. Как вы можете помнить, это небольшие беты на ривере со смешанным диапазоном, состоящим из натсов, а также рук, которые достаточно сильны, но не хотели бы столкнуться с большой ставкой. Такими бетами мы заставляем оппонента либо делать блеф рейз (тогда мы выигрываем с натсами), либо фолд (мы не отдадим банк блефам), причем мы не застрахованы и от рейза против наших средних рук - в таком случае нам придется скинуть свою руку. Размер превентивных ставок часто должен составлять от $\frac{1}{10}$ до $\frac{1}{6}$ от размера банка.

Наиболее распространенным сценарием, где такая ставка будет уместной, является выход очевидного дро когда наш диапазон содержит значительное число флэшей, а также топ пар, оверпар и других рук, которые бы не хотели столкнуться с большой ставкой. Здесь мы вполне можем применить смешанную стратегию, включающую в себя как небольшие превентивные ставки, так и стандартные вэлью беты.

Что касается блокеров, то зачастую они помогут нам решить, с какими руками стоит блефовать. Выбирая из комбинаций, которые имеют достаточно низкое шоудаун вэлью, мы должны останавливаться на тех, что исключают из диапазона оппонента как можно большее число хороших комбинаций. И наоборот, когда мы принимаем решение о колле, нам стоит обращать внимание на карты, которые находятся у нас в руке.

Представьте ситуацию из семикарточного Стада, где у оппонента возможен флэш, а нам зашли две пары. В таком случае, на ривере оппонент фактически становится ясновидящим (если только нам не зашел фулл хаус): он будет блефовать достаточно часто, чтобы мы оказались безразличны к коллу когда у нас нет блокеров на его флэш. Однако если у нас есть карты нужной масти, то для нас колл всегда будет более предпочтителен, чем фолд.

Нужно запомнить

- Иногда может показаться, что оппонент эксплуатирует нас на какой-то конкретной улице несмотря на то, что мы играем по близкой к оптимальной стратегии. Однако зачастую это происходит из-за того, что он пожертвовал частью своего ожидания на предыдущей улице, чтобы получить перевес сейчас. Вспомните ситуацию из главы по игре на нескольких улицах, где открытой готовой руке нужно было уравнивать на ривере всего один раз из шести, поскольку она уже заставила дро вложить в банк деньги еще на терне.
- Для каждой линии должен существовать свой сбалансированный диапазон. Области вэлью бетов, полублефов и блефов должны рассматриваться как часть единой стратегии.
- Любая линия, которая не оканчивается фолдом, должна содержать в себе натсы, поскольку иначе оппонент сможет безнаказанно нас эксплуатировать, делая овербеты в каждой раздаче.
- Текстура доски оказывает огромное влияние на структуру диапазонов. Для того, чтобы составить стратегию для ранних улиц торговли необходимо понимать все возможные исходы на различных картах.

Mathematics of Poker

Bill Chen, Jerrod Ankenman

Математика покера

Блок №3

(главы 22 - 30)

Перевод: OlegK

Оглавление

Часть IV: Риск

Глава 22. Остаемся на плаву: Риск банкротства	3
Глава 23. Добавляем неопределенность: Риск банкротства при неизвестных винрейтах	21
Глава 24. Наращиваем банкролл: Критерий Келли и выбор столов	32
Глава 25. Инвестпокер: Портфельная теория и бэкинг	40

Часть V: Разное

Глава 26. Удваиваемся: Турниры, часть 1	50
Глава 27. Фишки не деньги: Турниры, часть 2	65
Глава 28. Не забываем о покере: Турниры, часть 3	83
Глава 29. Сообразим на троих: Игры с несколькими участниками	97
Глава 30. Складываем паззл: Математика и вы	111

Глава 22

Остаемся на плаву: Риск банкротства

До этого момента мы изучали исключительно математическое ожидание и оптимальную игру в различных ситуациях. В самом начале книги мы специально отметили, что все гипотетические игроки, участвующие в наших раздачах имеют достаточные банкроллы и их единственной целью является максимизация собственного математического ожидания. Но давайте теперь зададимся вопросом: «А что значит иметь достаточный банкролл?»

Естественно, на него нет однозначного ответа, поскольку разные люди имеют разную степень толерантности к риску. Для кого-то потеря всего покерного банкролла является абсолютно неприемлемым исходом, кто-то же будет расценивать покер как особый вид стартапа, где высокие риски вполне окупаются потенциальной прибылью. С другой стороны, мы можем проанализировать теорию ведения банкролла с точки зрения численного анализа. Модель, которая наиболее часто используется для этих целей, называется *риск банкротства* (Risk of Ruin, RoR).

Значительная часть нижеизложенных расчетов и выводов была впервые опубликована Биллом Ченом и Томом Видманом на сайте rec.gambling.poker.

В рассматриваемой модели делаются следующие допущения:

- Мы постоянно играем в определенную игру с определенным набором исходов X ,
- Все результаты сессий независимы и случайным образом выбираются из X ,
- Мы обладаем стартовым банкроллом b ,
- Банкролл b изменяется в зависимости от результата каждой сессии.

Мы будем продолжать играть что бы ни случилось, вплоть до того момента когда наш банкролл станет равным нулю.

Для описанного выше набора допущений на бесконечной дистанции существуют всего два возможных исхода: либо наш банкролл будет бесконечно увеличиваться, либо в какой-то момент мы потеряем все деньги. Естественно, в рамках этой главы нам будет интересна конкретная вероятность того, что мы проиграем все деньги. Ответом будет являться функция, которую мы назовем *функцией банкротства*, $R_X(b)$, однако мы часто будем сокращать это наименование до $R(b)$.

У этой функции есть несколько свойств, которые позволят нам описать ее поведение и в конечном счете найти требуемое значение для рассматриваемой игры.

Свойство 1.

Если мы не можем проиграть, то $R(b)=0$ для всех значений b .

Здесь все просто - если для игры не существует отрицательных исходов, то мы в принципе не можем потерять свои деньги.

Свойство 2.

Если у игры имеется постоянное отрицательное ожидание, то $R(b) = 1$ для любых значений b .

Это свойство следует из нашего намерения играть вплоть до момента, когда у нас не останется денег. Несложно догадаться, что этот момент все равно наступит, если количество наших сессий с отрицательным ожидаемым выигрышем устремится к бесконечности. С другой стороны, если игра имеет для нас положительное ожидание, то наш банкролл будет постоянно увеличиваться, если только мы не проиграем его раньше в каком-либо витке дисперсии.

Свойство 3.

Если игра имеет хотя бы один исход из множества X , при котором мы теряем деньги, то $R(b) > 0$ для всех значений b .

Это свойство несложно доказать: пусть вероятность некоего отрицательного исхода игры X_L равна p , и мы при этом потеряем v денег. Если мы обладаем банкроллом B , то мы потеряем все деньги, когда исход X_L наступит B/v раз подряд. Вероятность такого события равна $p^{B/v}$, и хотя она может быть сколь угодно мала, функция банкротства всегда будет отлична от нуля, то есть $R(b) > 0$.

Свойство 4.

Если игра обладает положительным математическим ожиданием и ограниченным набором отрицательных исходов, то $R(b) < 1$ для всех значений b .

Пусть множество X обладает положительным ожиданием. Предположим, что x_n - последовательность независимых исходов (результатов сессий). Суммарный результат от игры тогда будет равен:

$$C_n = \sum_{j=1}^n x_j$$

Значит с вероятностью равной 1 верно следующее:

$$\langle X \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} > 0$$

Но теперь предположим, что для этого же множества $R(b) = 1$. Тогда мы можем утверждать, что суммарный результат для некоторого множества C_n будет

отрицательным. Более того, для любого C_n найдется такое $m > n$, что $C_m < C_n$. Значит, получим следующую последовательность:

$$0 > C_{n1} > C_{n2} > C_{n3} > \dots$$

А это противоречит изначальному условию, что множество X обладает положительным ожиданием.

Свойство 5.

Функция банкротства для суммы двух банкроллов равна произведению двух функций банкротства для каждого из них.

$$R(a + b) = R(a)R(b) \quad (22.1)$$

Это свойство служит основой для вывода функции банкротства. Скажем, наш банкролл составляет 500\$, ему соответствует определенный риск банкротства. Тогда какова вероятность, что мы проиграем не 500\$, а 1000\$? Мы можем считать, что после проигрыша одного банкролла, сразу получаем второй, такой же, и играем уже на него. Но поскольку проигрыш денег в этих двух случаях является независимым событием, вероятность того, что мы отдадим за столами всю 1000\$ (то есть два раза по 500\$) равна вероятности потерять 500\$ в квадрате.

Давайте отметим одну тонкость, связанную с этим свойством. Пусть в некоей игре минимальная ставка равна 100\$, а наш банкролл составляет всего 50\$. В этом случае мы уже «обанкротились». Однако мы можем взять два банкролла по 50\$, чтобы принять участие в игре, и тогда будем иметь меньший риск банкротства, чем если бы не участвовали в ней вовсе. К счастью, в покере мы почти никогда не столкнемся с этим парадоксом, так что смело игнорируйте его в своих собственных рассуждениях.

Пример 22.1

Разберем небольшой пример. Предположим, что мы бросаем игральную кость. Если выпадает 1 или 2, мы проигрываем 100\$, если любое число от 3 до 6 - выигрываем 100\$. Вполне понятно, что от такой игры отказываться никак нельзя, ведь мы выигрываем в среднем 33\$ за бросок. Но что если у нас в кармане всего 100\$? Какова вероятность, что мы проиграем все свои деньги, если будет бросать кость снова и снова? Описанные выше свойства помогут нам дать правильный ответ.

На первом броске мы проиграем все деньги с вероятностью $\frac{1}{3}$, а оставшиеся $\frac{2}{3}$ раз нарастим банкролл до 200\$. Давайте возьмем 100\$ за единицу. Тогда риск банкротства для банкролла 100\$ будет обозначаться как $R(1)$, а для банкролла в 200\$ - $R(2)$.

$$R(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} R(2)$$

Из свойства 5 мы знаем, что $R(a + b) = R(a)R(b)$, тогда:

$$R(2) = R(1)R(1)$$

Проведем несложную подстановку:

$$R(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} R(1)^2$$

$$2R^2 - 3R + 1 = 0$$

$$(2R - 1)(R - 1) = 0$$

Однако из этого уравнения следует, что мы можем получить два значения функции: либо $\frac{1}{2}$, либо 1. Мы знаем, что эта игра обладает положительным ожиданием, следовательно, по свойству 4 значение функции риска должно быть меньше единицы. Поэтому $R(1)$ равно $\frac{1}{2}$.

Наши читатели могут убедиться в правильности этого ответа самостоятельно. Для этого вам потребуется игральная кость и немного терпения - попробуйте бросать кубик до тех пор, пока не проиграете 100\$ или выиграете 1000\$. После достаточно большого числа попыток, вероятность проиграть все деньги сойдется на значении $\frac{1}{2}$.

Вернемся к формуле 22.1:

$$R(a + b) = R(a)R(b)$$

Мы можем провести над ней несколько алгебраических преобразований, которые помогут обнаружить важное свойство $R(x)$.

Для начала, давайте возьмем натуральный логарифм от каждой из частей уравнения:

$$\ln R(a + b) = \ln R(a) + \ln R(b)$$

Введем функцию $f(x) = \ln R(x)$, получим:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

Это значит, что функция f является линейной:

$$f(1+1) = f(1) + f(1)$$

$$f(2) = 2 f(1)$$

$$f(2+1) = f(2) + f(1)$$

$$f(3) = 3f(1)$$

$$f(n) = nf(1)$$

...и так далее

Таким образом, $f(x)$ имеет вид $f(x) = -\alpha x$, где α есть некая константа (не стоит путать ее с α из формулы 11.1, где она обозначала отношение блефов к вэлью-бетам). Фактически, риск банкротства для любой игры имеет именно такое выражение, причем мы будем называть α **константой банкротства**, она всегда положительна и равна натуральному логарифму от риска банкротства для банкролла в 1 единицу. Мы уже знаем, что функция $R(x)$ находится между 0 и 1 для всех x , поэтому перед константой используется знак «минус», ведь натуральный логарифм для чисел от 0 до 1 является отрицательным числом.

$$\alpha = \ln(R(1))$$

Константа α связывает величину нашего банкролла с вероятностью банкротства. Например, располагаемый банкролл составляет одну единицу, тогда риск банкротства равен $e^{-\alpha}$. e или экспонента, одна из основных математических констант, равна примерно 2.71, в тексте книги мы будем обозначать ее через $\exp(x)$ и e^x .

Представьте, что ваш банкролл составляет две единицы, тогда риск банкротства равен произведению $e^{-\alpha}$ на $e^{-\alpha}$, или $e^{-2\alpha}$. Соответственно, если в банкролле N единиц, то и риск равен $e^{-N\alpha}$. Иными словами:

$$\begin{aligned}\ln R(x) &= -\alpha x \\ R(x) &= e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

Получается, что функция риска банкротства имеет экспоненциальный вид и зависит от величины банкролла, а также константы, описывающей распределение исходов от игры.

Вернемся к уже рассмотренному нами примеру. Как мы уже знаем, риск банкротства для банкролла в одну единицу составляет $1/2$. Давайте теперь сделаем следующее упрощение, и будем считать, что в этой игре банкролл равен 1 единице, а наш результат от броска кости может быть либо +1, либо -1.

$$\begin{aligned}R(b) &= e^{-\alpha b} \\ R(1) &= 1/2 \\ 1/2 &= e^{-\alpha} \\ -\alpha &= \ln 1/2 \\ \alpha &= \ln 2\end{aligned}$$

Самое время поговорить о еще одном важном свойстве функции риска.

Свойство 6.

Для одной отдельно взятой сессии $R(B) = \langle R(B + x) \rangle$, где x - один из случайных исходов в рамках множества X .

Фактически это свойство говорит нам, что риск банкротства для банкролла B - ни что иное как математическое ожидание от риска банкротства для банкролла B после одной игровой сессии. Следует это из того, что модель риска банкротства предполагает бесконечно долгую игру. Так что если у вас имеется некий банкролл и соответствующий ему риск $R(B)$, и вы планируете сыграть всего раз, то $R(B)$ будет равно взвешенному среднему от двух возможных состояний вашего банкролла. Давайте поясним это определение на конкретном примере.

Пример 22.2

В игре с бросанием кости мы говорили о следующих вероятных исходах:

- $+1$, вероятность $2/3$
- -1 , вероятность $1/3$.

Свойство 6 говорит нам, что для любого банкролла будет верно следующее:

$$\begin{aligned} R(B) &= \langle R(B + x) \rangle \\ R(B) &= \frac{1}{3} R(B - 1) + \frac{2}{3} R(B + 1) \end{aligned}$$

Это уравнение показывает зависимость между риском банкротства и возможными исходами игры (сессии). В нашем примере после каждого броска кости существует конечное множество состояний банкролла (здесь - всего два), которое зависит от результата игры.

Мы можем использовать эту зависимость для экспоненциального уравнения:

$$\begin{aligned} R(B) &= \langle R(B + x) \rangle \\ e^{-\alpha B} &= \langle e^{-\alpha B} e^{-\alpha x} \rangle \end{aligned}$$

Справа $e^{-\alpha B}$ является константой, так что мы можем вынести этот член за скобки расчетов математического ожидания:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha B} &= e^{-\alpha B} \langle e^{-\alpha x} \rangle \\ 1 &= \langle e^{-\alpha x} \rangle \end{aligned} \tag{22.2}$$

Теперь найдем константу риска:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} e^{\alpha} + \frac{2}{3} e^{-\alpha} &= 1 \\ e^{\alpha} + 2e^{-\alpha} &= 3 \\ 1 + 2e^{-2\alpha} &= 3e^{-\alpha} \end{aligned}$$

Пусть $x = e^{-\alpha}$

$$1 + 2x^2 = 3x$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)(x - 1) = 0$$

$$x = 1/2 \text{ или } x = 1$$

$$e^{-\alpha} = 1/2 \text{ или } e^{-\alpha} = 1$$

В уравнении 22.2 для любой игры одним из решений всегда будет $\alpha = 0$. В случае с играми, где $EV < 0$, оно является верным, поскольку для них $R(b) = 1$. Однако если мы имеем дело с игрой, где наш ожидаемый выигрыш больше нуля, то ответом всегда будет второй корень, в нашем случае это $\alpha = \ln 2$. Как вы уже могли заметить, этот результат совпадает с нашими первоначальными вычислениями.

Теперь давайте немного отвлечемся от расчетов и посмотрим, к чему мы пришли. Во-первых, мы дали определение функции риска банкротства и назвали ее $R(b)$. Во-вторых, мы перечислили некоторые свойства этой функции, включая очень важное для нас, что $R(a + b) = R(a)R(b)$. Используя это и другие свойства, мы смогли вывести более общую формулу для расчета риска банкротства, $R(b) = e^{-\alpha b}$, где α является константой, описывающей свойства и ожидание от игры, которую мы изучаем. Однако на тот момент мы не могли вычислить α никаким образом, кроме как решив уравнение для $R(1)$.

Затем мы дали определение дополнительному свойству функции $R(b)$, которое объяснило зависимость $R(b)$ от ожидаемого значения функции после одной сессии. С помощью данной формулы мы показали, что **можно найти значение α непосредственно из параметров игры, не прибегая к вычислению частных значений функции риска**. Это, в свою очередь, делает целый класс более сложных задач вполне решаемыми. Поэтому самое время изучить свойства константы α .

Мы можем сделать несколько интересных наблюдений касательно поведения функции $\langle e^{-\alpha x} \rangle$, которую пока будем называть $g(\alpha)$.

Для начала, нам уже известно, что $g(0) = 1$. Далее, мы можем взять частную производную от функции g по α . Получим:

$$g'(\alpha) = \langle -xe^{-\alpha x} \rangle$$

При $g(0) = \langle -x \rangle$. Поскольку мы знаем, что игра имеет положительное ожидание, $g'(0)$ всегда меньше нуля, так что в точке 0 функция g примет значение 1 и начнет убывать.

Мы можем найти производную второго порядка, $g''(\alpha) = \langle x^2 e^{-\alpha x} \rangle$. Эта функция, в свою очередь, всегда положительна.

Объединив все эти свойства, получим график для функции g , который должен начинаться в точке 1, идти вниз, а затем возрасть в бесконечность при α , стремящемся к бесконечности.

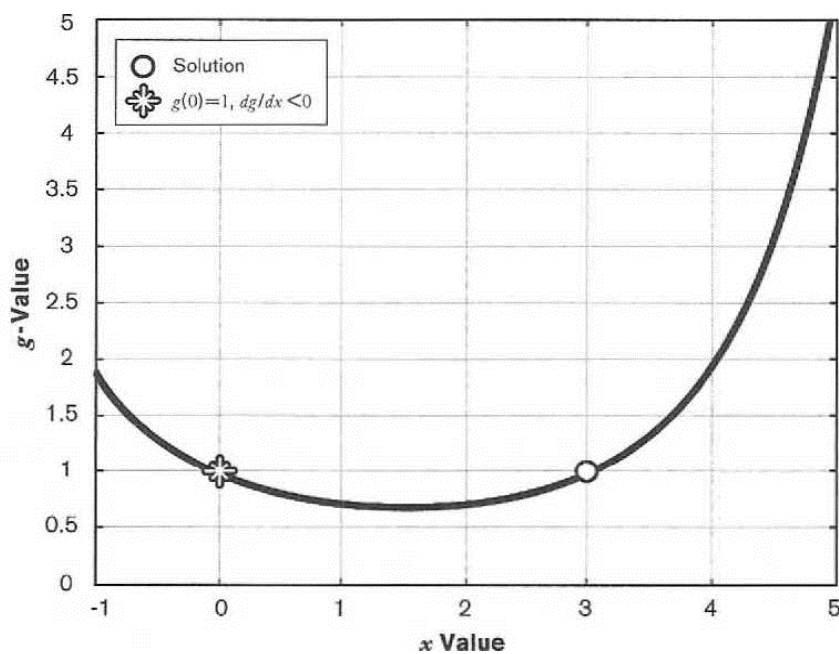


Рисунок 22.1. Пример функции $g(x)$ для игры с положительным ожиданием

Таким образом, решение уравнения 22.2 существует при $\alpha > 0$, и это решение единственное. Это, в свою очередь, устраняет несколько потенциальных подводных камней, на которые мы бы непременно наткнулись, если бы существовало несколько значений α , удовлетворяющих уравнению 22.2. Теперь же, как только мы найдем значение константы отличное от нуля, мы будем знать, что оно является искомым.

Только что мы вывели общее решение для любой задачи, связанной с определением риска банкротства при неизвестном распределении результатов игры - нужно лишь решить уравнение 22.2.

Пример 22.3

Давайте рассмотрим случай, где у игрока имеется некий ограниченный банкролл. Также скажем, что он не очень-то толерантен к риску, плюс игра является его единственным источником дохода, и он ему негде одолжить денег. Он принимает решение, что 200\$+15\$ SNG турниры дадут ему лучшую комбинацию риска и рентабельности. Структура призовых в этих турнирах выглядит следующим образом:

1 место: \$1000
 2 место: \$600
 3 место: \$400

Его ожидание от турниров выглядит следующим образом:

Место	Вероятность	Ожидание
1 место	0.12	\$785
2 место	0.13	\$385
3 место	0.13	\$185
4-10 места	0.62	-\$215
Итого	1	EV = \$35/турнир

Какова вероятность того, что этот игрок потеряет все свои деньги (при различных размерах стартового банкролла)?

Для начала давайте выпишем уравнение для этой игры на основании формулы 22.2:

$$0.12e^{-a(785)} + 0.13e^{-a(385)} + 0.13e^{-a(185)} + 0.62e^{-a(215)} = 1$$

Вручную такое уравнение решить не получится, однако есть множество программных методов, включая Microsoft Excel. Не имеет значения какой конкретно «калькулятор» ответа мы используем, в конечном счете, мы все равно получим:

$$\alpha \approx 0.000632$$

$$R(b) = \exp(-0.000632b).$$

Можем составить таблицу со сводными значениями риска банкротства для различных банкроллов:

Банкролл	Риск банкротства
500	72.9%
1000	53.2%
2000	28.3%
3000	15.0%
4000	8.0%
5000	4.3%
7500	0.9%
10000	0.2%

Перед тем как мы продолжим, стоит сделать важное замечание по поводу концепции, на которой основывается модель риска банкротства. До этого момента

мы предполагали, что все выигранные деньги будут реинвестироваться в банкролл, что позволит ему расти до бесконечности. Но вряд ли кто-то сможет удержаться от соблазна вывести часть денег из покера, видя столь низкие риски банкротства.

Риск банкротства для банкролла, который искусственно удерживается на одном уровне, равен 1 или 100%.

Если вы регулярно выводите деньги из своего банкролла, ваш риск банкротства многократно вырастает. Существует много рациональных стратегий для постепенного вывода денег, которые при этом не взвинчивают риски, однако важно понимать, что любое уменьшение банкролла или его стагнация ведет к увеличению уровня риска.

Полубанкроллы

Те из наших читателей, кто немного знаком с естественными науками, скорее всего заметили схожесть формулы риска банкротства с некоторыми специфичными функциями, например функцией радиоактивного распада.

Так, радиоактивный материал (обычно) содержит определенные изотопы некоего элемента. Они нестабильны и поэтому распадаются случайным образом ровно наполовину за период, который называется периодом полураспада. Здесь важно понимать, что за отрезок времени, равный двум периодам полураспада, вещество не исчезнет - второй «полураспад» затронет оставшуюся половину и так далее до бесконечности.

Фактически, экспоненциальные функции риска банкротства ведет себя точно так же. Поэтому давайте введем новое понятие, ***полубанкролл***. Определим его как величину банкролла, которая необходима, чтобы риск банкротства был равен ровно $1/2$ (или 50%). Тогда риск банкротства для двух полубанкроллов будет равен $1/4$, трех - $1/8$, и так далее.

Формула для вывода полубанкроллов вполне интуитивно получается из приведенных выше уравнений. Мы просто подставляем вместо значения функции риска $1/2$:

$$\begin{aligned}e^{-\alpha b} &= 1/2 \\ -\alpha b &= -\ln 2 \\ b &= (\ln 2)/\alpha\end{aligned}$$

Мы можем приблизительно посчитать полубанкролл для описанного выше примера с SNG турнирами: $\ln 2$ равен примерно 0.693, а α , если вы помните, 0.00632. Таким образом, требуемый банкролл для риска в 50% составляет около

1100\$. Мы также можем экстраполировать эти результаты на меньшие значения риска: получим полубанкrolлы 2200\$, 3300\$ и так далее. Все они будут подчиняться геометрической прогрессии, описываемой формулой 0.5^b .

Полубанкrolлы - это лишь частный случай формулы для вычисления риска банкротства. Они могут оказаться полезными для быстрого вычисления банкротства при определенной толерантности к риску, а также для сравнения банкротств, требуемых в различных играх (мы еще вернемся к этой идее позже).

Риск банкротства для нормально распределенных исходов

Рассмотрим, как меняется формула риска банкротства в случае, если поле исходов X распределено нормально, а μ и σ являются его математическим ожиданием и стандартным отклонением соответственно.

Пусть $v(x)$ - функция риска банкротства для непрерывной случайной величины, а $p(x)$ - плотность вероятности, тогда:

$$\langle v(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)v(x)dx \quad (22.3)$$

Примечание от переводчика: Здесь авторы используют свойство плотности вероятности, когда для некой непрерывной случайной величины можно задать математическое ожидание через функцию плотности вероятности, взятой на бесконечном интервале. Как вы можете помнить, для функции риска банкротства ранее уже было определено свойство, связывающее ее с ожидаемыми значениями банкротства после одной сессии.

Это уравнение поможет нам использовать уже выведенное определение для формулы риска банкротства в случаях, когда исходы распределены нормально.

Как вы уже знаете из первой части книги, нормальное распределение описывается следующей функцией плотности:

$$N(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

где μ - математическое ожидание, а σ - стандартное отклонение.

Начнем с уравнения 22.2:

$$\langle e^{-ax} \rangle = 1$$

Связав его с уравнением 22.3, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x} N(x) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x) \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-[(x-\mu)^2 + 2\alpha\sigma^2 x]}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

Давайте пока разберемся с экспоненциальным членом:

$$\frac{-(x-\mu)^2 + 2\alpha\sigma^2 x}{2\sigma^2}$$

$$\frac{-(x^2 - 2x\mu + \mu^2) + 2\alpha\sigma^2 x}{2\sigma^2}$$

$$\frac{-(x^2 - 2x\mu + 2\alpha\sigma^2 + \mu^2)}{2\sigma^2}$$

$$\frac{-(x^2 - 2x(\mu - \alpha\sigma^2) + \mu^2)}{2\sigma^2}$$

Мы можем несколько видоизменить числитель этого выражения, чтобы затем упростить конечный вид формулы. Дополним выражение взаимоисключающими членами, достроив квадраты:

$$\frac{-(x^2 - 2x(\mu - \alpha\sigma^2) + (\mu - \alpha\sigma^2)^2 + \mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2)}{2\sigma^2}$$

$$\frac{-[(x - (\mu - \alpha\sigma^2))^2 + \mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}$$

Подставим полученное выражение в исходное уравнение:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-[x - (\mu - \alpha\sigma^2) + \mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-[x - (\mu - \alpha\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-[\mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

Поскольку второй экспоненциальный член не зависит от переменной x , мы можем вывести его из-под знака интеграла:

$$\exp\left(\frac{-[\mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-[x - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

Однако также верно следующее равенство:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-[x - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

Оно выполняется, поскольку фактически мы имеем дело с интегралом функции плотности вероятности, где математическое ожидание взято не как μ , а как $\mu - \alpha\sigma^2$. И, как вам известно, площадь (а это и есть смысловое значение интеграла) под куполообразной кривой равна именно единице.

Таким образом, имеем:

$$\exp\left(\frac{-[\mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2]}{2\sigma^2}\right) = 1$$

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей уравнения:

$$(-\mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2)/2\sigma^2 = 0$$

$$(-\mu^2 - (\mu - \alpha\sigma^2)^2) = 0$$

$$(\mu - \alpha\sigma^2)^2 = \mu^2$$

$$\pm\mu = \mu - \alpha\sigma^2$$

$$0 = \alpha \text{ или } 2\mu/\sigma^2 = \alpha$$

И снова мы нашли два возможных решения для α . В первом случае коэффициент становится равным нулю, во втором - $2\mu/\sigma^2$.

Подставим последнее значение в нашу общую формулу для риска банкротства:

$$R(b) = \exp\left(\frac{-2\mu b}{\sigma^2}\right) \quad (22.4)$$

Эта формула впоследствии окажется незаменимой при решении задач о риске банкротства для игр с нормально распределенными исходами. Однако покер не относится к этой группе, так что перед тем как применять полученную модель, стоит сказать несколько слов о ее ограничениях.

Дело в том, что в покере исходы сессий не распределены нормально по всей числовой прямой. Скорее они группируются вокруг отдельных значений, например «минус 1 блайнд», «минус 2 блайнда» и так далее. Из Центральной Предельной Теоремы мы знаем, что сумма достаточно больших выборок будет сходиться к нормальному закону, но тут необходимо пояснить, что имеется ввиду под «достаточно большой» выборкой.

Если у нас есть произвольное распределение X для некоей игры, а также выборки определенного размера, которые приблизительно нормальны, мы можем оценить риск банкротства для этой игры, используя выборочное распределение X' . Полученный результат будет неточным, поскольку риск банкротства зачастую оказывается искажен разницей между формами выборочного распределения и генеральной совокупности.

Один из главных источников такого искажения - **коэффициент асимметрии**, который в чем-то похож на дисперсию. Как вы можете помнить, при вычислении последней, мы рассматривали квадраты расстояний фактически наблюдаемых исходов от линии математического ожидания. Такой метод всегда давал положительные значения. Однако для асимметрии мы рассматриваем кубы расстояний, и из-за этого у каждого значения такого коэффициента появляется свой знак. Поэтому, например, распределения, где взвешенная сумма кубов расстояний больше нуля, называются распределениями с положительной асимметрией. При вычислении коэффициента мы будем делить сумму кубов на стандартное отклонение выборки в третьей степени.

Нормальное распределение обладает нулевой асимметрией по очевидной причине. С другой стороны, распределение возможных исходов турниров сильно сдвинуто в положительную сторону. Это несложно доказать: возьмем турнир на 100 человек, где победитель получает весь призовой фонд. Игрок средней руки получит 99 бай-инов 1% раз и проиграет 1 бай-ин 99% раз. **Ожидание** от такого турнира для него будет равно нулю, **дисперсия** - $99 \text{ бай-инов}^2 / \text{турнир}$, а **коэффициент асимметрии** - примерно +9.84. Если говорить простым языком, то этот коэффициент отражает склонность распределения к бóльшим значениям по одну из сторон линии математического ожидания.

Сильно асимметричные распределения создают определенные проблемы при использовании нормального метода вычисления риска банкротства. Мы можем попробовать вычислить риск для указанного выше турнира так: представив, что рассматриваемое распределение является нормальным (но это будет лишь очень грубая оценка) или же рассчитав коэффициент α напрямую. И поскольку модель риска банкротства применима исключительно в играх с положительным ожиданием, мы будем считать, что наш игрок занимает первое место не 1% раз, а 2%.

Первый метод достаточно простой (предполагаем нормальность распределения):

$$w = 1 \text{ бай-ин/турнир}$$

$$\sigma = 14.036 \text{ бай-инов/турнир}$$

$$R(b) = e^{-2b/197}$$

При банкролле в 100 бай-инов риск банкротства составляет примерно 36.2%.

Теперь же давайте сравним этот результат с тем, что дает метод прямого расчета α :

$$\langle e^{-\alpha x} \rangle = 1$$

$$\frac{1}{50} (e^{-99\alpha}) + \frac{49}{50} (e^{\alpha}) = 1$$

Найти решение этого уравнения можно с помощью численных методов - получим $\alpha \approx 0.01683$.

Подставляем значение в формулу RoR:

$$R(100) = e^{-1.683} = 18.6\%$$

Таким образом, прямой расчет дает гораздо меньший риск банкротства. Это является следствием столь явной положительной асимметрии в результатах турнира, ведь у нас есть возможность выиграть 99 бай-инов, при этом в худшем случае потерять мы можем только один. В то же время, нормальное распределение (как в первом уравнении) предполагает значительное число исходов с отрицательными значениями, как например -5 или -10 бай-инов. Но поскольку по факту они являются невозможными, метод расчета через нормальное распределение сильно переоценивает риск потерять все деньги.

По этой причине мы настоятельно не рекомендуем использовать нормальное распределение для расчета риска банкротства, если вашей основной дисциплиной являются турниры. Рассмотренный выше пример не может считаться эталонным из-за выбранной нами структуры распределения призовых, однако асимметрия будет присутствовать даже в случае с более равномерными выплатами.

Теперь давайте посмотрим на лимитный покер. Здесь распределение наших выигрышей, хотя и слегка скошено вправо, не настолько искажено как в случае с турнирами.

В качестве отправной точки возьмем следующее распределение вероятных исходов раздачи. Оно может показаться немного упрощенным, но в реальности не сильно отличается от ожидания игрока среднего уровня.

Результат (SB)	Вероятность	Ожидание
0	70%	0
-1	4.07%	-0.0407
-2	8.14%	-0.1627
-4	4.41%	-0.1763
-6	2.03%	-0.1220
-8	1.01%	-0.0814
-12	0.34%	-0.0407
+2	2.81%	0.0563
+4	3.44%	0.1375
+8	2.5%	0.2
+16	0.94%	0.15
+32	0.31%	0.1
Итого	100%	0.02 SB/раздача

Если кто-то из наших читателей решит не согласиться с такой формой распределения, цифры в таблице выше можно без труда заменить на те, которые покажутся правдоподобными именно вам.

В рассматриваемом распределении ожидание составляет 0.02 SB/раздача, а дисперсия - 10.80 SB²/раздача. Используя формулу для нормального распределения и банкролл в 300 SB, получим:

$$e^{-(2)(300)(0.02)/10.80} = 32.89\%$$

Мы также можем получить уравнение 22.1 для такого распределения. Само уравнение получается достаточно громоздким, так что мы предпочли опустить все промежуточные вычисления. Ответом для него будет $\alpha = 0.00378$. Тогда риск банкротства составит:

$$e^{-300\alpha} = 32.17\%$$

Как вы можете видеть, полученные значения мало чем отличаются друг от друга. То же самое будет верно для большинства возможных распределений исходов раздачи. Из этого можно сделать достаточно очевидный вывод: хотя подобные распределения сами по себе смещены в ту или иную сторону, коэффициент асимметрии в лимитном покере гораздо меньше, чем в турнирах, даже с учетом плавной структуры выплат. Как правило, нормальное распределение хорошо подходит для оценки риска банкротства в кэш-играх - результаты, полученные с помощью такого приближения, почти идентичны тем, что выводятся из полной формулы RoR.

Давайте посмотрим на то, что нам удалось разобрать в этой главе. Сначала мы проанализировали игру в турнирах и обнаружили, что их характерной особенностью является перекос распределения результатов в положительную

сторону. По этой причине же нормальное распределение не дает адекватную оценку риска банкротства для турниров, поскольку учитывает все возможные отрицательные исходы, которые попросту невозможны. Затем мы применили схожий подход к лимитному покеру, и результаты оказались несколько иными: нормальное распределение вполне точно предсказало реальное значение риска банкротства.

Теперь перейдем к другому популярному типу распределений исходов раздачи, который встречается только в Безлимитном Холдеме. Здесь будет присутствовать весь спектр значений: от положительных (когда мы выигрываем стэк оппонента) до отрицательных (когда сами отдаем все деньги). Из-за этого нормальное распределение иногда может давать не вполне адекватные предсказания, и основной причиной будет *коэффициент эксцесса*, который отражает склонность «хвостов» распределения (левого и правого конца) к большей вероятности, чем обычно. Например, вы можете помнить правило трех сигм - исходы, располагающиеся на расстоянии трех стандартных отклонений от среднего значения, имеют вероятность всего 0.3%. Однако в безлимитном покере события, отстоящие от математического ожидания на несколько сигм, могут встречаться не так уж и редко. В то же время, для большинства распределений этот эффект будет почти незаметен.

Результат (ВВ)	Вероятность	Ожидание
0	70%	0
+1	15%	0.15
-1	13%	-0.13
+50	1.1%	0.55
-50	0.9%	-0,45
Итого	100%	0.12 ВВ/раздача

Снова сравним значения для риска банкротства, полученные с помощью нормального приближения, а также прямого метода вычисления. Пусть наш банкролл составляет 500 больших блайндов.

Ожидание в такой игре равно 0.12 ВВ/раздача, дисперсия 50.27 ВВ²/раздача.

$$R(500) = e^{-2(0.12)(500)/50.27} = 9.19\%$$

Из уравнения 22.1 для заданного распределения следует, что:

$$\alpha = 0.004789$$

Таким образом, риск банкротства равен:

$$e^{-0.004789(500)} = 9.12\%$$

В этом случае эффект от эксцесса не сильно выражен; более того, при нормальном распределении мы даже получили переоцененное значение. Но в принципе, использование допущения, что результаты раздач распределены по нормальному закону, никогда не будет большой ошибкой.

Стоит, правда, отметить, что и в безлимитных кэш-играх может наблюдаться асимметрия схожая той, что присутствует в турнирах, особенно в случае с игроками, которые очень хорошо управляют с крупными банками. Так, даже если они отдают оппонентам множество мелких потов, коэффициент эксцесса будет минимальным, однако асимметрия такого распределения результатов приведет к завышенным оценкам риска банкротства.

Тип игры	Подходящая Формула	Ошибка нормального распределения
Лимитный кэш	Нормальное распределение	Незначительная
Турниры	Прямой расчет	Существенная (переоцененные значения)
Безлимитный кэш	Нормальное распределение	Незначительная

Нужно запомнить

- Модель риска банкротства дает ценные предсказания о наших шансах потерять все деньги при заданном стартовом банкролле. В основе модели лежит предположение, что мы бесконечно долго участвуем в одной игре с известным распределением исходов.
- Риск банкротства для игр с отрицательным ожиданием всегда равен 100%.
- Искусственное удержание банкролла на одном уровне ведет к неминуемому банкротству.
- Полубанкроллы оказываются весьма полезным инструментом для быстрых оценок величины банкролла, соответствующего заданному риску банкротства.
- Для расчета риска банкротства при нормально распределенных исходах следует использовать формулу 22.4.
- Некоторые распределения (например, турнирные) нельзя анализировать с помощью формулы для нормального распределения из-за присущей им асимметрии. В этом случае следует оценивать риск банкротства напрямую, через уравнение 22.2.

Глава 23

Добавляем неопределенность: Риск банкротства при неизвестных винрейтах

Представьте, как было бы здорово, если бы над головами игроков за столом отображались винрейты для каждой руки/игры/сессии. Естественно, в жизни такого ожидать не приходится, так что нам остается лишь гадать об истинном значении этого ключевого показателя. Ниже мы постараемся скрестить формулу риска банкротства, выведенную ранее, с неопределенностью распределения винрейтов, которые мы получаем из различных выборок.

Хотя мы будем рассматривать преимущественно примеры из лимитного покера, все нижеизложенные формулы можно без труда применить и в Безлимитном Холдеме. Не стоит, правда, забывать, что поскольку весь наш анализ базируется на предположении о нормальном распределении, его ни в коем случае нельзя использовать в турнирах.

Представьте себе игрока, который провел за столами N часов, имеет винрейт w и стандартное отклонение s . Первое, что стоит отметить - стандартное отклонение выборки очень быстро сходится к стандартному отклонению генеральной совокупности. Поэтому здесь и далее мы будем считать, что s равносильно отклонению для всей игры в целом (σ). С другой стороны, как мы уже неоднократно показывали ранее, w не обладает этим свойством (т.е. не сходится к истинному винрейту μ), поскольку s гораздо больше w .

Чтобы проиллюстрировать это, давайте обратимся к простому примеру. Пусть мы знаем, что для некоего игрока $\mu = 1$ ставка/час, $\sigma = 12$ ставок/час, и мы рассматриваем выборку из 100 часов, где его ожидаемый выигрыш равен w . Согласно правилу трех сигм, с 68% вероятностью w окажется в промежутке между 0 и 200 ставками; а 32% раз он окажется более чем на 1 ставку/час отдалено от среднего значения. Скажем, у нашего игрока банкролл составляет 200 ставок. Вполне очевидно, что разница для риска банкротства между ожиданием 0 ставок/час и 2 ставки/час более чем весомая!

0 ставок:

$$R(200) = 1$$

2 ставки:

$$R(200) = e^{-800/144} = 0.387\%$$

Фактически мы получили весь возможный спектр значений функции риска банкротства (от 0 до 1) в пределах всего одного стандартного отклонения от

среднего значения генеральной совокупности. Даже если мы возьмем винрейты в 0.8 и 1 ставку/час, дисперсия никуда не пропадает:

0.8 ставки:

$$R(200) = e^{-320/144} = 10.84\%$$

1 ставка:

$$R(200) = e^{-400/144} = 6.22\%$$

Таким образом, перед нами стоит серьезная дилемма. С одной стороны, мы можем принять выборочные винрейт и стандартное отклонение за достоверные оценки показателей генеральной совокупности и уже на их основе проводить все последующие расчеты. Однако реальное математическое ожидание может существенно отличаться от того, что мы наблюдаем даже на больших выборках. Так что логичнее будет сделать скидку на неопределенность при оценке ожидаемого выигрыша и рассматривать распределение возможных винрейтов, а не одно конкретное значение. Сделать это можно с помощью нормального закона, где математическое ожидание и стандартное отклонение совпадают с винрейтом и стандартным отклонением из выборки. В этом случае мы сможем использовать функцию риска банкротства в качестве характеристической функции, а предполагаемое распределение винрейтов - как соответствующую ей функцию плотности.

Самое время сделать паузу и объяснить нашу задумку более простым языком. Скажем, у нас есть некая выборка с винрейтом w . Тогда мы говорим, что можем описать кривую нормального распределения с центром в w . Для каждого w , мы можем использовать формулу риска банкротства, которую мы использовали все это время для вычислений при заранее известном винрейте. Затем мы умножим все значения этой формулы на вероятность, что это каждое из значений является нашим истинным винрейтом, и сложим их. Вполне очевидно, что этот метод дает более точные результаты, нежели гадания о реальном винрейте. Более того, подобные вычисления мы можем проводить даже на основании очень скудных данных об игре и наших результатах.

Стоит отметить, что если мы располагаем лишь небольшой выборкой (скажем, в часах), дисперсия для распределения винрейтов будет огромной, а это, в свою очередь, сильно повлияет на точность значений функции риска банкротства.

Давайте зададим параметры нашей модели.

Некий игрок обладает базой в N рук с винрейтом w и стандартным отклонением за раздачу s . Его банкролл составляет b . Таким образом, его риск банкротства для заданного винрейта составляет:

$$R(w, b) = \exp\left(\frac{-2wb}{s^2}\right)$$

$$f(x) = \exp\left(\frac{-2wb}{s^2}\right)$$

Стандартная ошибка для выборочного винрейта тогда равна:

$$\sigma_w = s/\sqrt{N}$$

Для наблюдаемой выборки (мы предполагаем ее нормальность) можно задать функцию плотности вероятности с ожиданием w и стандартным отклонением σ_w .

$$p(x) = \left(\frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}}\right) \exp\left(\frac{-(x-w)^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

Используя уравнение 22.3 получаем:

$$\langle v(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) p(x) dx$$

Это уравнение требует взятие интеграла на промежутке от $-\infty$ до $+\infty$; однако мы знаем, что формула риска банкротства для винрейтов слева от нуля всегда принимает значение равное 1. Значит, мы можем разбить этот интеграл на две части: от 0 до ∞ , где функция риска банкротства умножается на функцию плотности вероятности, плюс функция плотности, определенная на интервале от $-\infty$ до 0 (здесь мы просто получим вероятность того, что наш винрейт отрицателен).

$$\langle v(x) \rangle = \left(\frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-2xb}{s^2}\right) \exp\left(\frac{-(x-w)^2}{2\sigma_w^2}\right) + p(w < 0)$$

Последний член - самая важная особенность этой формулы. Он фактически отражает неопределенность значения истинного винрейта, а также что никакой банкролл не спасет игрока от банкротства, если он имеет отрицательное ожидание в игре. Эта вероятность, как мы покажем ниже, напрямую связана с неопределенностью параметра σ_w : чем больше дисперсия, тем больше шансы, что реальный винрейт ниже нуля. Более того, риск банкротства для положительных, но мелких винрейтов, также оказывается весьма значительным.

Также теперь можно объяснить и причину, по которой мы использовали нормальное распределение для выборки винрейтов: поскольку формулы риска банкротства и нормального распределения содержат экспоненты, мы можем упростить полученное выше уравнение!

$$\left(\frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}}\right) \int_0^\infty \exp\left(\frac{-2xb}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-(x-w)^2}{2\sigma_w^2}\right) dx + p(w < 0)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}}\right) \int_0^\infty \exp\left(\frac{-2xb}{\sigma^2} - \frac{x^2 - 2xw + w^2}{2\sigma_w^2}\right) dx + p(w < 0)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2 - 2x\left(2b\frac{\sigma_w^2}{\sigma^2} - w\right) + w^2}{2\sigma_w^2}\right) dx + p(w < 0)$$

Пусть $u = 2b\frac{\sigma_w^2}{\sigma^2} - w$, тогда:

$$\left(\frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x+u)^2 + w^2 - u^2}{2\sigma_w^2}\right) dx + p(w < 0)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-(-u))^2}{2\sigma_w^2}\right) \exp\left(-\frac{w^2 - u^2}{2\sigma_w^2}\right) dx + p(w < 0)$$

Вторая экспонента не зависит от значений x , так что мы можем вывести ее из-под знака интеграла - получим константу, умноженную на функцию нормального распределения:

$$\exp\left(-\frac{w^2 - u^2}{2\sigma_w^2}\right) \left(\frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-(-u))^2}{2\sigma_w^2}\right) dx + p(w < 0)$$

Самое время сделать паузу и немного поговорить о нормальном распределении. Как вы можете помнить, в третьей главе мы ввели следующее определение:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

Где z - нормированная z -оценка величины x .

$\Phi(z)$ называется функцией распределения и представляет собой площадь под графиком нормального распределения с ожиданием 0 и стандартным отклонением 1 слева от значения x .

Если бы границы интегрирования этой функции были от $-\infty$ до ∞ , то она была бы равна единице. Однако здесь мы рассматриваем пределы от 0 до ∞ . Это значит, что она равносильна функции распределения для z -оценки $-u/\sigma_w$, или $(w - 2b\frac{\sigma_w^2}{\sigma^2})/\sigma_w$. Значение полученной функции можно получить из соответствующих таблиц.

В итоге имеем:

$$\exp\left(-\frac{w^2 - u^2}{2\sigma_w^2}\right)(\Phi(-u/\sigma_w)) + p(w < 0)$$

$$-\frac{w^2 - u^2}{2\sigma_w^2} = -\frac{w^2 - (4b^2 \frac{\sigma_w^4}{\sigma^4} - 4bw \frac{\sigma_w^2}{\sigma^2} + w^2)}{2\sigma_w^2} = (2b^2 \frac{\sigma_w^2}{\sigma^4} - \frac{2bw}{\sigma^2})$$

$$\exp(2b^2 \frac{\sigma_w^2}{\sigma^4} - \frac{2bw}{\sigma^2})(\Phi(-u/\sigma_w)) + p(w < 0)$$

Осталось произвести последнее упрощение:

$$RoRU = R(w, b) \exp(2b^2 \frac{\sigma_w^2}{\sigma^4})(\Phi((w - 2b \frac{\sigma_w^2}{\sigma^2})/\sigma_w)) + \Phi(-w/\sigma_w) \quad (23.1)$$

Это и будет нашей формулой для расчета риска банкротства в условиях неопределенности (RoRU). Фактически, она содержит в себе 4 разных члена.

Первый - $R(w, b)$, риск банкротства при нормальном распределении для наблюдаемого винрейта. Второй - экспонента от квадрата банкролла и стандартного отклонения для винрейта и игры в целом. Третий - функция распределения, зависящая от w , банкролла b , а также стандартных отклонений для обоих распределений. Полученное произведение и будет являться взвешенным риском банкротства для игрока с положительным винрейтом. Последний член - функция распределения для отрицательных винрейтов, умноженная на риск банкротства в таком случае (он равен 1 или 100%).

Ниже вы можете найти графики с некоторыми расчетами для обычной формулы банкротства (RoR), а также формулы, учитывающей неопределенность винрейта (RoRU):

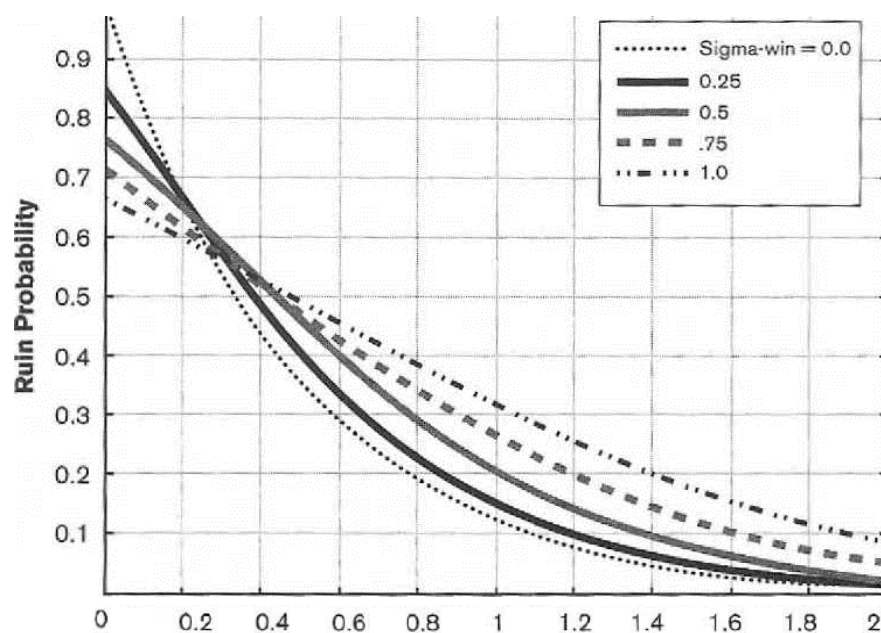


Рисунок 23.1. Риск банкротства и винрейт (банкролл: 100, отклонение 10)

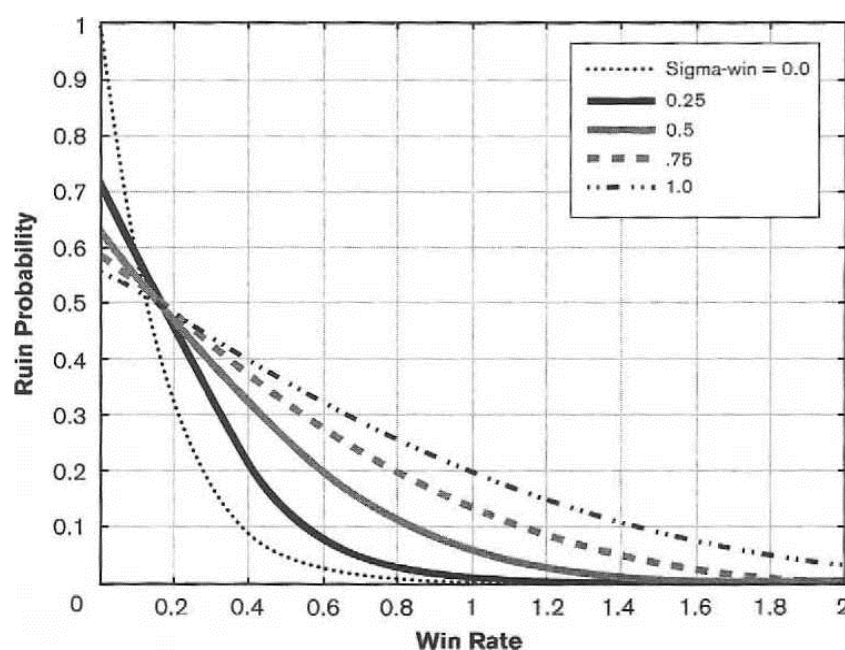


Рисунок 23.2. Риск банкротства и винрейт (банкролл: 300, отклонение 10)

Примечательно, что когда неопределенность винрейта высока (маленькая выборка), RoRU дает оценку банкротства менее 100%, даже если рассматривается минусовой игрок. Это происходит из-за ненулевой вероятности «черной полосы», которая съедает в целом положительный винрейт - а в таком случае RoR всегда будет меньше единицы.

Формула для расчета RoRU является отличным инструментом для оценки неопределенности, которая присуща винрейтам игроков, она позволяет ввести численную поправку на даунсвинг.

Конечно же, полученная формула кажется гораздо более сложной по сравнению с теми, что мы вывели в предыдущих главах. Но именно эта черта позволяет ей нивелировать склонность игроков приписывать себе более высокие винрейты и, как следствие, производить более правдоподобные прогнозы.

Несколько слов о внешних факторах

Большинство игроков переоценивают свой истинный винрейт при расчетах риска банкротства, и этому есть несколько причин.

1) Везение в начале карьеры - игроки, чей путь в покере начинается с сотни-другой выигранных долларов, с большей вероятностью вернутся за столы. И наоборот - если ваш банкролл заметно поредел уже после первой сессии, вы вряд ли снова запустите покерный клиент. И хотя в редких случаях успех в начале карьеры зависит от способности выигрывать в долгосрочной перспективе, невозможно игнорировать гигантскую роль дисперсии в оценке своих первых результатов.

Если вы посмотрите на выборку из всех игроков, вышедших в плюс после нескольких пробных сессий, большинство из них окажутся просто рыбой, которая удачно прокатилась по дисперсионной горке. Такие игроки почти наверняка будут склонны использовать исторические (и изрядно раздутые) винрейты для оценки своих навыков. Особенно ярко этот эффект выражается на примере тех, кто всерьез подумывает о карьере покерного профессионала - ведь чаще всего о такой возможности люди начинают задумываться после продолжительного апстрика, который редко отражает реальное изменение в долгосрочном винрейте.

2) Эго - покер невозможно представить без самомнения и эго. Многие игроки уже успели внушить себе мысль о превосходстве над полем и временности своих неудач. Хотя зачастую причиной является как даунстрик, так и просто низкий уровень игры.

3) Дезинформация - покерный мир перенасыщен информацией, которая льется рекой как из форумов, так и журналов, программ на телевидении и т.п. Причем никто не мешает игрокам завышать винрейты, чтобы не терять лица перед своей аудиторией, поскольку не существует реальной возможности опровергнуть их слова.

Кроме того, большинство книг о покере старательно уклоняются от ответа на вопрос о реальной оценке долгосрочного винрейта в различных играх. Вместо этого читателям предлагаются взятые из воздуха цифры наподобие «5 блайндов за 100 рук», которые никаким образом не отражают предполагаемое стандартное математическое ожидание для начинающих игроков.

4) Рост сложности игры - мы привыкли использовать статистику для того, чтобы предсказать свои будущие результаты на основании событий из прошлого. Однако игры меняются, становятся сложнее. Одни виды покера уступают место другим, более популярным, количество рыбы неуклонно сокращается, общий уровень игры растет. Все это делает статистический «взгляд в будущее» менее достоверным, чем нам бы того хотелось.

Лишь немногие из игроков, особенно из тех, кто потратил много времени на изучение и решение покера, готовы признать, что в конечном счете они едва ли способны побить рейк. Более того, не будет большой ошибкой сказать, что универсальным свойством всех игроков в покер является переоценка своих способностей.

Еще одним фактором, из-за которого расчеты риска банкротства часто уходят не в ту сторону, являются регулярные кэшауты. Как мы отметили выше, банкролл, из которого изымается большинство выигранных денег, всегда имеет оценку RoR близкую к единице.

Один из авторов этой книги является профессиональным игроком, а это значит, что у него есть расходы на ипотеку, еду, одежду и т.п. Когда мы говорим о винрейтах и банкроллах, мы подразумеваем, что все (или, по крайней мере, большая часть) выигранных нами денег оказываются у нас на руках, без каких-либо вычетов. Однако это не всегда так.

Начнем с того факта, что, скажем, в США все доходы от покера облагаются налогом по ставке 30% или больше (в зависимости от величины выигрыша). Таким образом, уже треть нашего винрейта обязана испариться, если вы не хотите коротать время в ближайшей тюрьме, а не за столами.

Далее, под термином «банкролл» следует понимать количество денег, которые мы можем позволить себе проиграть в покер за конкретным столом на конкретном лимите. Например, вы регуляр в лимитном холдеме за столами \$20-\$40 с банкроллом \$12,000 - в теории ваш банкролл составляет 300 больших ставок. Однако не стоит забывать, что даунстрик на \$6,000 вполне может заставить вас задуматься о спуске на лимит ниже (о чем мы еще поговорим в следующих главах), и в таком случае у вас останется «всего» 150 больших ставок на текущий лимит. В случае проигрыша этих денег вы не окажетесь «банкротом», поскольку ваш банкролл не пропадет полностью; но было бы крайне нелогично рассматривать перспективу потери всех \$12,000 на лимите \$20-\$40. Это значит, что ваш реальный риск банкротства будет суммой рисков проиграть определенные суммы денег на разных лимитах.

В-третьих, профессиональным игрокам в покер тоже нужно платить за еду и жилье - подобные ежедневные расходы в сумме дают мощный отток денег из банкролла, и должны рассматриваться как фактор, сдерживающий ваш винрейт.

Даже те, кто не считает себя профессионалами, редко переводят в банкролл 100% своих выигрышей за столами. Как правило, заветные блайнды из винрейта превращаются в отпуск на море, украшения или плазменные телевизоры.

Есть множество способов рационального изъятия денег из банкролла для финансирования своих текущих расходов (будь то еда или очередной Rolex), но мы предпочитаем, возможно, наиболее простой и понятный из них: платите себе определенную «зарплату» в час, но при этом не забывайте уменьшать свой винрейт аккуратно на эту же величину.

Такой подход может вызвать справедливое удивление у некоторых из наших читателей. *Как можно вычитать свои расходы из винрейта? Что если мой винрейт в точности покрывает расходы, и ничего больше не остается?*

Дело в том, что если чистый винрейт какого-либо игрока близок к нулю (или еще хуже, оказывается отрицательным), **его риск банкротства возрастает на порядок и зачастую может приближаться к 100%**. Огромное количество профессионалов уже успело убедиться в справедливости такого утверждения на своем примере. Не всегда подобная практика заканчивалась банкротством, однако любой серьезный даунсвинг вполне мог заставить их отказаться от львиной доли своей обычного дохода ввиду необходимости спуска по лимитам.

Каждый выведенный доллар уменьшает стойкость банкролла к свингам, поэтому при подсчете риска банкротства вам всегда следует руководствоваться **не винрейтом, а количеством денег, которое вливается обратно в ваш банкролл**.

Для начинающих игроков все еще сложнее. В начале этой главы мы предложили метод оценки риска банкротства в условиях неопределенности, который учитывал вероятность того, что истинный винрейт игрока мог оказаться ниже наблюдаемого. Проблема многих «любителей» заключается в том, что они начинают оценивать свой риск банкротства исходя из винрейта, который целиком превращался в банкролл.

Приведем несложный пример. Пусть наш испытуемый отыграл в казино 40.000 рук в свою любимую игру с винрейтом 2.5BB/100 и стандартным отклонением 18BB/100. Его банкролл на текущий момент составляет 300 ставок. Если мы применим обе имеющиеся в нашем распоряжении формулы риска банкротства, то получим следующее:

$$\text{RoRU} = 3.67\%$$

$$\text{RoR (простой)} = 0.98\%$$

Разница между полученными цифрами не такая уж и большая - всего 2.69%; это произошло из-за того, что его результаты оказались на дистанции трех

стандартных отклонений от нулевого винрейта. Поэтому оценка риска банкротства не сильно страдает от неопределенности.

Обрадовавшись полученной цифре, наш игрок собрался стать профессионалом и зарабатывать покером на жизнь. Он планирует выбирать из своего винрейта примерно 1BB/100 ежемесячно, чтобы кое-как обеспечивать себя и одновременно с этим пополнять банкролл. Однако это решение имеет серьезные последствия:

$$\text{RoRU} = 17.25\%$$

$$\text{RoR (простой)} = 6.22\%$$

Уменьшение реального винрейта на 1BB существенно повысило предполагаемый риск банкротства. Почему? *С таким винрейтом у нашего игрока больше шансов оказаться минусовым*, поскольку теперь он всего в двух стандартных отклонениях от нуля.

Запомните, недостаточно просто быть в плюсе. Важно постоянно наращивать свой банкролл, причем выделять на это значительно больше половины винрейта. В случае профессиональных игроков сдерживающими факторами будут расходы на жизнь, поддержание своего имиджа, поездки, турниры и т.п. Однако у профессионалов есть и возможность заработать дополнительные деньги через бэкинг или спонсорские контракты - эти потоки также следует учитывать.

Виртуальный банкролл

Все рассуждения выше служили важной подводкой к новому понятию. Давайте немного поговорим о **виртуальных банкроллах**, ведь мы никогда не играем в покер в вакууме, зачастую у нас есть доступ к различным источникам наличных, в том числе от работы в офисе или инвестиций. А это значит, что без учета подобных факторов анализ риска банкротства не может считаться полным. К примеру, игрок со сторонней зарплатой в \$300,000 в год обладает гораздо более внушительным банкроллом, нежели тот, что в данный момент находится на его счете в покерной комнате. С другой стороны, для человека без дополнительных источников средств покерный банкролл будет на вес золота.

В этой связи необходимо запомнить простое правило: факторы, влияющие на риск банкротства не симметричны. Вы можете немного переоценить свой винрейт, и это выльется в катастрофу, в то время как его же незначительная недооценка не приведет к серьезным последствиям, даже если риск покажется вам чуть выше.

Кроме того, истинная оценка вероятности потерять все деньги не заключена в одной лишь формуле. Покер - далеко не самая статичная игра. Новые рынки то появляются, то закрываются, а вместе с ними меняется и сложность поля. Свой вклад вносят и апсвинги, которые подталкивают многих игроков к неверным

решениям в отношении своих банкроллов и карьер в целом. Более того, сам по себе апсвинг является результатом неких изменений в вашем окружении и уровне игры: иногда длительных, иногда случайных. Все это должно склонить вас к мысли о том, что всегда лучше накинуть несколько лишних процентов к посчитанному риску банкротства, ведь опасность лишиться всегда банкролла не в пример серьезней, чем виртуальный выигрыш пары сотен долларов.

Нужно запомнить

- Мы часто вынуждены рассчитывать риск банкротства руководствуясь неточными оценками ключевых параметров, таких как винрейт и стандартное отклонение.
- Мы можем частично избавиться от неопределенности используя допущение о нормальном распределении нашего винрейта.
- Формула риска банкротства в условиях неопределенности выводится из основной формулы риска банкротства с поправкой на оценочный характер используемого значения винрейта. Такая модель может применяться, даже если у вас на руках нет большой выборки.
- Принимая решение о начале карьеры профессионального игрока, вы должны трезво оценить свой риск банкротства и учесть множество сторонних факторов.

Глава 24

Наращиваем банкролл: Критерий Келли и выбор столов

Хотя в начале этой книги мы сказали, что посвятим каждую страницу покерной математике, в этой главе вас ждет приятное лирическое отступление. Мы поговорим об идее, имеющей огромный вес во многих областях помимо покера - так называемом «Критерии Келли». Вы часто можете встретить его в статьях о портфельных инвестициях, блэкджеке и ставках на спорт.

В одной из первых глав мы уже упоминали достаточно широкий термин *полезность*. Здесь и далее мы будем считать, что он обозначает ценность денег с поправками на характер предложенной ситуации. Последнее, пожалуй, требует пояснения. Представьте, что вам дали выбрать между купюрой в \$20 и купюрой в \$10. Конечно же, вы выберете ту, чей номинал больше - в ваших глазах ценность (то есть субъективная полезность) двадцати долларов выше. Однако в случае с получением здесь и сейчас \$500.000 и монеткой на \$1.000.000, выбор не столь очевиден, многие бы предпочли не рисковать. Причина кроется в законе убывающей предельной полезности - пятьсот тысяч уже достаточно внушительная сумма, и еще столько же вряд ли сделают нас гораздо счастливее, особенно учитывая тот факт, что альтернативой является выигрыш нуля долларов и нуля центов.

Все это должно натолкнуть вас на мысль, что в теории мы можем вывести некую *функцию полезности*, в которой бы каждое значение банкролла x соотносилось с некой полезностью $U(x)$. Более того, эта функция была бы строго индивидуальна и обладала бы следующими свойствами:

- нелинейность - разным приращениям банкролла соответствуют разные (и далеко не линейные) приращения полезности; так, миллионер будет гораздо менее рад найденному доллару, чем человек, живущий без денег;
- непрерывность - это хоть и немного упрощенное представление (ведь деньги - величина дискретная, невозможно иметь доллар и одну миллиардную его часть, например), но в реальности оно ни на что не влияет;
- возрастает для всех значения $x > 0$; то есть мы никогда не захотим иметь банкролл меньшего размера.

Представьте, что нам предлагают ставку B . Тогда существует некое количество денег X , что полезность $U(X)$ равна полезности результата ставки, $<U(b)>$, где b означает различные исходы ставки B . Для очень маленьких сумм, значение X может оказаться очень близко к $$, поскольку полезность начинает вести себя линейно при небольших значениях переменных. Однако если мы возьмем подбрасывание монетки за миллион долларов, наверняка найдется такое значение X , которые бы отражало реальную ценность такой ставки для нас.

Примечание от переводчика: Фактически, авторы говорят о следующем. Пусть нам предлагают подкинуть монетку за миллион долларов. Орел - миллион наш, решка - ничего не получаем. Ожидание такой ставки равно \$500,000. Тем не менее, очевидно, ожидание в \$500,000 не равно полезности от получения \$500,000 наличными, так как определенный процент раз мы не получим ничего. Тогда есть некая сумма X (возможно, мы удовлетворимся и \$350,000 сразу), полезность которой бы была равна полезности от ожидаемого выигрыша такой ставки.

Критерий Келли помогает найти такую функцию полезности, которая оптимизирует темп роста банкролла. Работу этого принципа можно объяснить следующим образом. Как мы можем максимизировать свое ожидание с имеющимся банкроллом? Естественно поставив все деньги на какое-то событие, которое имеет положительное математическое ожидание. Однако если нам не повезет, и мы проиграем, на следующую ставку нам попросту не хватит денег. Значит, имеет смысл максимизировать не ожидаемый выигрыш в долларах, а функцию полезности Келли, $U(x)$ для каждой ставки - так мы сможем найти баланс между риском и наращиванием банкролла. Не вдаваясь в лишние подробности:

$$U(x) = \ln x$$

Заинтересовавшиеся читатели могут прочитать о том, почему функция полезности Келли выглядит именно так, в любой хорошей книжке о финансовой математике. Решения, максимизирующие значения заданной функции полезности удовлетворяют **критерию Келли**, или попросту следуют **стратегии Келли**. У этой стратегии есть несколько важных особенностей:

- она максимизирует среднее значение банкролла после заданного количества событий;
- она минимизирует среднее время, требуемое для достижения заданного размера банкролла;
- образует лог-нормальное распределение банкроллов (логарифмы всех возможных значений банкролла имеют нормальное распределение).

Пример 24.1

В качестве примера рассмотрим игрока, который ставит на спорт. Ему повезло открыть некую модель, которая всегда позволяет ему делать ставки с преимуществом в 3% (после учета комиссии букмекера). То есть он выигрывает 51.5% раз, а проигрывает всего 48.5%. Скажем, выплаты делаются 1 к 1. Пусть его банкролл составляет \$5000, и он может ставить любое количество денег. Какой размер ставки обеспечит нашему игроку максимально быстрый рост банкролла?

Чтобы ответить этот вопрос необходимо максимизировать функцию полезности Келли. Если наш герой ставит x долларов, то всегда будет происходить одно из двух событий: 51.5% раз его банкролл вырастет до $(5000 + x)$, а 48.5% раз его отбросит до уровня $(5000 - x)$.

$$\langle U(x) \rangle = 0.515(\ln(5000 + x)) + 0.485(\ln(5000 - x)).$$

Мы уже не раз показывали, как нужно находить максимальное значение функции в подобных случаях - достаточно лишь взять первую производную:

$$0.515/(5000 + x) - 0.485/(5000 - x) = 0$$
$$x = 150$$

Таким образом, оптимальный размер ставки с 3% перевеса фактически равен 3% банкролла нашего игрока (при условии, что все выплаты производятся из расчета 1 к 1). Очевидно, что в случае выигрыша первой ставки, в следующий раз он вложит в матч 3% от \$5150, в случае проигрыша - 3% от \$4850 и так далее.

Поскольку эта книга не задумывалась как общее пособие по азартным играм, здесь мы и закончим наш небольшой экскурс в спортивные ставки.

Ключевой идеей в этом примере является замена функции полезности вида $[\ln x]$ на ожидаемую величину банкролла. В дальнейшем это позволит нам выбирать рабочий лимит, столы и так далее - иными словами, мы сможем дать численную оценку многим вещам, которые не связаны непосредственно с игрой в карты.

Перед тем как мы пойдем дальше, необходимо сделать несколько ремарок относительно функции полезности Келли:

- У этой функции риск банкротства равен нулю, поскольку предполагается бесконечная делимость банкролла. То есть в случае проигрыша мы всегда можем выделить из наших денег ровно требуемую величину и поставить снова, то же касается и выигрыша.
- Стратегия по Келли не может быть напрямую перенесена в покер, поскольку здесь не существует бесконечного количества игр на всех возможных лимитах (например, вы никогда не найдете стол со ставками \$14.32-\$28.64).
- Логарифмическая природа функции полезности Келли предполагает несколько интересных свойств. Например, удвоение нашего банкролла «стоит» для нас столько же, сколько проигрыш половины исходного. Поэтому с уменьшением банкролла проигрыши все меньших и меньших сумм бьет по нам гораздо сильнее, чем выигрыш значительных (в монетарном выражении) сумм денег, когда наш банкролл уже достаточно раздут.

- Степень риска в этой стратегии значительно выше той, которую видят игроки на основании расчетов риска банкротства, поскольку она содержит в себе жесткое требование по смене лимитов, и очень немногие готовы пойти на это. Однако эта же особенность позволяет продолжать игру на различных ставках с относительно неглубоким банкроллом.

Здесь стоит отметить интересный факт (по крайней мере, по нашим собственным наблюдениям). Большинство игроков гораздо менее толерантны к риску, чем того требует игра в карты. Например, многие хотят, чтобы вероятность проиграть стартовый банкролл находилась в пределах 5%. Представьте себе, что бизнесмену сообщили, что его дело может прогореть лишь 5 раз из 100 - он был бы вне себя от счастья!

Конечно, тут стоит сделать оговорку, ведь вряд ли какой-то игрок сможет построить свой покерный бизнес, а затем продать его за пару миллионов. Но нам все же стоит трезво оценивать риск банкротства в сравнении с потенциальными выигрышами. Неправильный подход к этому аспекту игры заставляет излишне осторожных игроков торчать на низких лимитах месяцами, отказываясь от чуть более рискованной, но гораздо более прибыльной игры.

Стратегия Келли дает нам хороший инструмент для анализа собственного банкролла и выбора подходящих лимитов. Зачастую перед нами не простирается бесконечное поле возможностей: мы можем играть только в онлайн или в казино, куда легко попасть; доступные нам лимиты всегда ограничены, да и на них не всегда найдется хорошая игра. В результате мы нередко вынуждены выбирать всего между парой игр. Иногда наше решение будет очень простым, скажем, когда нам повезло найти стол с высоким ожидаемым выигрышем и приемлемой дисперсией. Однако чаще всего нам придется выбрать меньшее из двух зол: высокое ожидание и высокая дисперсия, либо низкое ожидание и низкая дисперсия.

В таких случаях мы можем использовать функцию полезности Келли в качестве ориентира. Естественно, только при условии, что нам доступны две разные игры, и мы не против спуска или подъема по лимитам. Это, в свою очередь, значит, что у нас есть возможность проследить, как различные варианты влияют на нашу функцию *полезности*, и таким образом решить, какая из предложенных игр наилучшим образом подходит нашему банкроллу.

Перед тем как мы начнем говорить об этой модели, давайте посмотрим на критерий Келли с точки зрения *оптимального банкролла*. Во всех примерах выше мы рассматривали некий статичный банкролл и определяли соответствующий ему оптимальный размер ставки. В то же время мы можем повернуть все формулы и в обратную сторону - это поможет нам найти оптимальный размер банкролла при фиксированном размере ставки.

Функция полезности Келли для игры с распределением исходов X имеет вид:

$$\ln(B + x) - \ln B$$

где B - размер банкролла, а x - случайная величина из распределения X .

По сути, изменение функции полезности Келли от какой-либо игры есть ни что иное как ожидаемая полезность минус значение функции до начала игры.

В качестве небольшого примера, давайте вернемся к ситуации, которую мы изучали в главе о риске банкротства. В ней мы бросаем кубик и выигрываем 1 единицу каждый раз, когда выпадает от 3 до 6, и проигрываем, если выпадает 1 или 2. Здесь размер ставки равен 1. Тогда для банкролла B мы можем выписать следующее уравнение:

$$U(B) = \frac{1}{3}(\ln(B - 1)) + \frac{2}{3}(\ln(B + 1)) - \ln B$$

Чтобы найти максимум этой функции, нам необходимо взять ее производную по B :

$$U'(B) = \frac{1}{3(B - 1)} + \frac{2}{3(B + 1)} - \frac{1}{B}$$

$$0 = \frac{B(B + 1) + 2(B - 1)(B)}{3(B - 1)(B + 1)} - \frac{1}{B}$$

$$0 = B^2 + B + 2B^2 - 2B - 3B^2 + 3$$

$$B = 3$$

Таким образом, для этой игры мы получаем оптимальный темп роста банкролла при его изначальном размере в 3 единицы.

Теперь поставим следующие условия для рассматриваемой задачи о соответствии выбираемых игр нашему банкроллу:

- у нас будут две игры: Игра 1 и Игра 2, причем первая всегда дороже;
- мы знаем свои винрейты μ_1 и μ_2 , а также стандартные отклонения σ_1 и σ_2 для рассматриваемых игр (ожидание всегда положительно, а дисперсия конечна);
- у нас есть некий ограниченный банкролл B .

Очевидно, что если бы нас заставили участвовать в одной из этих двух игр, и у нас был бы бесконечный банкролл, мы бы без колебаний выбрали Игру 1, поскольку она дороже. Для небольшого же банкролла лучше подходит Игра 2. Значит, наша модель должна предсказывать такой порог c , за которым нам следовало бы всегда выбирать более дорогую игру, и наоборот.

Для каждой игры u мы знаем некое распределение исходов X . Изменение функции полезности Келли для каждого распределения можно представить в виде:

$$U = \langle \ln(B + x) \rangle - \ln B$$

$$U = \langle \ln B(1 + x/B) \rangle - \ln B$$

$$U = \langle \ln B \rangle + \langle \ln(1 + x/B) \rangle - \ln B$$

$\langle \ln B \rangle$ является константой, получаем:

$$U = \langle \ln(1 + x/B) \rangle$$

Мы можем использовать ряд Тейлора для функции вида $\ln(1 + t)$:

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + [\dots]$$

Получим:

$$\ln\left(1 + \frac{x}{B}\right) = \frac{x}{B} - \frac{x^2}{2!B^2} + \frac{x^3}{3!B^3} - \frac{x^4}{4!B^4} + [\dots]$$

Скажем, что размер нашего банкролла, B , всегда значительно больше каждого из возможных исходов x . Тогда мы можем игнорировать члены в третьей степени и дальше, поскольку они содержат x^n в числителе и $(n!)(B^n)$ в знаменателе. В соответствии с нашим предположением о размере банкролла получается, что так мы делим очень маленькое число на очень большое, а это примерно нуль.

Мы пришли к выражению:

$$U \approx \left\langle \frac{x}{B} - \frac{x^2}{2B^2} \right\rangle$$

Как мы уже отмечали выше, $\langle x \rangle = \mu$ тогда:

$$\langle (x - \mu)^2 \rangle = \sigma^2$$

$$\langle (x^2 - 2x\mu + \mu^2) \rangle = \sigma^2$$

$$\langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \mu + \mu^2 = \sigma^2$$

$$\langle x^2 \rangle - \mu^2 = \sigma^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \mu^2 + \sigma^2$$

Подставляем соответствующие значения в формулу для U :

$$U \approx \frac{\mu}{B} - \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2B^2}$$

Порог c , который мы ищем, предполагает, что функции полезности для каждой игры равны. Для всех значений больше c мы будем выбирать игру 1, для всех значений меньше c - игру 2.

$$\frac{\mu_1}{c} - \frac{\mu_1^2 + \sigma_1^2}{2c^2} = \frac{\mu_2}{c} - \frac{\mu_2^2 + \sigma_2^2}{2c^2}$$

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sigma_1^2 = 2c\mu_2 - \mu_2^2 - \sigma_2^2$$

$$2c(\mu_1 - \mu_2) = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2$$

$$2c = \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) / (\mu_1 - \mu_2)$$

Поскольку в покере μ_1 и μ_2 обычно оказываются гораздо меньше значений дисперсии, мы можем сократить эту формулу до следующего вида:

$$c \approx \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2(\mu_1 - \mu_2)} \quad (24.1)$$

Теперь давайте рассмотрим менее абстрактный пример.

Пример 24.2

Скажем, у нас есть выбор из двух игр: \$20-40, где наш винрейт составляет \$35/час а стандартное отклонение \$400/час, и \$40-80 с винрейтом \$60/час и стандартным отклонением \$800/час.

В таком случае, мы можем посчитать порог c :

$$2c = 60 + 35 + (800^2 - 400^2) / (60 - 35)$$

$$c = \$19,295$$

Это значит, что с точки зрения теории полезности с банкроллом больше \$19,295 нам следует всегда выбирать дорогую игру.

Такая модель позволяет численно сравнивать разные варианты для игры и при этом учитывать возможный риск. Правда, формулы, выведенные выше, перестают работать при использовании таких распределений, где результаты сессий сравнимы по размеру с нашим банкроллом (в таком случае выбрасывать члены из разложения в ряд Тейлора ни в коем случае нельзя). Это обычно случается в крупных турнирах, где выплата за первое место может достигать 500 бай-инов. Но для кэш-игр рассмотренный метод почти всегда будет давать адекватные предсказания.

Нужно запомнить

- Мы редко можем использовать одно лишь математическое ожидание для выбора игры. Лучше всего для таких целей подходит теория полезности.
- Одна из наиболее известных функций полезности, которая применяется и в финансах, называется критерием Келли или $U(x) = \ln x$.
- Используя критерий Келли для сравнения двух разных игр, мы можем найти конкретные значения функции полезности для каждой из них, а затем вывести размер банкролла, который позволил бы нам сесть за более дорогой стол.

Глава 25

Инвестпокер: Портфельная теория и бэкинг

Сфера применения финансовой математики в покере далеко не ограничивается критерием Келли - в этой главе мы рассмотрим две теории, которые наверняка пригодятся самому широкому кругу игроков.

Первая касается оценки дисперсии и математического ожидания виртуального портфеля покерных игр и проектов. Как и в трейдинге, какие-то виды диверсификации окажутся хорошими, какие-то нет. В рамках обсуждения второй теории мы поговорим о бэкингových соглашениях и их математической составляющей.

Теория портфельных инвестиций

Одним из главных показателей в портфельной теории является **коэффициент Шарпа** - он считается как отношение математического ожидания к стандартному отклонению. При условии бесконечной масштабируемости инвестиций (рынок акций для большинства инвесторов вполне подходит под этот критерий) максимизация этого коэффициента дает наилучшее соотношение риска и доходности.

$$S = \frac{\mu}{\sigma} \quad (25.1)$$

Пожалуй, основным способом максимизации коэффициента Шарпа является диверсификация: покупка нескольких акций, которые в своей совокупности имеют более высокий коэффициент, чем если бы мы владели только одной из них. Ниже мы приведем пару примитивных примеров, чтобы познакомить наименее искушенных читателей с этой теорией. Люди, изучавшие портфельный анализ, наверняка заметят, что мы обходим стороной многие важные детали, однако в этом нет ничего страшного - мы постарались убрать из наших рассуждений все, что не находит применения в покере.

Представьте два независимых инвестиционных предложения А и В. У обоих ожидание по \$10 и стандартное отклонение в \$100 (на вложенные нами деньги). Иными словами, если мы поддержим проект А, то в среднем получим \$10 с отклонениями по \$100 в каждую сторону. То же самое верно и для В. Однако, если мы вложим половину наших денег в А и половину в В, то наше суммарное ожидание все еще будет равно \$10, в то время как стандартное отклонение снизится до $\$100/\sqrt{2}$, или \$70. Получается, что мы увеличили коэффициент Шарпа с 0.1 до 0.14.

Теперь посмотрим на другой портфель, пусть он состоит из инвестиций А и С с ожиданием \$5 и стандартным отклонением \$100. Очевидно, что С гораздо хуже А по абсолютным показателям, так что для максимизации коэффициента Шарпа, казалось бы, нам стоит всегда вкладывать свои деньги только в А? На самом деле нет.

Скажем, мы инвестировали 80% в А и 20% в С. Получим следующее ожидание на вложенные деньги: $(0.8) (\$10) + (0.2) (\$5)$ или \$9. Стандартное отклонение в таком случае составит $\sqrt{((80)^2 + (20)^2)} = \$82.46$. Значит, коэффициент Шарпа будет равен 0.1091, то есть выше, чем для портфеля, состоящего исключительно из А. Наилучший портфель должен быть составлен из двух вариантов, хотя С и является доминируемой инвестицией.

С тем же успехом мы можем применить эту теорию в покере. Представьте себе, что два игрока решают снизить свою дисперсию и обменяться долями в разных турнирах. Игрок А имеет ожидание 1 бай-ин со стандартным отклонением в 9 бай-инов. Игрок В в среднем также выигрывает 1 бай-ин за турнир, однако его сигма выше - 12 бай-инов. Если игрок А хочет максимизировать свой коэффициент Шарпа, какой долей от своего экшена ему следует обменяться с игроком В?

Пусть $(1 - \alpha)$ - процент от экшена, которым игроки обмениваются. Тогда игрок А создает портфель Р, в котором доля А составляет α , а доля В - $(1 - \alpha)$. Винрейт такого портфеля будет равен 1 бай-ину, поскольку все его составляющие имеют один и тот же винрейт.

Таким образом, нашей целью будет минимизация стандартного отклонения, а сделать мы это можем найдя минимальное значение дисперсии:

$$\sigma_P^2 = (9\alpha)^2 + ((1 - \alpha)12)^2$$

Возьмем производную по α и приравняем все выражение к нулю:

$$0 = 162\alpha - 288(1 - \alpha)$$

$$0 = 450\alpha - 288$$

$$\alpha = 0.64$$

Игроку А стоит обменять 36% своего экшена, чтобы максимизировать коэффициент Шарпа.

Мы можем вывести более общую формулу для таких случаев. Пусть у нас есть выбор из двух потенциальных инвестиций с ожиданием w_1 и w_2 , и сигмами σ_1 и σ_2 . Мы можем нормировать их стандартное отклонение просто умножив σ_1 на w_2/w_1 - получившуюся величину назовем s_1 . Теперь обе инвестиции будут иметь одинаковый винрейт w_2 , и мы можем составить из них портфель (в долях α_1 и α_2 соответственно) по принципу, что мы использовали выше.

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_2$$

Дисперсия портфеля Р в таком случае составит:

$$\sigma_P^2 = (\alpha_1^2)(s_1^2) + (\alpha_2^2)(\sigma_2^2)$$

Это уравнение подходит для определения дисперсии только в случае с независимыми инвестициями (то есть корреляция которых равна нулю). Однако этот аспект имеет значение по большей мере на рынке акций, в то время как в покере даже если пара игроков регистрируется в один крупный турнир, корреляция их ожиданий в любом случае оказывается ничтожной.

Поскольку $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, получим:

$$\sigma_P^2 = (\alpha_1^2)(s_1^2) + (1 - \alpha_1)^2(\sigma_2^2)$$

Возьмем производную по α_1 :

$$0 = 2 \alpha_1 s_1^2 - 2(1 - \alpha_1)^2(\sigma_2^2)$$

$$2\sigma_2^2 = 2 \alpha_1 s_1^2 + 2 \alpha_1 \sigma_2^2$$

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + s_1^2} \quad (25.2)$$

Мы также без труда можем найти α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{s_1^2}{\sigma_2^2 + s_1^2} \quad (25.3)$$

Чтобы максимизировать коэффициент Шарпа нам необходимо составить портфель именно в таких пропорциях. В финансовой математике этот подход экстраполируется на произвольное количество инвестиций. Покерным же игрокам, как правило, не нужно строить настолько сложные модели, чтобы понять, каким образом они могут уменьшить дисперсию своих результатов. И как мы уже показали выше, даже игрокам с более высоким ожиданием часто стоит меняться долями.

Те читатели, которые раньше сталкивались с подобными финансовыми расчетами, наверняка уже задумались: а нельзя ли применить в покере и другие виды диверсификации? Например, стоит ли играть в различные разновидности покера (SNG, МТТ, Лимитный покер и т.п.)? На наш взгляд, да, это того стоит. Ведь в таком случае у вас появляется дополнительное место для маневра, потенциально вы даже сможете чаще оказываться за хорошими столами, а также использовать знания и приемы, почерпнутые из новых форм покера (скажем, понимание важности блокеров в Омахе иногда может пригодиться и в Холдеме). Однако ни одна из этих причин не имеет ничего общего с вашим «портфелем»,

более того, это нельзя назвать диверсификацией.

Когда мы покупаем акцию, мы вкладываем в нее 100% наших денег и владеем ею столько, сколько захотим. Когда мы покупаем две акции, мы также можем их держать сколь угодно долго, но вкладываем в каждую лишь 50% всех средств. В то же время, если мы решаем играть в две разные формы покера, это равносильно покупке акции на короткий промежуток времени - затем мы ее продаем и покупаем другую. Поэтому такая «диверсификация» не уменьшает вашу дисперсию.

С другой стороны, играя на нескольких столах одновременно (скажем, за двумя с блайндами \$10-\$20 вместо одного \$20-\$40), вы вполне можете получить фиксированный винрейт при меньшем стандартном отклонении.

Бэкинг

Последняя тема, которую мы рассмотрим в четвертой части нашей книги, затрагивает математическую сторону бэкинга.

Бэкинг - неотделимая часть покера, поскольку имеющийся банкролл не всегда удовлетворяет желание некоторых людей играть на более высоких лимитах. В таком случае заключается соглашение следующего вида: игрок получает некую сумму денег (обычно небольшую, на одну-две сессии за раз) от бэкера и при этом обязуется садиться за строго определенные столы, а также регулярно отдавать часть своей прибыли. Все убытки, как правило, относятся на счет бэкера, однако если игрок хочет продолжать сотрудничество, то ему придется отыграть весь «минус» перед тем, как он снова сможет получать долю в выигрыше.

Для начала, давайте рассмотрим несложное бэкинговое соглашение:

- Игрок обладает известным винрейтом \$40/час и стандартным отклонением \$600/час, но у него нет банкролла;
- Бэкер соглашается предоставить все необходимые деньги на 100 часов игры. Все выигрыши они поделят поровну, а любой убыток бэкер покроет за свой счет;
- Игрок обещает, что будет стараться максимизировать совместное ожидание.

На протяжении последних двух глав мы то и дело использовали идеи и формулы из мира финансов. Тема бэкинга не станет исключением. Мы будем рассматривать описанное выше соглашение в следующем ключе: «Результат игры от бэкера мы выберем случайным образом из некоторого предварительно заданного распределения. Если значение ниже нуля - игрок не получает ничего.

Если выше - игрок получает ровно половину».

Фактически, такое определение эквивалентно **опциону**. В биржевой торговле опционом называется контракт, который дает покупателю право, но не обязанность купить (или продать) некий товар по заранее оговоренной цене в определенный момент времени в будущем. Наш игрок получает так называемый опцион на покупку (или «опцион-колл») со страйком (то есть ценой исполнения) в нуле.

Это все данные, которые нам нужны, чтобы найти ожидание от такого соглашения для игрока. Распределение исходов для всех 100 часов игры будет нормальным, с ожиданием в точке \$4,000 и стандартным отклонением в \$6,000. Ожидание игрока зависит исключительно от результата его игры и будет меняться только в случае выигрыша. Чтобы его найти, мы можем проинтегрировать произведение результата (x) и функции плотности вероятности для нормального распределения от 0 до ∞.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{(x-w)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (25.4)$$

Произведем замену следующего вида: $x = (x + w) - w$, получим:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [(x - w)e^{-\frac{(x-w)^2}{2\sigma^2}} + we^{-\frac{(x-w)^2}{2\sigma^2}}] dx$$

Мы можем разделить такое выражение на два интеграла. Во втором нам следует вынести w из-под знака интеграла, тогда оставшееся выражение есть ни что иное как функция распределения:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (x - w)e^{-\frac{(x-w)^2}{2\sigma^2}} dx + w\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right) \quad (25.5)$$

Чтобы найти первообразную для выражения $(x - w)e^{-\frac{(x-w)^2}{2\sigma^2}}$, введем замену: $u = \frac{-(x-w)^2}{2}$, $du = -(x - w) \cdot dx$. Получим:

$$\int -e^{\frac{u}{\sigma^2}} du = -\sigma^2 e^{\frac{u}{\sigma^2}} + C$$

Упростим уравнение 25.5:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (x - w)e^{-\frac{(x-w)^2}{2\sigma^2}} dx + w\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \sigma^2 e^{\frac{-(x-w)^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^\infty$$

$$< \text{Выигрыш} > = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2\sigma^2}} + w\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right) \quad (25.6)$$

Уравнение 25.6 - и есть денежная оценка опциона, то есть ожидание для игрока, если бы он получал 100% от выигрыша и не возмещал убытки. Очевидно, что для того, чтобы свести эту формулу к заданному бэкинговому соглашению, нам следует умножить ее на долю игрока в прибыли.

Мы можем найти ожидание каждой из сторон сделки.

$$w = 4000$$

$$\sigma = 6000$$

$$z = (4000/6000) = 2/3$$

$$(6000/\sqrt{2\pi})(e^{-0.22222}) + (4000) (\Phi(2/3)) = \$4,906.72$$

Поскольку мы знаем, что общее ожидание игрока должно составлять \$4,000 (если бы он забирал всю прибыль), то возможные убытки равны -\$906.72.

Значит, если ожидание игрока складывается только из половины выигрышей, то по такому бэкинговому соглашению он может получить \$2,453.36, в то время как бэксеру придется покрывать вероятные убытки из своей доли, и его ожидание составит \$1,547.64.

Примечание от переводчика: Расчеты бэкера и игрока ведутся на основании выигранных игроком денег. Ожидаемый выигрыш за 100 часов составляет \$4,000, а это значит, что в среднем сумма выплат бэксеру и игроку должна сводиться именно к этому числу. Однако бэксер вынужден покрывать вероятные убытки из своей доли. Мы можем их найти, вычтя ожидание за 100 часов из оценки опциона. Полученное число будет представлять дополнительную выгоду для игрока (поскольку он не возмещает проигранные деньги), и, в то же время, потенциальный проигрыш бэкера по ожиданию от такой сделки.

Подобная модель может быть использована для оценки любого бэкингового соглашения схожего типа. Однако мы можем пойти еще дальше и модифицировать уравнение 25.6 для случаев, когда игрок начинает получать долю от прибыли только после некоего порога α (для этого нужно взять интеграл от α до ∞).

Тогда получим:

$$\langle \text{Выигрыш} \rangle = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-a)^2}{2\sigma^2}} + w\Phi\left(\frac{w-a}{\sigma}\right) \quad (25.7)$$

Скажем, условия соглашения остаются неизменными за одним лишь исключением: игрок получает 50% от прибыли только после выигрыша \$1,000.

$$(6000/\sqrt{2\pi})(e^{-.125}) + (4000) (\Phi(1/2)) = \$4,878.24$$

Очевидно, что в таком случае доля бэкера возрастает, ведь ему больше не придется делиться прибылью с игроком на отрезке от \$0 до \$1,000.

Изменение значения порога α влечет за собой и изменения в условиях бэкинга. Представьте себе, что игрок предлагает следующее:

Вместо половины от всех выигрышей, я буду получать долю, только когда мой общий выигрыш превысит ожидаемый (о котором мы договоримся). Однако за это я должен буду получать больший процент.

Дельное предложение. Но какой процент от прибыли игрок должен попросить в таком случае?

Порог α здесь равен \$4,000:

$$(6000/\sqrt{2\pi})(e^0) + (4000) (\Phi(0)) = 4,393.65$$

Как вы можете помнить, при простом разделении прибыли 50/50, игрок получал бы \$2,453.36. Однако если он хочет получать долю только если его общий выигрыш превысит ожидаемый, ему стоит требовать как минимум 55.8%.

Другим типом бэкинг-соглашения может быть «лесенка», которая предполагает динамичную структуру расчетов:

- Игрок имеет винрейт \$20/час и стандартное отклонение \$240/час.
- Бэкер и игрок договариваются о сделке на 100 часов. Бэкер предоставляет всю необходимую сумму и покрывает все убытки. Прибыль же будет разделяться в соответствии со следующей таблицей:

Общая прибыль	Доля бэкера	Доля игрока
0 - \$1000	75%	25%
\$1000 - \$2000	60%	40%
\$2000 - \$3000	50%	50%
\$3000 - \$4000	40%	60%
\$4000 - \$6000	30%	70%
\$6000+	25%	75%

То есть, если игрок заработал \$1,500, он получит 25% от \$1,000 и 40% от оставшихся денег (в сумме \$450).

Воспользуемся уравнением 25.7, чтобы посчитать ожидание каждой стороны от подобного соглашения:

$$w = \$2,000$$

$$\sigma = \$2,400$$

Ожидание от первой ступени сделки (\$0-\$1,000) равно ожиданию от опциона с порогом в 0 минус ожидание от опциона с порогом в 1000:

$$(2400/\sqrt{2\pi})(e^{-.34722}) + (2000)(Z(5/6)) = \$2,271.93$$

$$(2400/\sqrt{2\pi})(e^{-.08681}) + (2000)(Z(5/12)) = \$2,200.93$$

Разница между ними составляет \$71 - это и будет ожиданием первой ступени. Мы можем продать то же самое для каждого случая:

Общая прибыль	Доля бэкера	Доля игрока	Ожидание	Ожидание игрока
\$0 - \$1000	75%	25%	\$71.00	\$17.75
\$1000 - \$2000	60%	40%	\$243.47	\$97.39
\$2000 - \$3000	50%	50%	\$402.69	\$201.34
\$3000 - \$4000	40%	60%	\$473.53	\$284.12
\$4000 - \$6000	30%	70%	\$746.02	\$522.84
\$60000+	25%	75%	\$334.33	\$250.74
Итого			\$2,271.93	\$1,374.19

Последний пример может послужить отправной точкой для решения, по крайней мере, одной из двух основных проблем бэкинга в целом. Первая из них состоит в несоответствии интересов игрока и интересов бэкера.

Чем ближе срок окончания бэкингвого соглашения и чем дальше игрок находится от порога выплат, тем больше у него соблазн ввязываться в дисперсионные раздачи. В качестве крайнего, но иллюстративного примера можно привести следующую ситуацию: последняя рука в рамках соглашения, игрок в минусе на \$2,000. Ему сдают QQ, и он замечает, что у его соседа по столу AA. Он может выставиться на префлопе на \$3,000, однако, очевидно, это просто ужасный сценарий развития событий для бэкера (и при обычных обстоятельствах - для игрока тоже). В то же время, в этом конкретном случае, ожидание игрока составляет 18% от его доли в \$1,000, с которой он может закончить игру, а ожидание от фолда - ноль. Получается, что его интересы разительно отличаются от интересов бэкера.

Одним из способов разрешения такого противоречия является зарплата, которая

выплачивается игроку вне зависимости от его результатов (при этом причитающаяся ему доля от выигрышей уменьшается). У такого подхода есть и недостаток: имея постоянный источник дохода, игрок может расслабиться и, как следствие, начать показывать весьма посредственный покер.

Вторая проблема заключается в *справедливом вознаграждении для обеих сторон*. И игрок и бэкер хотят заработать, так что, в идеальном случае, бэкинг-соглашение должно вознаграждать всех участников. Но как можно «честно» разделить выигрыши? Здесь стоит руководствоваться несколькими основными принципами:

- *Премия за риск для бэкера*

Бэкер берет на себя обязательство покрыть все возможные проигрыши, поэтому он обязан получить за это вознаграждение в виде более высокого процента.

- *Игроку не всегда требуется бэкинг*

Зачастую люди, которые ввязываются в такие сделки, могли бы без проблем выигрывать на низких лимитах с чуть меньшим винрейтом. И с точки зрения игрока, бэкинг-соглашение должно отражать плату за эту упущенную возможность и потраченное время (поскольку бэкер только дает деньги, но не сидит за столами целый день). Значит, игрок также может потребовать премию за «работу» на бэкера.

- *Неопределенность винрейта*

При составлении бэкинг-соглашения стороны часто используют (явно или нет) некоторые предположения о винрейте и стандартном отклонении. Однако если истинный винрейт игрока оказывается *ниже* оговоренного, ожидание от бэкинг-«опциона» для него существенно возрастает. Например, бэкер и игрок договорились о 100 часах при винрейте $w = \$20$ и отклонении $\sigma = \$200$. Реальный же винрейт оказывается на уровне $w = \$15$ при $\sigma = \$200$. Ожидание от опциона при таком винрейте получается ниже (на 19%), и игрок получает значительно больше денег, чем ему в действительности причитается.

Важно понимать, что в этой главе мы даже не затронули такие темы как риск мошенничества, когда игрок пропадает с деньгами или сообщает бэкеру недостоверные результаты. Еще одной особенностью бэкинга является тот факт, что выигрывающим игрокам не требуется постоянных денежных вливаний, поэтому основной аудиторией в этом деле являются нулевые или не очень сильные игроки, с которыми нужно заключать долгосрочные соглашения, чтобы остаться в плюсе.

Нужно запомнить

-
Покерный банкролл имеет несколько общих черт с портфелем ценных бумаг, поэтому определенные элементы портфельной теории инвестиций находят применение и в покере.
.....
- Коэффициент Шарпа позволяет выбрать инвестиции с наилучшим соотношением ожидаемого дохода и риска.
.....
- Даже сильным игрокам часто стоит меняться долями, поскольку таким образом они максимизируют свой коэффициент Шарпа и снижают дисперсию.
.....
- Бэкинговые соглашения очень похожи на опционы и могут быть оценены с помощью идентичных моделей.
.....

Глава 26

Удваиваемся: Турниры, часть 1

Самой быстро развивающейся областью покера в последние несколько лет были, несомненно, турниры. Количество их форм и видов уже не поддается исчислению - чемпионом может стать кто угодно, хоть за 1\$, хоть за \$10,000. Однако с точки зрения теории, все турниры объединяют два основных принципа:

Турнирные фишки нельзя докупать - потеря стэка равносильна вылету из турнира.

Эта особенность подразумевает определенные подстройки, нехарактерные для тех же кэш-игр. Так, чем выше ваш уровень игры, тем реже вам стоит ввязываться в пограничные раздачи, тем самым сохраняя свой стэк до более прибыльных ситуаций.

Правда, некоторые игроки принимают этот совет слишком близко к сердцу. Нельзя полностью отказываться от агрессии, если вы действительно хотите иметь «преимущество над полем», а не раздать свое ожидание всему столу в череде «незначительных» раздач. В конце концов, блайнды не будут вас ждать вечно, а чем короче стэки, тем сложнее получить существенный перевес над оппонентами.

Тем не менее, свое преимущество учитывать необходимо, и в этой главе мы постараемся разобраться в том, как его можно оценить.

Интересно, что слабые игроки должны действовать в ровно противоположном ключе - имея отрицательное ожидание от турнира, они обязаны идти на риск каждый раз, когда предоставляется такая возможность. Только так они смогут «раскачать» дисперсию и занять высокое место.

Призовой фонд выплачивается в соответствии с заранее оговоренной структурой, и порядок мест определяется не количеством имеющихся у игроков фишек, а очередностью вылетов из турнира.

В кэш-играх максимизация математического ожидания тождественна максимизации ожидания по фишкам, так как в них каждая фишка связана с неким долларовым номиналом. В турнирах, особенно на поздних стадиях, это правило не работает.

Мы не станем отрицать, что существует сильная корреляция между размером стэка и причитающимися призовыми, однако в турнирах следует различать **ожидание по фишкам** (какая часть от всех фишек в турнире окажется у вас на руках) и **ожидание по призам** (сколько эти фишки стоят сейчас).

Давайте рассмотрим простой пример. Турнир по Лимитному Холдему на 200 человек. Явных фаворитов среди участников нет. В игре остается 19 человек, руки сдаются одновременно на всех столах до первого вылета. За 10-18 места платят по \$250, за первое место - \$6.000, а общий призовой фонд составляет \$20.000. Всего в турнире 300.000 фишек, блайнды 300-600.

За одним столом оказались три игрока с очень короткими стэками. У игрока А остается всего 100 фишек и у него же баттон. У игрока В, в свою очередь, 400 фишек, он в позиции UTG. У игрока С - 500 фишек, его позиция UTG+1.

В самом начале турнира фишки всех игроков стоили бы одинаковое количество денег - по соответствующим долям в призовом фонде. Например, стэк игрока А оценивался бы в $\frac{1}{3000}$ от призового фонда в \$20.000, или \$6.67. Но в рассматриваемой нами ситуации его 100 фишек оказываются гораздо более дорогим активом. Что если он скинет свою руку на баттоне? Тогда в следующей раздаче оба его оппонента в позициях UTG окажутся на блайндах, и будут вынуждены поставить ол-ин. Пусть у каждого из них есть 40% шанс на победу в сравнении, тогда с вероятностью 84% игрок А попадет в призы.

Так что даже если мы абстрагируемся от возможности выиграть турнир, 100 фишек на баттоне в этом случае стоят как минимум \$210 - гораздо больше, чем \$6.67 в начале турнира! Структура выплат сама по себе сделала их более ценными.

И хотя может показаться, что такая ситуация достаточно экстремальна, подобные вещи случаются практически в каждом турнире. Сохранение своего места за столом всегда стоит какой-то части призового фонда. Особенно хорошо это проявляется в случае с короткими стэками, чьи места на баббле стоят дороже, чем их фишки. Кроме того, на каждой ступеньке призовой структуры игроки с небольшим количеством фишек получают дополнительный стимул играть более тайтово, чтобы заработать больше денег.

Однако этот принцип работает только до определенного момента. Дело в том, что некоторые авторы ошибочно считают такую стратегию единственно верной и распространяют ее также и на ситуации, возникающие в самом начале турнира. Аргументируют они это тем, что сильным игрокам следует стараться выжить любой ценой, в надежде попасть в призы и возможно дойти до первого места.

На наш взгляд, такой подход сжигает турнирное ожидание любого игрока, поскольку ожидание по фишкам и ожидание в турнире не сильно разнятся в самом начале игры. Более того, при высоких блайндах практически невозможно выставиться далеко впереди и компенсировать потерю в ожидании по фишкам из-за слабой и легко эксплуатируемой стратегии в начале турнира. Также из-за распространенной плоской структуры призовых, где 20-25% денег выплачиваются победителю, большая часть фонда сосредотачивается на первых трех местах, и

количество фишек у вас на руках зачастую и говорит о ваших шансах на попадание в эту зону.

Поэтому мы предлагаем придерживаться стратегии, которая учитывает влияние структуры призовых, а также подстройки, вызванные необходимостью оставаться в игре на средней и поздней стадиях. Важно понимать, что последнее - вынужденная мера только когда у вас есть реальное преимущество над полем. Причем чем дальше от денег, тем реже вы должны избегать пограничных ситуаций. С эксплуатационной точки зрения, вам следует искать оппонентов, которые не понимают перечисленные выше правила, особенно во время баббл. Такая стратегия приведет к большему количеству вылетов прямо перед деньгами, но это будет с лихвой компенсироваться более высокими призовыми местами.

В первой модели, которую мы рассмотрим ниже, нашей целью будет численная оценка влияния мастерства игрока на его желание ввязываться в пограничные ситуации на ранней стадии турнира.

Теория Даббл-апа

Многие люди склонны пропускать даже очень прибыльные ситуации в начале турнира, аргументируя это (почти всегда ошибочно) тем, что позднее им еще не раз удастся забрать гору фишек у своих оппонентов. Правда, в таком случае их преимущество над полем было бы поистине колоссальным, ведь чем дольше идет турнир, тем короче стэки, и тем менее выражено преимущество одной руки над другой.

Поэтому ниже мы постараемся описать зависимость между скиллом игрока и необходимостью отказываться от пограничных ситуаций в начале турнира. Причем нам бы хотелось найти некое численное значение, поскольку так мы сможем определять математическое ожидание от конкретных решений.

Начнем с определения ценности турнирных стэков. Модель, которую мы выведем ниже, может быть использована только в начале или середине турнира, так как предполагает отдаленность призовых мест и относительно глубокие стэки.

Давайте рассмотрим турнир, где за победу дается 100% призового фонда. В таком случае, ожидание игрока по призам прямо пропорционально размеру его стэка. Здесь стоит сделать важное замечание: *Вероятность удвоиться мы будем считать константой на протяжении всего турнира.*

Вообще на вероятность даббл-апа влияют несколько факторов. Первый - естественный отбор. Сильные игроки чаще доходят до поздних стадий турнира. Это значит, что чем дольше идет игра, тем сильнее будет ставиться поле (в среднем). А это уменьшает шансы каждого из оставшихся участников удвоиться.

Второй - рост блайндов, который постепенно сокращает шансы всех игроков на даббл-ап до 50%. Это происходит из-за сокращающегося количества раздач, где результат зависит исключительно от мастерства. В то же время на ранней стадии турнира более опытные игроки всегда найдут множество прибыльных ситуаций.

Но ни один из этих факторов не оказывает решающего влияния, так что мы вполне можем ограничиться предположением, что шансы удвоиться на протяжении турнира в целом не сильно меняются - это существенно упростит наши расчеты.

Теперь мы можем создать модель турнира, где победитель забирает все деньги. Пусть в нем участвует X одинаковых игроков, каждый из которых получает одно и то же количество фишек. Пусть E - его шанс выиграть турнир для конкретного игрока, C (константа) - шанс удвоиться, а N - количество раз, которое он должен удвоиться, чтобы выиграть.

Получаем следующее уравнение.

$$E = C^N \quad (26.1)$$

Например, если в турнир зарегистрировались 128 игроков, нам нужно удвоиться 7 раз: 1-2-4-8-16-32-64-128. Поскольку каждое из этих удвоений можно с определенными оговорками считать независимым, то шанс выиграть турнир составляет C^7 .

С помощью этой формулы мы всегда посчитаем значение неизвестного параметра, если знаем два других. Поскольку все игроки в нашем турнире (X) обладают одинаковым уровнем мастерства, то шансы на победу у них также ничем не отличаются: $E = 1/X$. Еще мы знаем, что после N удвоений рассматриваемый игрок займет первое место:

$$X=2^N$$

Тогда для хэдс-ап турнира N равно 1 ($X = 2$), а для турнира с 128 участниками N равно 7. Это можно написать и в более общем виде:

$$N = \log_2 X$$

Произведем замены в первоначальном уравнении:

$$1/X = C^{\log_2 X}$$

$$\log_2 1/X = (\log_2 X) \log_2 C$$

$$\log_2 C = -1$$

$$C = 0.5$$

Такой ответ вполне ожидаем для турнира, где все призовые отходят первому месту, а игроки имеют равные шансы на победу. Это также значит, что ценность фишек в нашем примере выражается абсолютно линейной функцией.

Мы можем использовать уравнение 26.1 и в случаях, когда участники не равны по своим навыкам. Например, пусть некий игрок А участвует в турнире на 100 человек и имеет ожидание в 1 бай-ин (2 бай-ина с учетом уже внесенного). Рассчитаем C :

$$\begin{aligned} E &= C^N \\ 2/100 &= C^{\log_2 100} \\ 0.02 &= C^{6.643856} \\ C &= 0.5550 \end{aligned}$$

Получается, что шансы игрока А удвоить свой текущий стэк до вылета из турнира составляют 55.5%. Теперь мы можем посчитать вероятность его победы для произвольного стэка S (выраженного через число стартовых стэков), подставляя соответствующие значения в формулу $E = C^N$. В таком случае N конечно же будет числом даббл-апов до 100.

При стэке в 2 начальных, шанс игрока А выиграть турнир составляет $E = C^{\log_2 50}$, или 0.0360. Заметим, что это значение немного больше, чем априорная ценность фишек (которая в нашем случае равна 0.02), но меньше, чем удвоенная вероятность выиграть турнир с самого начала.

Фактически, эта модель позволяет нам оценить премиальное ожидание в турнире с учетом *мастерства игрока, принимающего решение*. Иными словами, высказывание вида: «У меня преимущество над полем, мне надо поберечь фишки» - выливается в скорректированную вероятность победы для любого размера стэка, при условии, что соблюдаются обозначенные выше условия. Давайте посмотрим, как такая модель помогает нам увязать ожидание по фишкам и ожидание по призам.

В турнире 250 участников, стартовые стэки по 1500, блайнды 75-150. Игрок В со стэком 3000 делает рейз на баттоне до 450 с QsTs. Малый блайнд скидывает, игрок на большом блайнде делает колл. На флоп выходят Ks 8s 2s, блайнд делает чек. Префлоп рейзер ставит 500 и тут же получает олл-ин на весь свой стэк. Игрок В считает, что его эквити составляет 36%, а колл стоит 2050 фишек.

Если бы мы смотрели на эту ситуацию исключительно с позиции ожидания по фишкам, ответ был бы вполне очевидным: $(0.36) (6075) - 2050 = 137$ фишек. Легкий колл, ведь в среднем мы выиграем почти десятую часть бай-ина! Но давайте представим, что у игрока В имеется преимущество над полем в $3/4$ бай-ина в начале турнира. Тогда константа C для него примет значение:

$$1.75/250 = C^{\log_2 250}$$

$$C = 0.5364$$

Теперь мы можем рассчитать турнирное ожидание (E) для каждого из трех сценариев:

Если игрок В делает колл и выигрывает, у него будет 6075 фишек, или 4.05 стартовых стэка.

$$E = 0.5364^{\log_2 (250/4.05)} = 0.024603 \text{ бай-ина}$$

Если игрок В делает колл и проигрывает, его ожидание в турнире будет равно 0.

Если игрок В делает фолд, у него останется 2050 фишек или 1.36667 стартовых стэка.

$$E = 0.5364^{\log_2 (250/1.36667)} = 0.009269 \text{ бай-ина}$$

Тогда мы можем сказать, что ожидание игрока В от сравнения составляет $(0.024603)(0.36)$, или 0.008857 бай-ина. Получается, что колл на самом деле является неверным решением, с учетом преимущества нашего подопечного.

Еще один вывод, который можно сделать из теории даббл-апа, касается проблемы коинфлипа: какой шанс на победу оправдывает выставление 50/50 на все фишки в самой первой раздаче? Поскольку $E_0 = C^N$ в начале турнира, если вы делаете колл и удваиваетесь, ваше ожидание становится равным $E_1 = C^{N-1}$. Если вы принимаете флип с шансом на победу W , ваше ожидание превращается в WE_1 (поскольку в $(1-W)$ случаев вы вылетите из турнира с ожиданием 0). Если же вы откажетесь, то останетесь с E_0 . Приравняв эти два выражения, получим:

$$C^N = WC^{N-1}, \text{ или } W = C.$$

Таким образом, если ваш шанс победу в коинфлипе равен C , вам нет разницы, что делать (колл или фолд). Но постарайтесь вспомнить, сколько игроков вам говорили, что не хотели бы выставляться с QQ против АК (57/43) в начале турнира. Давайте посчитаем их предполагаемое ожидание в турнире на 250 человек:

$$E = C^N = (0.57)^8 = 0.01114$$

...или около 2.78 бай-ина за турнир (умножаем полученную цифру на 250). Иными словами, чтобы отказаться от такой монетки, вам нужно иметь ожидание почти в три раза больше среднего. Такой винрейт почти наверняка поставил бы вас в один ряд с лучшими игроками в мире!

Еще одним следствием рассмотренной модели является расчет ожидания для минусовых игроков. Мы искренне надеемся, все наши читатели имеют строго положительный винрейт, однако чтобы покерные турниры оставались прибыльными, кто-то должен проигрывать. По теории Даббл-апа, минусовым игрокам стоит играть на весь стэк даже в пограничных и убыточных ситуациях - удивительно, но наиболее дисперсионная стратегия является их единственным шансом выиграть турнир. Если же они будут сидеть и ждать руки, более опытные оппоненты без труда заберут у них все фишки.

Также стоит отметить несколько интересных выводов касательно мультивей банков. Вы не удивитесь, если мы скажем, что игрок, заходящий в олл-ин третьим, часто имеет очень сильную руку. Но вот что интересно: это правило становится еще более императивным с учетом структуры выплат. Представьте себе следующую ситуацию: два игрока ушли в олл-ин на флопе в большом банке, а мы должны решить, стоит ли делать оверколл или нет. В кэш-игре для нулевого колла нам бы потребовалась рука с 25% эквити. В турнире же все иначе: если мы выиграем, наши фишки будут стоять в четыре раза дороже, чем в случае фолда, ведь мы выьем сразу двух оппонентов и уменьшим количество требуемых удвоений. Поэтому если наш изначальный шанс на даббл-ап был равен, скажем, 55%, нам нужно как минимум 30.25% эквити, чтобы сделать этот колл нулевым по турнирному ожиданию.

Теперь давайте представим основную формулу этой модели в несколько ином виде. Изначально она выглядела так:

$$E = C^N$$

Пусть у нас есть некий стэк размера S (рассчитанный как часть от всех фишек в игре). Тогда число требуемых удвоений составляет:

$$N = \log_2 (1/S) = -\log_2 S$$

$$E = C^{-\log_2 S}$$

$$\ln E = (-\log_2 S)(\ln C)$$

$$\ln E = (\ln S) (-\log_2 C)$$

$$\log_5 E = -\log_2 C$$

$$E = S^{-\log_2 C}$$

Обозначим $-\log_2 C$ как B , тогда:

$$E = S^B \tag{26.2}$$

Мы получили переформулированное уравнение 26.1 с той лишь разницей, что теперь оно зависит от размера стэка. Мы можем пойти еще дальше и включить в расчеты несколько других соображений, которые могут повлиять на оценку турнирного ожидания. Например, до этого момента мы не рассматривали влияние

структуры призовых - самое время исправить этот недочет.

Представьте себе турнир на 256 игроков, где все деньги забирает победитель. Тогда ожидание одного игрока равно $(256)(C^8)$, или вероятность даббл-апа 7 раз подряд, умноженная на количество выигранных бай-инов:

$$(256)(C^8) = (2C)^8$$

Более того, мы можем модифицировать изначальное уравнение $E = C^N$ для того, чтобы выразить ожидание в призовом фонде на X бай-инов:

$$E_X = XC^N$$
$$E = (2C)^N$$

(где N - число требуемых удвоений)

Теперь давайте рассмотрим другой турнир, где призовой фонд разделен между первым, и вторым местом (равными частями по 128 бай-инов). Тогда ожидание нашего игрока равно $(128)(C^7)$, или $(2C)^7$, поскольку по достижению определенного порога, его выигрыш не изменится.

Как это значение соотносится с полученным ранее?

$$(2C)^8 > (2C)^7$$
$$C > 1/2$$

Разделение призового фонда между двумя первыми местами уменьшает ожидание игрока, если его шанс удвоиться больше $1/2$. Если подумать, то это вполне очевидный вывод - вместо того, чтобы последним удвоением выиграть 256 бай-инов, здесь он может получить всего 128. Таким образом, его шанс выиграть последнее сравнение можно просто заменить на $1/2$, поскольку оно не имеет значения.

Это также показывает, что в турнирах, где призовой фонд распределяется между многими участниками, влияние навыка на ожидание падает, ведь победитель забирает лишь небольшую часть от всех денег. В примере выше рассматриваемый игрок имел ожидаемый выигрыш на $2C$ меньше лишь из-за того, что появилось дополнительное призовое место. Согласно нашим оценкам из теории Даббл-апа, мультипликатор уровня игры здесь будет равен таковому для турнира с 128 игроками, а не с 256.

Мы называем это **реальным полем турнира** - фактически, мы даем численную оценку влиянию структуры выплат на возможность реализовать свое преимущество над остальными игроками. Можно легко показать, что для турнира на 256 игроков с двумя призовыми местами эта оценка почти совпадает с таковой

для турнира на 128 игроков, где победитель забирает все деньги. Обозначать реальное поле мы будем через коэффициент k , причем по определению, его значение должно удовлетворять следующему уравнению (при заданном распределении призовых):

$$(2C)^{\log_2 k} = E_N \quad (26.3)$$

Где C - вероятность удвоиться, а E_N - количество бай-инов, которые игрок может выиграть при заданной структуре. Тогда k будет величиной поля эквивалентного турнира (для формулы даббл-апа) с выплатой только за первое место.

Естественно, сегодня сложно найти такой турнир, где бы все призовые распределялись между первым и вторым местом поровну. Давайте рассмотрим турнир, в котором выплата за первое место составляет f от всех денег, а за второе - $(1 - f)$. Теперь формула ожидания игрока примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\text{призовой фонд})[(\text{первый приз})(p(1^{\text{ый}})) + (\text{второй приз})(p(2^{\text{ой}}))] \\ (256) & (f(C^8) + (1 - f)(C^7 - C^8)) \\ (256) & C^7 (2fC + 1 - C - f) \end{aligned}$$

Мы знаем, что для рассматриваемого плюсового игрока C окажется немного выше, чем 0.5. Скажем, его $C = 0.52$. Для обозначения разницы между наблюдаемым C и 0.5 будем использовать символ δ .

$$\delta = C - 0.5$$

Скорректируем наше уравнение (если вы раскроете все скобки, то получите в точности такое же выражение, что и выше):

$$(256) C^7 (\delta (2f - 1) + 1/2)$$

Эта формула состоит из двух основных частей:

- $(256) C^7$ - шанс нашего игрока дойти до хэдс-апа, умноженный на размер призового фонда.
- $\delta (2f - 1)$ - дополнительное ожидание, которое он получает за счет своего мастерства.

Теперь мы можем найти реальный размер поля для такого турнира.

Пусть d равно $\log_2 k$, то есть количеству даббл-апов, необходимого для победы в турнире с k участниками и призовыми только за первое место.

Тогда существует некий турнир, для которого верно следующее:

$$(2C)^d = E_N$$

В данном случае E_N равно нашей оценке ожидания (формула выше):

$$\begin{aligned}(2C)^d &= (256)C^7 (\delta (2f - 1) + 1/2) \\ (2C)^{d-7} &= 2 (\delta (2f - 1) + 1/2) \\ (d - 7)(\ln 2C) &= \ln (2 (\delta (2f - 1) + 1/2)) \\ (d - 7) &= \ln (2 (\delta (2f - 1) + 1/2)) / \ln (2C) \\ d &= \ln (2 (\delta (2f - 1) + 1/2)) / \ln (2C) + 7 \\ k &= 2^d\end{aligned}$$

Пусть f равно $154/256$, а C равно 0.52 . Тогда

$$d = \frac{\ln(2(0.02(2(\frac{154}{256} - 1) + 0.5))}{\ln 2C} + 7 \approx 7.206$$

$$k = 2^d = 147.68$$

Получается, что реальное поле рассмотренного турнира примерно на сто игроков меньше. Это значение можно использовать в формуле даббл-апов, с условием, что E необходимо умножить на соответствующее количество бай-инов (k).

Например, чтобы найти ожидание игрока с $C = 0.53$, который выиграл свои первые 4 сравнения (то есть ему нужно удвоиться еще 4 раза, чтобы выиграть), нам следует использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned}kE &= C^{\log_2 (k/S)} \\ (147.68)(E) &= (0.53)^{\log_2 (147.68/16)} \\ E &= 19.287 \text{ бай-инов}\end{aligned}$$

В качестве проверки мы можем посчитать это значение напрямую:

$$\begin{aligned}\text{Вероятность дойти до хэдс-апа: } &0.53^3 = 0.14888 \\ \text{Вероятность выиграть в хэдс-апе: } &0.53 \\ (0.14888)[(0.53)(154) + (0.47)(102)] &= 19.288 \text{ бай-инов}\end{aligned}$$

К сожалению, реальные турниры не настолько элементарны - в них нет понятия прямого удвоения, а деньги выплачиваются не только за первые два места. Однако с помощью некоторых допущений о вероятности вылететь на определенном месте, мы можем обобщить наши расчеты и найти реальный размер поля (попутно определяя необходимость подстраивать стратегию в зависимости от своего скилла) для любой структуры выплат.

Предположение:

Вероятность того, что игрок закончит турнир на месте N равна вероятности удвоить стэк до 1/N от всех фишек в турнире, минус вероятность закончить турнир на более высоком месте.

Из этого следует, что вероятность некоего игрока выиграть весь турнир равна вероятности последовательных даббл-апов до момента, когда у него окажутся все фишки. Его шанс вылететь на втором месте тогда можно определить как последовательные даббл-апы до половины всех фишек, находящихся в игре, минус вероятность победы. Такая последовательность в сумме даст на единицу - и хотя в реальном турнире игроку не обязательно иметь 1/N всех фишек, чтобы добраться до N-ого места, такое допущение позволяет получать вполне адекватные оценки.

Теперь мы можем модифицировать уравнения из теории Даббл-апа и найти реальный размер поля для любого турнира.

Ожидание игрока (в бай-инах) можно выразить следующей формулой:

$$E_N = \sum_{i=1}^x p_i v_i$$

Где p_i - вероятность занять $i^{\text{ое}}$ место, v_i - призовые за $i^{\text{ое}}$ место, а X - количество игроков в турнире.

Вероятность вылететь из турнира на любом месте равна вероятности удвоиться до нужного количества фишек минус вероятность удвоиться еще и занять более высокое место:

$$p_i = C^{\log_2(\frac{X}{i})} - C^{\log_2(\frac{X}{i-1})}$$

Пусть $N = \log_2 X$. Это число удвоений, требуемое для победы в турнире, где победитель забирает все. Подставим N в уравнение выше, тогда получим:

$$p_i = C^{N - \log_2 i} - C^{N - \log_2 (i-1)}$$

Последнее уравнение справедливо только лишь в случае, если $i > 1$; поскольку при $i = 1$, $p_i = C^N$.

Теперь давайте вернемся к вероятности занять определенное место. Введем новую переменную:

$$q_i = \sum_{i=1}^X p_i$$

Фактически, q_i есть ни что иное как «общая» вероятность вылететь в топ i ; например q_1 показывает вероятность занять первое место, q_2 - первое или второе и так далее.

Произведем подстановку, получим:

$$q_i = C^{N - \log_2 i}$$

Теперь рассмотрим структуру призовых для нашего выдуманного турнира. Пусть весь призовой фонд - P , где v_i это выплата за вылет на i^{om} месте:

$$P = \sum_{i=1}^X v_i$$

Тогда w_i будет отражать увеличение размера выплат за вылет на $i + 1^{om}$ месте:

$$w_i = \sum_{i=1}^X v_i - v_{i+1}$$

Оговоримся, что $w_X = v_X$

Кроме того, мы также знаем, что:

$$P = \sum_{i=1}^X i w_i$$

поскольку

$$\begin{aligned} \sum (i w_i) &= \sum (i(v_{i-v} - v_{i+1})) \\ &= \sum (i v_i) - \sum (i v_{(i+1)}) \\ &= \sum (i v_i) - \sum ((i-1) v_i) \\ &= \sum (v_i) = P \end{aligned}$$

Таким образом, весь призовой фонд равен количеству денег, гарантированных за вылет на i^{om} месте или выше, умноженному на количество вылетевших игроков, и просуммированному по всем значениям i .

В самом начале этого обсуждения мы написали следующую формулу:

$$E_N = \sum_{i=1}^x p_i v_i$$

Ожидание игрока равно выплате за вылет на каждом из возможных мест, умноженной на вероятность вылета, и просуммированной по всем i .

Но мы также можем переписать это уравнение следующим образом:

$$E_N = \sum_{i=1}^x q_i w_i$$

Ожидание игрока равно его шансу оказаться на любом из мест в турнире (или выше), умноженному на w_i .

Проиллюстрируем все формулы на простом примере. Пусть мы имеем дело с тремя призовыми местами: v_1 , v_2 , и v_3 . Вероятности нашего игрока попасть на них соответственно равны p_1 , p_2 , и p_3 .

Получаем:

$$q_1 = p_1$$

$$q_2 = p_1 + p_2$$

$$q_3 = p_1 + p_2 + p_3$$

Кроме того:

$$w_1 = v_1 - v_2$$

$$w_2 = v_2 - v_3$$

$$w_3 = v_3$$

Мы можем показать, что $q_1 w_1 + q_2 w_2 + q_3 w_3$ эквивалентно нашему ожиданию:

$$q_1 w_1 + q_2 w_2 + q_3 w_3$$

$$p_1(v_1 - v_2) + (p_1 + p_2)(v_2 - v_3) + (p_1 + p_2 + p_3)(v_3)$$

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3$$

Таким образом, мы получили формулу для расчета ожидания от турнира. Мы будем пытаться определить значение k , которое бы удовлетворяло следующему уравнению:

$$2N \sum_{i=1}^x q_i w_i = (2C)^D$$

где D - количество даббл-апов до k игроков, или $\log_2 k$. Здесь и далее мы будем предполагать, что w_i выражается в бай-инах, а не в долях от общего призового фонда.

$$\begin{aligned} 2N \sum_{i=1}^x C^{N-\log_2 i} w_i &= (2C)^D \\ \sum_{i=1}^x (2C)^N C^{-\log_2 i} w_i &= (2C)^D \\ \sum_{i=1}^x C^{-\log_2 i} w_i &= (2C)^{D-N} \\ \sum_{i=1}^x i(2C)^{-\log_2 i} w_i &= (2C)^{D-N} \end{aligned}$$

Интересный факт - значение k хоть и зависит от выбранного C (как вы могли убедиться в одном из примеров выше), однако оказывается практически безразличным к выбору конкретного значения, если оно находится в разумных пределах. Предположим, что наше C находится очень близко к 0.5. Пусть ε - разность между 0.5 и C , умноженная на два (значение равно 0.5 выпадает, поскольку тогда в одной из наших формул появится деление на 0).

$$\sum_{i=1}^x i(1 + \varepsilon)^{-\log_2 i} w_i = (1 + \varepsilon)(D - N)$$

Если значение ε находится очень близко к 0.5, мы можем сделать следующее приближение:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^x &= 1 + x\varepsilon. \\ \sum_{i=1}^x i w_i (1 - (\log_2 i)\varepsilon) &= (1 - (N - D)\varepsilon) \end{aligned}$$

Член $i w_i$ в сумме даст единицу, тогда получим:

$$\sum_{i=1}^x i w_i (\log_2 i) = (N - D)$$

Значение $(N - D)$ можно интерпретировать как количество удвоений, которое

«выпадает» из турнира, если мы включаем в наши расчеты некую структуру призовых. Чтобы найти реальный размер поля, мы можем разделить X на 2^{N-D}

Эту простую формулу можно использовать для любого турнира. Применительно к нашему предыдущему примеру:

$$g_1 = 154/256$$

$$g_2 = 102/256$$

$$204/256 = N - D$$

$$k = 256 / 2^{204/256} = 147.35 \text{ где } D = \log_2 k$$

Небольшое расхождение результатов вызвано тем фактом, что когда мы оценивали этот турнир в первый раз, мы выбрали значение $C = 0.52$.

Нужно запомнить

- Теория Даббл-апа позволяет оценить ожидание от наших действий на ранней и средней стадии турнира через вероятность даббл-апа и число удвоений, необходимых для победы. С помощью этой модели мы можем рассчитать необходимые подстройки в стратегии в зависимости от собственного мастерства.
- Формула $E=C^N$ связывает структуру призовых и уровень игры - чем больше призовых мест, тем меньше влияние мастерства на ожидание.
- Мы можем найти реальный размер поля (уравнение 26.3) для турнира с любой структурой призовых. Коэффициент k - это поле эквивалентного турнира, где победитель забирает все деньги.

Глава 27

Фишки не деньги: Турниры, часть 2

Теория Даббл-апа не предназначена для разбора ситуаций, возникающих на баббле или за финальным столом, однако зачастую именно в такие моменты важно знать истинную стоимость наших фишек. Возможно, нам предлагают поделить призовой фонд, или мы оказались в пограничной ситуации на баббле и сомневаемся в своем реальном ожидании.

К слову, два главных фактора, которые могут повлиять на наше ожидание (уровень игры и структура выплат), по-разному проявляют себя на разных стадиях турнира. Когда фишек еще много, а призовая зона далеко, только преимущество над полем имеет значение. Но ближе к концу турнира, когда блайнды и анте съедают значительную часть стэка каждый круг, эффект от вашего уровня игры сводится на нет и вы вынуждены все чаще оглядываться на структуру призовых. Хотя умение обращаться с коротким стэком все еще может пригодиться.

Сложно дать однозначный ответ по поводу истинной стоимости фишек и ожидания от различных решений, даже когда мы говорим об игроках примерно одинаковой силы. Для решения этой задачи предлагались самые разнообразные подходы, но в рамках нашей книги мы проанализируем лишь несколько самых популярных моделей и обсудим их недостатки.

Для начала давайте введем несколько основных понятий и определений.

Каждый из i игроков, оставшихся в турнире, имеет некий стэк S_i . Общее количество фишек в игре ($\mathcal{T}$) тогда можно записать следующим образом:

$$\mathcal{T} = \sum S_i$$

Доля стэка конкретного игрока в общем числе фишек:

$$s_i = \frac{S_i}{\mathcal{T}}$$

Очевидно, что сумма всех значений s_i будет равна 1.

Кроме того, мы будем обозначать через v_j выплату за вылет на j^{om} месте. Сумма всех выплат будет равна призовому фонду, V . **Еще не выплаченный призовой фонд** при n оставшихся игроках, мы будем обозначать как V_n :

$$V_n = \sum_{k=1}^n v_k$$

Пусть w_j - приращение призовых выплат для $j^{\text{ого}}$ места (причем $j > n$), а W_n - общий призовой фонд до $n^{\text{ого}}$ места:

$$w_j = v_j - v_n$$

$$W_n = \sum_{j=1}^n w_j = V_n - nv_n$$

Будем считать, что мы *попали в деньги*, если $v_n > 0$; то есть следующий вылетевший игрок получает долю от призовых. Это произойдет в точке n , где $v_n = 0$ но $v_{n+1} > 0$, также она называется *бабблом*.

Пусть $p_{i,j}$ - вероятность, что игрок i вылетит на месте j . Можем применить самую простую формулу для расчета ожидания от турнира:

$$\langle X_i \rangle = \sum_{j=1, N} p_{i,j} v_j$$

Большинство формул для расчета ожидания, которые мы рассматривали до сих пор, предполагали, что шанс занять первое место ($p_{i,1}$) примерно равен доле фишек у нас на руках s_i . Однако это справедливо только для ситуации, когда ни у одного из игроков нет существенного преимущества. В противном случае предпочтительнее использовать формулу из теории даббл-апа. Поэтому вместо стэков во все последующие расчеты мы будем включать переменную x_i , которая означает шанс некоего игрока i выиграть турнир, а каким методом это определить вы можете решить самостоятельно.

Формулы для расчета ожидания, как правило, принимают вероятность победы за данность и позволяют грубо оценить сопутствующие вероятности вылета на других местах.

Пропорциональный метод

Первая модель для определения вероятности занять какое-либо место в турнире достаточно распространена - это метод пропорциональной оценки через величину стэков:

$$\langle X_i \rangle = v_n + s_i W_n \tag{27.1}$$

Эта модель состоит из двух частей:

- Во-первых, каждый игрок получает минимально гарантированную выплату для определенного этапа турнира.

- Затем оставшийся призовой фонд разделяется в соответствии с размерами стэков всех игроков.

Пусть за столом осталось пять участников со стэками 25,000, 20,000, 10,000 и 5,000, в то время как структура выплат в турнире следующая: \$2,000, \$1,400, \$900 и \$700, Тогда по пропорциональному методу нам следует разделить призовой фонд так:

\$2,800 будет поровну распределено между всеми оставшимися игроками, это минимально гарантированная выплата.

Оставшиеся деньги разойдутся в следующей пропорции:

$$\text{Игрок 1: } \langle X_1 \rangle = 700 + \left(\frac{5}{12}\right)(2200) = \$1,616.67$$

$$\text{Игрок 2: } \langle X_2 \rangle = 700 + \left(\frac{1}{3}\right)(2200) = \$1,433.33$$

$$\text{Игрок 3: } \langle X_3 \rangle = 700 + \left(\frac{1}{6}\right)(2200) = \$1,066.67$$

$$\text{Игрок 4: } \langle X_4 \rangle = 700 + \left(\frac{1}{12}\right)(2200) = \$883.33$$

На первый взгляд эти цифры кажутся адекватными. Однако недостаток такой модели становится очевидным, если мы дадим первому игроку стэк в 48,000, а другим оставим всего по 4,000 фишек:

$$\text{Игрок 1: } \langle X_1 \rangle = 700 + \left(\frac{4}{5}\right)(2200) = \$2,460$$

$$\text{Игроки 2-4: } \langle X_i \rangle = 700 + \left(\frac{1}{15}\right)\{2200\} = \$846.67$$

Очевидно, что такое разделение призового фонда совсем не справедливо - один из игроков может получить больше, чем официально заявленный приз за первое место! Дело в том, что пропорциональный метод систематически отдает больше денег крупным стэкам. Чем меньше разница по фишкам, тем более точные оценки вы получите. Правда, если бы это условие не выполнялось для какой-либо модели, мы бы смело могли выкинуть ее в мусорное ведро! Ведь игроки с более-менее одинаковыми x_i должны получать одно и то же количество денег.

Причина недостатка пропорциональной модели кроется в том, что в ее основе лежит формула $p_{i,j} = s_j$ для всех j . Легко показать, что это не лучший подход к определению ожидания. Пусть наш игрок является чип-лидером, а преимущества над полем ни у кого нет. Тогда его шанс занять первое место будет выше, чем у всех остальных участников, в то время как вероятность вылететь на втором, третьем местах и так далее для него не изменится. Из этого следует, что шансы вылететь на любом месте у него составляют ns_j , а если s_j больше, чем $1/n$, то эта вероятность больше единицы, чего в принципе не может быть.

Мы можем несколько видоизменить эту формулу и поставить жесткие ограничения по сходимости общей вероятности к единице:

$$m = \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor$$

$$p_{i,j \leq m} = x_i$$

$$p_{i,m+1} = 1 - m x_i$$

Здесь выражение в квадратных скобках называется целой частью числа m - оно возвращает наибольшее целое число, которое меньше или равно $1/x_i$.

Тогда если $x_i > 0.5$, то $m = 1$, получим:

$$p_{i,1} = x_i$$

$$p_{i,2} = 1 - x_i$$

Эта оценка будет более правдоподобной для очень больших стэков. В качестве демонстрации, вернемся к рассмотренному выше примеру:

Для игрока 1, у которого на руках $5/12$ всех фишек, $m = 2$. Тогда

$$p_{i,1} = 5/12$$

$$p_{i,2} = 5/12$$

$$p_{i,3} = 1/16$$

И его доля в призовом фонде составляет:

$$\langle X_1 \rangle = 700 + (5/12)(1300) + (5/12)(700) + (1/6)(200) = \$1,566.67$$

К сожалению, в таком случае полученное ожидание для всех игроков не сходится к величине призового фонда. Поэтому эту модель стоит использовать только для приближенной оценки верхней границы ожидания чип-лидеров.

Формула Ландрума-Бернса

Следующая модель на очереди была предложена Стивеном Ландрумом и Джозефом Бернсом. Она работает следующим образом:

Сначала мы определяем шанс выиграть турнир для всех игроков. Затем мы делаем допущение, что если этого не случается, то каждый участник может занять любое из оставшихся мест с равной вероятностью.

$$\langle X_i \rangle = p_{i,1} V_1 + \sum_{k=2}^n \frac{(1-p_{i,1})}{n-1} V_k \quad (27.2)$$

Используя эту формулу, мы можем повторно оценить ожидание игроков из предыдущего примера. Стэки по 25,000, 20,000, 10,000 и 5,000, выплаты \$2,000,

\$1,400, \$900 и \$700. Формула Ландрума-Бернса даст следующий ответ:

$$\text{Игрок 1: } (5/12)(2200) + (7/36)(1400) + (7/36)(900) + (7/36)(700) = \$1,416.67$$

$$\text{Игрок 2: } (1/3)(2200) + (2/9)(1400) + (2/9)(900) + (2/9)(700) = \$1,333.33$$

$$\text{Игрок 3: } (1/6)(2200) + (5/18)(1400) + (5/18)(900) + (5/18)(700) = \$1,066.67$$

$$\text{Игрок 4: } (1/12)(2200) + (11/36)(1400) + (11/36)(900) + (11/36)(700) = \$1,083.33$$

Однако и в этом методе есть свои недостатки - мы можем их обнаружить, вновь обратившись к случаю, где у одного из игроков стэк 48,000, а у остальных по 4,000:

$$\text{Игрок 1: } (4/5)(2000) + (1/15)(1400) + (1/15)(900) + (1/15)(700) = \$1,800$$

$$\text{Игроки 2-4: } (1/15)(2000) + (14/45)(1400) + (14/45)(900) + (14/45)(700) = \$1,066.67$$

Оценка в \$1,800 выглядит более приемлемой, поскольку она хотя бы не превышает приз за первое место. В то же время игрок 1 может высказать вполне резонный протест против такого подсчета, ведь если ему не удастся выиграть турнир, то вероятность того, что он вылетит, скажем, на четвертом месте в среднем будет гораздо ниже, чем вероятность проиграть хэдс-ап за первое. Особенно если блайнды выросли настолько, что напрямую угрожают стэкам остальных игроков.

Обратную ошибку можно наблюдать и для очень мелких стэков - их шансы занять четвертое или второе место в подобной ситуации не могут быть всегда одинаковыми.

Модель Ландрума-Бернса, как правило, переоценивает ожидание коротких стэков за счет чип-лидеров. Поэтому ответы, полученные с ее помощью должны рассматриваться как нижняя граница ожидания. С другой стороны, как мы уже заметили выше, оценки в пропорциональной модели говорят о верхней границе, поэтому было бы логично предположить, что реальное ожидание находится где-то между этими двумя значениями.

Формула Мальмута-Харвилля

Этот метод похож на формулу Харвилля для скачек. Работает он так:

- Шанс занять первое место для каждого игрока равен x_i
- С помощью формулы ниже мы можем рассчитать вероятность закончить турнир на втором месте, если игрок k выиграл:

$$p(X_{i,2}|X_{k,1}) = \frac{x_i}{1 - x_k}$$

Тогда наша вероятность вылететь на втором месте равна:

$$p_{i,2} = p(X_{i,2})$$

$$p_{i,2} = \sum_{k \neq i} p(X_{i,2}|X_{k,1}) p(X_{k,1})$$

$$p_{i,2} = \sum_{i \neq k} \frac{x_i x_k}{1 - x_k}$$

Эта модель изначально применялась в ставках на бега, однако, по сути, с покером она имеет гораздо больше общего.

Если какая-то лошадь является явным фаворитом (x близок к единице), то все ее неудачные финиши будут случаться в основном из-за проблем, которые не позволяют ей занять ни второе, ни третье, ни какое-либо другое место (например, болезнь, травма, дисквалификация). Поэтому неправильно предполагать, что лошадь с 80% шансом на победу займет второе место (если ей не удастся выиграть) чаще, чем в 80% случаев. И уж тем более глупо думать, что она окажется в первой тройке 99 раз из 100.

В покере же этот эффект сводится на нет - если чип-лидер не выигрывает турнир, он все еще с хорошей вероятностью может оказаться вторым, и, в то же время, скорее всего никогда не вылетит на самом последнем месте.

Мы можем написать общую формулу для этой модели:

$$p(X_{i,j}|X_{1,1} \wedge X_{2,2} \wedge \dots \wedge X_{j-1,j-1}) = \frac{x_i}{1 - x_1 - \dots - x_{j-1}} \quad (27.3)$$

Иными словами, вероятность вылететь на $j^{\text{ом}}$ месте есть ни что иное как соотношение вероятности выиграть турнир для рассматриваемого игрока к такой вероятности для всех остальных участников. Зачастую эта формула дает более правдоподобные оценки по сравнению с пропорциональной моделью или методом Ландрума-Бернса.

Стоит, правда, отметить, что и здесь есть недостатки: если количество еще не вылетевших игроков достаточно велико, то быстрые расчеты по такой формуле становятся невозможными. Поэтому ее основной областью применения являются Sit-And-Go турниры.

Формула Мальмута-Вайцмана

Еще одна модель, описанная Мальмутом в книге «Теория азартных игр», впервые была предложена Марком Вайцманом, поэтому мы будем использовать для нее двойное обозначение авторства.

В своей книге Мальмут предпочитал использовать именно эту формулу, хотя и признавал, что она требует от читателя решать системы линейных уравнений для каждой ситуации.

Модель построена на предположении, что когда какой-то игрок вылетает из турнира, его фишки в среднем распределяются между его оппонентами поровну.

$$x_i = P(X_{i,1}) = \sum_{k \neq i} P(X_{i,1}|X_{k,n})P(X_{k,n}) = \sum_{k \neq i} (x_i + \frac{x_k}{n-1})p_{k,n}$$

Это уравнение, в свою очередь, трансформируется в систему, которую нам придется решить. Для каждого игрока у нас есть некое $p_{k,n}$ - вероятность вылететь следующим, а также сумма по всем игрокам от распределения их фишек среди оставшихся участников.

Например, если в турнире осталось четыре человека. Тогда мы получим следующие уравнения (будем использовать p_k вместо $p_{k,n}$).

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1 + \frac{x_2}{3})p_2 + (x_1 + \frac{x_3}{3})p_3 + (x_1 + \frac{x_4}{3})p_4 \\ x_2 &= (x_2 + \frac{x_1}{3})p_1 + (x_2 + \frac{x_3}{3})p_3 + (x_2 + \frac{x_4}{3})p_4 \\ x_3 &= (x_3 + \frac{x_1}{3})p_1 + (x_3 + \frac{x_2}{3})p_2 + (x_3 + \frac{x_4}{3})p_4 \\ x_4 &= (x_4 + \frac{x_1}{3})p_1 + (x_4 + \frac{x_2}{3})p_2 + (x_4 + \frac{x_3}{3})p_3 \end{aligned}$$

Здесь четыре уравнения и четыре неизвестных - такая система легко решается заменой и подстановкой переменных. Однако мы поступим несколько иначе. Дело в том, что эти уравнения принадлежат к так называемому семейству уравнений Вандермонде. Ниже мы приведем их упрощенное решение и покажем, что оно верно.

Рассматриваемую систему можно перевести в матричный вид. В таком случае, мы получим интересный результат: вероятность вылететь следующим обратно пропорциональна оставшимся у нас фишкам (или шансу на выигрыш в турнире). Пусть b - сумма всех чисел, обратных вероятности на победу:

$$b = \sum \frac{1}{x_i}$$

Тогда

$$p_{k,n} = \frac{1/x_k}{b} \tag{27.4}$$

Мы можем подставить эти выражения в исходную формулу:

$$x_i = \sum_{k \neq i} (x_i + \frac{x_k}{n-1}) p_{k,n}$$

$$x_i = \frac{1}{b} \sum_{k \neq i} (\frac{x_i}{x_k} + \frac{1}{n-1})$$

$$x_i = \frac{1}{b} \sum_{k \neq i} (\frac{x_i}{x_k} + 1)$$

$$x_i = \frac{1}{b} [x_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{x_k} + 1]$$

Сумма по $1/x_k$, для всех k сходится к $b - 1/x_i$.

Тогда имеем:

$$x_i = \frac{1}{b} (bx_i - 1 + 1) = x_i$$

Система линейных уравнений, полученная из допущений этой модели, предполагает, что шанс каждого игрока вылететь из турнира следующим обратно пропорционален вероятности выиграть весь турнир (или количеству его фишек).

Формула Мальмута-Вайцмана дает вполне хорошие предсказания и по большому счету является лучшим инструментом для сиюминутной оценки ситуации за столом. Тем не менее, следует выделить некоторые из ее недостатков.

Первый касается ситуации, когда в игре остаются несколько столов: скажем, два очень коротких стэка находятся за разными столами, причем у одного из них фишек в два раза больше, чем у другого. Очевидно, что и тот и другой могут выставиться уже на следующих блайндах. Однако такая модель предсказывает, что шансы остаться в игре у одного из коротышей ровно в два раза больше. Также спорно утверждение, что в среднем все фишки вылетевшего игрока будут поровну распределены между оставшимися участниками турнира. Но в целом, этот метод дает лучшие предсказания на баббле или на близких к нему стадиях, а также неплохо подходит для денежной оценки сделок, предлагаемых за финальным столом.

Главный вывод, который вам стоит сделать из всех этих моделей, заключается в том, что существует множество способов связать между собой ожидание по фишкам и ожидание в турнире. И поскольку моделей много, каждая из них имеет свои достоинства и недостатки, но понимание принципов их работы даст вам больше шансов принять верное решение в турнирной ситуации, будь то пограничный колл или сделка за финальным столом.

Результаты турниров и доверительные интервалы

В первой части этой книги мы обсуждали применение доверительных интервалов к оценке винрейтов, и в этом не было ничего сложного - в кэш-играх такие вычисления можно проводить по известным и совсем не сложным формулам. Почему? По сути, кэш есть ни что иное как набор отдельных исходов раздач, которые никак не связаны между собой, а такие структуры подчиняются закону больших чисел.

С другой стороны, в турнирах вычислить доверительный интервал далеко не так просто. Представьте себе некий турнир на 1000 человек, где победитель забирает весь призовой фонд. Пусть винрейты генеральной совокупности игроков находятся в пределах от -1 до +1 бай-ина за турнир. Таким образом, человек, занявший первое место, станет счастливым, испытавшим на себе эффект от попадания в событие, находящееся в 30 (!) сигмах от его математического ожидания. При этом каждый турнир с высокой долей вероятности будет иметь своего победителя. Но даже если нам удастся выиграть 10 раз подряд, более точной оценка нашего ожидания не станет.

Кроме того, в отличие от кэш-игр, где дисперсия быстро сходится на одном значении из-за характера распределения ее значений (хи-квадрат), в турнирах очень сложно получить качественную оценку меры разброса результатов. Более того, в турнирах дисперсия находится в тесной связи с винрейтом, поскольку все маловероятные события всегда дают только положительный результат (например, попадание за финальный стол), в то время как события с отрицательным результатом встречаются гораздо чаще (проигрыш одного бай-ина).

Поэтому для того, чтобы выборочное распределение сошлось к нормальному, нам придется отыграть огромное количество турниров.

На этом сложности не заканчиваются - нашим расчетам будет мешать и коэффициент асимметрии, который мы описали в главе 22:

$$S = \frac{\langle (X - \mu)^3 \rangle}{\sigma^3}$$

Для турнира на n игроков, где победитель забирает все деньги, он будет равен примерно $\sqrt{n}$, хотя в случае с нормальным распределением асимметрии не существовало бы вовсе. Как вы уже знаете, сумма коэффициентов асимметрии для n одинаковых независимых событий равна асимметрии для одного события, деленного на $\sqrt{n}$. С ростом числа сыгранных турниров выборочный коэффициент асимметрии в конечном счете сведется к нулю. Однако для того, чтобы получить оценку этого коэффициента в пределах единицы, нам нужно поучаствовать более чем в n турнирах!

Тем не менее, не следует отбрасывать эту задачу как невыполнимую. Давайте начнем с определения ожидаемого дохода от турнира:

$$\langle X \rangle = \sum p_i V_i$$

Где V_i - денежный приз за вылет на i^{om} месте. Пусть V - весь призовой фонд турнира, тогда мы можем сказать, что v_i - это часть фонда, которая выплачивается за i^{oe} место.

$$v_i = \frac{V_i}{V}$$

Скажем, в нашем турнире нет ребаев и адд-онов, тогда **размером** турнира будет отношение призового фонда к количеству игроков.

$$s = \frac{V}{n}$$

Также нам следует дать определение **стоимости** турнира b_c - это общее количество денег, которое игрок должен внести для участия. Разница между стоимостью турнира и размером турнира равна **вступительному взносу** или ϵ_b , который может быть как положительным (рейк и т.п.), так и отрицательным (гарантированный призовой фонд сверх суммы бай-инов всех игроков):

$$\epsilon_b = b_c - s$$

Например, мы собираемся участвовать в турнире \$100 + \$10 с гарантией в \$50,000. При этом только \$100 из стоимости турнира идут в призовой фонд, остальное остается у покерной комнаты. Если общий призовой фонд оказывается меньше \$50,000, комната вносит недостающую сумму. Пусть к моменту начала турнира в нем зарегистрировались 300 игроков, тогда:

$$s = \$166.67$$

$$b_c = \$110$$

$$\epsilon_b = \$56.67$$

Наше чистое ожидание от игры в турнире, w , есть разница между ожидаемым доходом и стоимостью турнира:

$$w = \langle X \rangle - b_c$$

$$w = \sum p_i V_i - s - \epsilon_b$$

Это уравнение разбирается на две части. Первая:

$$w_0 = \sum p_i V_i - s$$

Связана исключительно с нашим умением играть в покер, в то время как вторая, ε_b , никак от нашего мастерства не зависит (за исключением, может быть, селекционных навыков).

Следующее понятие, которое нам следует ввести, называется **нормированный винрейт**:

$$\begin{aligned}\omega &\equiv \frac{w_0}{s} \\ &= \sum p_i \frac{V_i}{s} - 1 \\ &= \sum (np_i) \frac{V_i}{V} - 1 \\ &= \sum (np_i - 1) v_i\end{aligned}$$

По сути, он показывает количество бай-инов (с учетом размера турнира), которые мы ожидаем выиграть в среднем.

Также нам будет интересен **нормированный выигрыш** (сколько мы выиграли в отдельном турнире с учетом его размера) Z :

$$Z = \frac{X - s}{s}$$

Причем у этой статистической переменной есть интересное свойство (оно очевидно, поскольку средний ожидаемый выигрыш в турнире и равен нашему винрейту):

$$\langle Z \rangle = \omega$$

Далее мы будем стараться определить поведение Z и на основании этой информации построим доверительные интервалы.

Заметьте, что мода (то есть наиболее часто встречающееся значение) для Z равно -1, так как чаще всего мы просто потеряем вложенный бай-ин.

Самое время начать делать предположения о том, как получить адекватную оценку Z . Например, мы можем ввести следующее правило:

$$p_i = \frac{1 + \omega}{n}$$

В этом случае мы предполагаем, что выигрыш конкретного игрока связан с его шансом вылететь из турнира на каждом из призовых мест.

Введем еще одно условие: рассматриваемый игрок может закончить турнир на любом месте с равной вероятностью. Кому-то это покажется странным, поскольку чуть выше, в части о Теории Даббл-апа, мы как раз говорили о значимости перевеса над полем и о том, как из-за этого может измениться вероятность вылета. Однако, на наш взгляд, такое допущение вполне резонно.

Как вы помните из главы 25:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \mu^2 + \sigma^2 \\ \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \mu^2 \end{aligned}$$

Для нашего случая:

$$\begin{aligned} x &= X - b_c \\ \mu &= \langle X - b_c \rangle \end{aligned}$$

Дисперсия отдельно взятого турнира тогда равна:

$$\sigma_x^2 = \langle (X - b_c)^2 \rangle - \langle X - b_c \rangle^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

$$\sigma_x^2 = \sum p_i V_i^2 - (\omega + b)^2$$

$$\sigma_x^2 = \sum \left(\frac{1 + \omega}{n} \right) (V_{V_i})^2 - (1 + \omega)^2 b^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(1 + \omega)}{n} (nb)^2 \sum v_i^2 - (1 + \omega)^2 b^2$$

$$\sigma_x^2 = \left[n \left(\sum v_i^2 \right) (1 + \omega) - (1 + \omega)^2 \right] b^2$$

Теперь мы можем получить оценку дисперсии Z:

$$\sigma_z^2 = \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2 = \frac{\sigma_x^2}{b^2} = \left(n \sum v_i^2 - 1 - \omega \right) (1 + \omega)$$

Таким образом, дисперсия Z примерно пропорциональна $1 + \omega$ для всех правдоподобных значений ω . Если посмотреть, на одну из частей этого уравнения:

$$k = n \sum v_i^2 - 1 \quad (27.5)$$

Мы обнаружим, что она ведет себя почти так же, как формула для определения реального размера поля из главы о Теории Даббл-апа. Обозначим k как **множитель турнирной дисперсии**. Используя формулу для расчета дисперсии Z , мы получим гораздо более правдоподобные значения дисперсии в турнирах, чем с помощью оценки дисперсии по наблюдаемой выборке (за исключением случаев, когда мы имеем с выборкой в десятки тысяч турниров).

Теперь представьте себе серию из независимых турниров. Пусть у нас есть соответствующие нормированные оценки Z для m турниров.

Тогда среднее от этих нормированных выигрышей ($\bar{Z}$) будет равно:

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{j=1}^m Z_j}{m}$$

Поскольку каждое значение Z_j никак не зависит от количества сыгранных турниров, можно написать следующую формулу для оценки дисперсии в выборке из m нормированных выигрышей:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \sigma_{zj}^2}{m^2} = \frac{\sum (k_j - \omega)(1 + \omega)}{m^2} = \frac{(\bar{k} - \omega)(1 + \omega)}{m} \quad (27.6)$$

Обычно ω будет значительно меньше k . Поэтому формулу 27.6 мы можем очень грубо представить в виде k/m . Тогда чтобы привести дисперсию выборки размера m к 1, количество сыгранных нами турниров должно приближаться к среднему значению множителя турнирной дисперсии. В таком случае с вероятностью 68% мы сможем утверждать, что наблюдаемый винрейт ω находится в пределах 1 бай-ина от ожидания для генеральной совокупности (истинного винрейта).

Мы можем назвать формулу 27.6 формулой **оценки дисперсии на основе винрейта**, поскольку она использует наблюдаемый винрейт и известную структуру турнира, чтобы рассчитать дисперсию.

Но в ней есть один важный изъян - дело в том, что винрейт ω как правило не гарантирует, что ваш шанс закончить турнир на каждом из призовых мест растет в прямой зависимости от ω . Действительно, некоторые игроки если и выигрывают что-то, то это обязательно происходит на поздних стадиях турнира, в то время время как другие довольствуются частыми вылетами сразу после баббл-а. Эту проблему можно решить, используя Теорию Даббл-апа, чтобы оценить частоту попадания на каждое из призовых мест, а затем посчитать дисперсию.

Причина, по которой мы не используем наблюдаемую дисперсию, кроется в недостаточном размере выборок. Если только у вас нет гигантской базы, во всех

без исключения случаях формулы выше будут давать более реалистичные предсказания. Однако когда m становится очень большим, мы можем рассчитать истинную дисперсию по-другому. Давайте попробуем воспользоваться наблюдаемым винрейтом $\hat{\omega}$ и наблюдаемой дисперсией $\widehat{\sigma^2}$, чтобы рассчитать k .

$$k = \hat{\omega} + \frac{m\widehat{\sigma^2}}{1 + \hat{\omega}}$$

Это значение k затем можно подставить в формулу подсчета дисперсии через винрейт. Такой подход окажется более точным при очень больших значениях m , поскольку выборочная дисперсия сходится к истинной быстрее, чем выборочное распределение сходится к нормальному.

Самое время остановиться и вернуться к вопросу, который мы поставили в начале этого раздела, о доверительных интервалах:

Если наш нормированный винрейт равен ω , можно ли сказать, что в рассматриваемой выборке нам везло?

Здесь у нас не получится использовать только лишь нормальное распределение, поскольку выборочное распределение не сходится на нормальном (размер выборки небольшой). Однако мы можем прибегнуть к **z-оценке** (уравнение 2.6) и через нее получить уровень значимости (надежности).

Например, с помощью этого уравнения мы проверим, укладывается ли отклонение в 2 стандартных от нашего ожидания в гипотезу о 95%:

$$z = \frac{\hat{\omega} - \omega}{\sigma(\omega)} < -2$$

Если это выражение истинно, можно сказать, что ω не удовлетворяет гипотезе 95%, ведь мы уже знаем, что рассматриваемое распределение имеет положительный коэффициент асимметрии, то есть вероятность получить событие с отрицательным результатом (которое находится на расстоянии двух сигм от ожидания) гораздо меньше предсказываемой нормальным распределением. Таким образом, мы можем сразу отсечь многие чрезмерно большие винрейты.

Однако в случае, когда $\omega > \hat{\omega}$ нам следует проявлять известную долю осторожности. Нормальное распределение использовать не получится, так как в нашем выборочном распределении (из-за его асимметрии), вероятность того, что наблюдаемый исход окажется положительным заметно больше, чем при нормальном распределении.

Мы можем прибегнуть к так называемому неравенству Чебышева:

$$P\left(\frac{\hat{\omega} - \omega}{\sigma(\omega)} = z > a\right) < \frac{1}{a^2}$$

Оно говорит о том, что вероятность получить исход, находящийся на расстоянии четырех стандартных отклонений от ожидания или больше (в любую сторону) всегда меньше $1/16$. Такая формула кому-то покажется слишком грубой, поскольку нормальное распределение оценивает вероятность возникновения таких событий в 0.00003. Однако замечательное свойство неравенства Чебышева заключается в том, что оно универсально для любого распределения, с асимметрией или без.

Давайте посмотрим на все, о чем мы успели поговорить, в разрезе гипотетического игрока Т. Скажем, наш игрок участвует в четырех \$50+\$5 турнирах в день. Два из них собирают поле в 100 человек (утренние турниры), а оставшиеся два - в 400 человек (вечерние турниры).

В утренних турнирах действует следующая структура выплат:

Место	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	30%	20%	12%	10%	8%	6%	5.5%	4.5%	4%

То же самое, но для вечерних турниров:

Место	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-18	19-27
%	27.5%	17.5%	11.6%	8%	6%	4.5%	3.5%	2.6%	1.7%	1.2%	0.7%

Игрок Т следует своей рутине на протяжении 200 дней. В результате, у него есть выборка из 400 утренних и 400 вечерних турниров.

Таблицы ниже отражают результаты нашего подопытного для каждой категории:

Утренние турниры:

Место	Число событий	Выигрыш	Прибыль	Итого
1ое	11	30	29	319
2ое	7	20	19	133
3ье	5	12	11	55
4ое	3	10	9	27
5ое	8	8	7	56
6ое	4	6	5	20
7ое	7	5.5	4.5	31.5
8ое	2	4.5	3.5	7
9ое	5	4	3	15
Вне денег	348	0	-1	-348
Итого	400			315.5

Получается, что игрок Т попадает в деньги на утренних турнирах $\frac{52}{400}$, или 13% раз. Его общий винрейт составляет 0.79 бай-инов за турнир.

Вечерние турниры:

Место	Число событий	Выигрыш	Прибыль	Итого
1ое	4	110	109	436
2ое	2	70	69	138
3ье	2	46.4	45.4	90.8
4ое	0	32	31	0
5ое	2	24	23	46
6ое	4	18	17	68
7ое	1	14	13	13
8ое	0	10.4	9.4	0
9ое	2	6.8	5.8	11.6
10ое - 18ое	14	4.8	3.8	53.2
19ое - 27ое	20	2.8	1.8	36
Вне денег	349	0	-1	-349
Итого	400			543.6

Вечером он также попадает в деньги примерно в 13% случаев, однако винрейт увеличился - до 1.36 бай-ина за игру.

Получаем, что при 800 отыгранных турнирах его средний винрейт равен 1.07 бай-ина. Это дает нам следующие значения для переменных, которые мы обсуждали выше:

$$\omega = 1.07$$

$$m = 800$$

$$\bar{z} = 1.07$$

$$k = n \sum v_i^2 - 1$$

Для утренних турниров:

$$k = 100 ((0.30)^2 + (0.20)^2 + \dots + (0.04)^2) - 1 = 16.105$$

Для вечерних турниров

$$k = 400 ((0.275)^2 + (0.175)^2 + \dots + (0.007)^2) - 1 = 53.6456$$

Среднее значение:

$$\bar{k} = 34.875$$

Тогда дисперсия для выборки из 800 турниров, с оговоренным разделением на утренние и вечерние, равна:

$$\sigma^2 = \frac{(\bar{k} - \omega)(1 + \omega)}{m} = \frac{(34.875 - 1.07)(1 + 1.07)}{800} = 0.0876$$

Или стандартное отклонение в 0.296 бай-инов за выборку в 800 событий.

Если же мы посчитаем дисперсию для наблюдаемой выборки, то она составит 0.3468 байн-ина - такая разница обусловлена повышенным количеством первых мест в результатах рассматриваемого игрока. Кто-то может заметить, что этот факт вполне способен существенно изменить форму распределения. Мы же отметим следующее.

Во-первых, некоторые игроки действительно чаще занимают высокие места, однако на генеральную совокупность их результатов это не оказывает заметного влияния. И самое главное - все данные для игрока Т были сгенерированы случайным образом, так что можно с уверенностью утверждать, что его шансы оказаться на любом месте были абсолютно одинаковы. Этот пример еще раз показывает, что в турнирах всегда есть вероятность оказаться одураченным случайностью, особенно когда дело касается небольших выборок.

Если мы применим нормальное распределение к выборочному винрейту, то 95%-ый доверительный интервал будет выглядеть так: [0.3802, 1.7675]. Очевидно, что его верхняя граница не совсем адекватна - как мы уже говорили, рассматриваемое распределение асимметрично, поэтому шанс того, что истинное математическое ожидание нашего игрока превышает 1.7675 и ему просто не повезло, на самом деле ниже, чем предсказываемый нормальным распределением. С нижней границей тоже есть определенные проблемы - нормальное распределение снова не очень подходит для подобных оценок, опять

же из-за наблюдаемой положительной асимметрии, ведь тогда вполне может быть, что в выборке мы просто столкнулись со случайным «доездом» при общем отрицательном винрейте.

Формула оценки дисперсии на основе винрейта предсказывает более щадящую дисперсию для нашего игрока. Для двух сигм интервал значений будет выглядеть так: [0.481; 1.666] - верхняя граница все еще завышена, и гипотеза о 95% достоверности окажется ложной. Однако по неравенству Чебышева шанс того, что реальный винрейт игрока T выпадет за пределы двух стандартных отклонений от выборочного (то есть будет ниже 0.481) на самом деле не больше 25%.

Нужно запомнить

- Связать ожидание по фишкам и турнирное ожидание можно через несколько разных моделей, каждая из которых имеет свои недостатки.
- Формула Ландрума-Бернса и Пропорциональная модель дают очень грубые оценки, однако их легко применять непосредственно за столом. А поскольку ошибки в этих методах расходятся в противоположные стороны, вместе они предсказывают диапазон значений для истинного ожидания.
- Доверительные интервалы для турнирного ожидания не так просто посчитать из-за значительной асимметрии генеральной совокупности и корреляции между дисперсией в турнирах и винрейтом.

Глава 28

Не забываем о покере: Турниры, часть 3

С точки зрения теории игр, турниры имеют одну уникальную особенность, которая оказывает заметное влияние на стратегию - каждый следующий вылет увеличивает ожидание всех оставшихся участников.

Это значит, что в турнирах каждая раздача имеет значение для всех игроков, например, хэдс-ап банки перестают быть играми с нулевой суммой, как в остальных формах покера, а в олл-инах оба участника теряют часть своего ожидания. Причем величина таких потерь может быть как незначительной (в первой раздаче турнира), так и невосполнимой (на баббле в супер-саттелите). Наиболее очевидным этот эффект становится в ситуации, когда один из игроков делает не оупен-рейз, а сразу ставит олл-ин на префлопе.

В кэш-игре мы бы смогли уравнивать такой олл-ин с любой рукой, имеющей достаточное количество эквити. Иными словами, наш диапазон колла будет как правило уже, чем диапазон пуша. Например, против {55+, A9+, KJ+} такой неплохой стартер как AJo стоит лишь на 42.8%.

В турнирах же делать колла еще сложнее - помимо эквити нашей руки нам также необходимо задуматься об ожидании, которое можно потерять. Если стэк оппонента совсем небольшой, то мы жертвуем лишь маленькой его долей (поскольку наверняка останемся в турнире, но с меньшим шансом пробиться выше), и наоборот - если нам нужно самим поставить в центр все фишки, то такой олл-ин может оказаться чрезмерно дорогим даже для очень хорошей руки.

В этой связи можно вспомнить распространенный пример из теории игр - называется он «Игра в слабо». Два водителя разгоняются и на большой скорости едут на встречу друг другу. Каждый из них может свернуть и таким образом избежать столкновения. Если им обоим «слабо», то ни один из водителей ничего не теряет, однако если они решат идти до конца, то оба погибнут при столкновении. В случае же когда только один из водителей свернет с дороги, другой назовет его трусом и выиграет одно очко за то, что сам не потерял лицо.

Пример 28.1 - Игра в слабо

Матрица выплат для такой игры выглядит следующим образом:

Игрок А	Игрок В	
	Идти до конца	Свернуть
Идти до конца	(-10, -10)	(1, -1)
Свернуть	(-1, 1)	(0, 0)

Вы, наверное, уже заметили, что это не игра с нулевой суммой, а значит, и однозначного оптимального решения у нее нет. В реальности мы можем найти три точки равновесия, в которых ни один из участников не может в одностороннем порядке улучшить свое ожидание. Чаще всего при решении этой игры говорят о точке, где каждый водитель применяет смешанную стратегию с целью сделать оппонента безразличным к выбору действия. Однако две оставшиеся точки очень хорошо подходят к описанию покерных ситуаций: в одной из них игрок А идет до конца, а игрок В сворачивает (здесь игрок В никак не может улучшить свое ожидание), в другой же игрок В идет до конца, а его оппонент сворачивает.

Представьте себе следующую ситуацию: все скидывают свои карты, игрок А (на позиции малого блайнда) может решить «идти до конца» (то есть поставить олл-ин). Тогда лучшей стратегией игрока В (большой блайнд) будет «свернуть», то есть сделать фолд. Здесь стоит отметить, что в покере, естественно, потери от колла такого олл-ина вряд ли в десять раз превысят отданный блайнд. Кроме того иногда у игрока В окажется настолько сильная рука, что он сможет попросту игнорировать любые негативные последствия от своего колла. Однако основная идея остается неизменной: если в какой-либо ситуации вы можете свести розыгрыш к такой игре в «слабо» (пуш или фолд), это и будет оптимальной стратегией для вас. Иными словами, даже поставив олл-ин с чуть более лузовым диапазоном, вы все равно можете не бояться эксплуатации со стороны оппонента.

Игра на баббле

Стадия баббля, особенно в крупных многостоловых турнирах, является идеальной возможностью для эксплуатации излишне скованной игры ваших оппонентов. Многие игроки придают попаданию в деньги слишком большое эмоциональное значение, и это заставляет их играть гораздо меньше рук каждый раз, когда они оказываются у призовой зоны или у следующей ступеньки выплат.

Первая стратегия, которая приходит на ум - либеральные рейзы из поздних позиций. Кстати, именно по этой причине мы отмечали, что хорошие игроки, как правило, вылетают вне призовой зоны, но компенсируют это финишами на более высоких местах - они стараются играть максимально лузово на баббле, и иногда это приводит к потере всех фишек (хотя в случае успеха такой стратегии их стэк значительно увеличивается).

С другой стороны, есть достаточно много ситуаций, где тайтовая игра наоборот будет более предпочтительной: в супер-саттелитах, а также когда шаг призовых становится очень большим. Скажем, мы играем в одностоловом SNG-турнире с десятью участниками и структурой выплат 5-3-2. Скачок от нуля (на четвертом месте) до двух бай-инов (на третьем) на самом деле является вполне веской причиной, чтобы сузить свои диапазоны (особенно для колла олл-ина), поскольку

попадание в призы принесет вам в два раза больше денег, чем вы потратили на турнир.

Пример 28.2

Давайте рассмотрим стратегию на баббле на еще одном примере (SNG-турнир):

В игре остаются 4 участника, у каждого по 2,500 фишек. Выплаты происходят по структуре 5-3-2, блайнды 200-400. UTG и BTN скидывают свои карты, малый блайнд идет в олл-ин. Сколько эквити должно быть у руки большого блайнда, чтобы он смог уравнивать? Мы можем решить эту задачу, прикинув денежное ожидание от каждого из возможных исходов. Все значения, использованные ниже, являются грубыми прикидками, так как при коротких стэках сложно сказать, кто из оставшихся игроков вылетит следующим.

Случай 1: Большой блайнд делает колл и получает стэк в 5000 фишек. Тогда его турнирное ожидание будет равно как минимум 50% от 5 бай-инов за первое место, плюс еще 50% от среднего между 3 и 2 бай-инами за второе и третье места соответственно. Для простоты будем считать, что у него будет 50% от 2.5 бай-инов. Его общее ожидание составит 3.75 бай-ина.

Случай 2: Большой блайнд делает колл и проигрывает. В таком случае он вылетает из турнира до призов.

Случай 3: Большой блайнд делает фолд, остается со стэком в 2100 фишек, а в следующей раздаче попадает на малый блайнд. Его турнирное ожидание становится равно 21% от первого места, 29% от вылета на четвертом месте (то есть от нуля) и 50% от вылета на втором или третьем месте. Всего около 2.3 бай-инов.

Таким образом, для колла ему нужно выигрывать $X\%$ раз, причем должно выполняться следующее неравенство: $3.75X > 2.3$. Получаем X равный 61.33%.

Это гораздо больше эквити, требуемое для колла по фишкам:

$$\begin{aligned}(X)5000 - 2100 &= 0 \\ X &= 42\%\end{aligned}$$

Получается, что на баббле нам стоит играть гораздо более тайтово.

Однако подстройки на баббле могут оказаться не столь очевидными. Чтобы упростить себе жизнь за столом мы часто используем следующий метод. Представьте, что вы играете на баббле в \$100+9 турнире на 500 человек, в игре 500,000 фишек. На 50^{ом} месте выплата составляет \$120. Тогда наше ожидание от того, что мы кого-то пересидим и окажемся в деньгах (то есть на одно место

выше) составляет примерно 1200 фишек.

Примечание от переводчика: Авторы нашли ожидание в 1200 фишек следующим образом. В турнире 500 игроков и 500,000 фишек, соответственно, каждая 1000 фишек стоит \$100 (при бай-ине \$100). Соответственно, \$120 стоят около 1200 фишек.

Тогда каждый раз, когда мы ставим олл-ин, нам следует иметь ввиду возможную потерю в ожидании, которая выражается как раз в 1200 фишек (или \$120, которые мы не получим в случае проигрыша). Правда, как правило, такая подстройка не приводит к существенным изменениям в стратегии. Ведь наш пуш сначала кто-то должен уравнивать, и только затем у нас будет шанс проиграть сравнение (скажем, первое случается 25% раз, а второе - 65% раз, то есть всего мы потеряем 16% от 1200, или около 200 фишек). Однако если в деньгах только 10 мест, и выплаты начинаются с \$1200, то этот метод вполне может уберечь вас от плохого колла.

Шут-ауты и SNG-саттелиты

Мы объединили эти турниры в одну группу, поскольку они имеют похожую структуру: один стол, игра продолжается до момента, пока у одного участника не окажутся все фишки. Затем он либо забирает себе все деньги, либо переходит за следующий стол, где предусмотрена некая структура выплат. В любом случае, ключевой особенностью таких турниров является отсутствие шага призовых, а это значит, что в них следует ориентироваться только на ожидание по фишкам.

Иногда игрок, вылетевший вторым, получает какой-то символический приз, однако его размер никаким существенным образом не повлияет на вашу стратегию.

Интересно, что в таких турнирах опытные игроки получают больше шансов для реализации своего преимущества, так как рано или поздно все сводится к игре за коротким столом. В одностоловых саттелитах сделки, как правило, обговариваются только на стадии хэдс-апа (или чуть раньше, когда в игре остаются трое) - в таком случае при равном уровне игры всех заинтересованных игроков, размер вашего стэка и будет определять долю призового фонда, который вам причитается.

Хэдс-ап турниры

Этот формат турниров стремительно набирает обороты - здесь все матчи играют в формате хэдс-ап, каждый за своим столом. С ходу можно сказать, что ни о каком сохранении фишек и глубоких финишах не может быть и речи. Задача одна

- выиграть, матч за матчем.

Стоит отметить, что если в хэдс-апе у одного из игроков оказался глубокий стэк, а у другого почти не осталось фишек, то в разрезе ожидания эта ситуация эквивалентна игре в матче, где оба участника играют с короткими стэками. Это значит, что чип-лидеру стоит просто игнорировать свой перевес по фишкам и считать, что его стэк равен стэку оппонента (за исключением случаев когда он играет значительно лучше).

Еще одна интересная концепция (о которой говорил Дэвид Склански в своей книге об игре в турнирах) - в хэдс-ап турнире, где блайнды уже выросли на пару уровней, ни у одного из игроков не может быть значительного преимущества. Более того, даже если оно есть, более слабый оппонент может просто ставить в вас олл-ин каждую раздачу, и вы ничего не сможете с этим сделать. В то же время в Лимитном Холдеме сильный игрок почти всегда сможет реализовать свой перевес.

Одностоловые SNG-турниры

Казалось бы, такие турниры целиком и полностью переключались в онлайн, однако последнее время они стали возвращаться в «реальные» покерные комнаты. Как правило, в этом формате играют турниры по Безлимитному Холдему (остальные виды покера также возможны, однако они встречаются исключительно редко) с выплатами в 50% от всех денег за первое место, 30% за второе, и 20% за третье.

SNG-турниры предполагают достаточно агрессивную подстройку под различные стадии игры, особенно это касается баббл, где происходит скачок призовых с нуля до 20%. Давайте рассмотрим несколько ситуаций и поговорим о том, какая динамика может возникнуть между глубокими и короткими стэками на баббле.

Один большой стэк, много мелких: (5500/1500/1500/1500, блайнды 150-300)

Здесь у большого стэка есть ощутимое преимущество, которое он вряд ли потеряет, если распределение фишек останется примерно таким же. Он мог бы ставить олл-ин в каждой раздаче, вынуждая своих оппонентов совершать ошибки - маловероятно, что они смогут на лету оценить требуемое эквити для колла на баббле.

Пусть игрок со стэком 5500 делает пуш, все скидывают, а игрок на большом блайнде должен принять решение о колле с некой рукой. Его турнирное ожидание в таком случае будет равно:

Колл, проигранный олл-ин (вылет из турнира): 0 бай-инов

Колл, выигранный олл-ин: $(30\%)(5) + (40\%)(3) + (25\%)(2) + (5\%)(0) = 3.2$ бай-ина

Фолд: $(10\%)(5) + (30\%)(3) + (30\%)(2) + (30\%)(0) = 2$ бай-ина

Таким образом, ему нужно 2/3.2 бай-ина или 62.5% эквити против случайной руки (если большой стэк действительно так играет с любыми двумя), чтобы уравнивать в этой раздаче. Если же говорить на языке диапазонов, то большой блайнд должен делать колл с {66+, A9s+, AT+, KJs+}, или около 7% от всех стартовых рук.

Четыре одинаковых стэка: (2500/2500/2500/2500, блайнды 200-400)

Мы вновь возвращаемся к идее, озвученной в начале этой главы: любой олл-ин отнимает некоторое количество турнирного ожидания у каждого из участвующих в нем игроков, особенно при значительной разнице в призовых.

Скажем, игрок на позиции UTG ставит олл-ин, даже не взглянув на свои карты.

Тогда каждый из трех оставшихся игроков вынужден принять решение со следующим ожиданием:

Колл, проигранный олл-ин (вылет из турнира): 0 бай-инов

Колл, выигранный олл-ин: $(50\%)(5) + (30\%)(3) + (20\%)(2) = 3.8$ бай-ина

Фолд: $(25\%)(5) + (25\%)(3) + (25\%)(2) + (25\%)(0) = 2.5$ бай-ина

Получаем чуть более высокое эквити, требуемое для колла - 65.8%. Это ограничивает диапазон любого из игроков, сидящих за UTG, до {77+, AJs+}, то есть около 5% рук. Заметьте, что АКо в таком случае должны отправиться в пас (у них нет 65.8% на победу против случайной руки).

Если же три оставшихся игрока будут уравнивать такой олл-ин лишь в 5% случаев (исключая ничтожный процент оверколлов), UTG будет просто забирать из банка 600 фишек настолько часто, что может не волноваться о возможном выставлении с 25% эквити.

Очевидно, что здесь мы имеем дело с разновидностью игры в «слабо»: первый игрок объявляет, что сворачивать не будет, в то время как остальные вынуждены рисковать «столкновением», то есть своим вылетом из турнира.

Доминанция: (6000/2500/750/750, блайнды 200-400)

Третий тип ситуаций: один очень большой стэк, один поменьше и два очень коротких. Здесь игрок с 6000 фишек должен ставить олл-ин с любой рукой. Дело в том, что его оппонент со стэком в 2500 попросту не может позволить себе сделать колл, когда в игре остаются несколько коротышей, которые наверняка

вылетят через пару раздач. С другой стороны, доминирующий стэк вполне может оставить их в покое, поскольку пока они находятся за столом, он может красть фишки у среднего стэка без какого-либо сопротивления.

Это лишь некоторые из ситуаций, с которыми вы можете столкнуться в SNG-турнирах на баббле, однако все они объединены общей идеей: из-за большого скачка в призовых между третьим и четвертым местом, стратегия для больших стэков становится очень лузовой.

Суперсаттелиты

Суперсаттелиты - это, возможно, единственный способ для новичков и игроков с микролимитами попасть на дорогие турниры. Отличительной чертой здесь является структура призовых: как правило, денежные выплаты не предусмотрены, а весь фонд разделен на некоторое количество одинаковых турнирных пакетов (иными словами, N оставшихся игроков получают билет в более крупный турнир).

Из-за этого предпочтительная стратегия в суперсаттелитах иногда принимает самые невероятные формы. Например, если в призы попадают только первые 11 мест, то любое количество фишек сверх определенного лимита (скажем, $\frac{1}{4}$ от всех фишек в игре) становится фактически бесполезным. Более того, зачастую лучшим выбором в такой ситуации будет уйти в сит-аут или скидывать каждую руку.

Однажды мы стали свидетелями интересной истории о суперсаттелите к World Series of Poker Main Event. Герой в раздаче был одним из двух чип-лидеров в турнире, вместе с другим игроком они собрали около 75% всех фишек. В какой-то момент его визави поставил олл-ин на префлопе на 50 больших блайндов. Герой проверил свою руку, там были AA.

В этот момент мы невольно прервали рассказчика вопросом: «А зачем ты вообще смотрел в карты?». Все закончилось коллом от AA и счастливым валетом на терне для JJ его оппонента. Аут. Бэдбит? Не совсем. Даже с таким перевесом по эквити на префлопе, колл с AA все равно был ошибкой.

Почему? Дело в том, что в этой ситуации колл не имеет ничего общего с ожиданием по фишкам. В реальности герой решил сыграть в рулетку на свое ожидание в турнире: уйди он из-за стола, он наверняка бы попал в призы. Ввязываясь в раздачу против другого чип-лидера, он мог лишь подвинуть свои шансы ближе к 100%. Однако на другой чаше весов был вылет из турнира. И хотя у него было 81% на победу, потенциальная выгода от такого розыгрыша не идет ни в какое сравнение с ценой переезда.

Подобные нетривиальные ситуации начинают встречаться особенно часто на

поздних стадиях турниров - отношение ожидания по фишкам к турнирному ожиданию становится нелинейным, а стоимость выигранных фишек стремительно уменьшается.

Как мы неоднократно отмечали выше, обычно в турнирах преимущество получает игрок, который ставит олл-ин первым. А в суперсаттелитах это уже не просто рекомендация, а железное правило - даже сильные руки для средних и глубоких стэков превращаются в легкие фолды из-за меньшей стоимости выигранных фишек.

Многостоловые турниры (МТТ)

Для МТТ-турниров характерно очень большое количество участников, которые стартуют за разными столами, а как только из игры выбывает достаточно много людей, столы реорганизуют.

Главной стратегической особенностью здесь является очень малый процент ситуаций, разыгрываемых за короткими столами. Однако как раз эти моменты и создают большую часть винрейта у хороших игроков, ведь столы не разбивают только на баббле, перед финальным столом и, собственно, за финальным столом.

Игра в МТТ часто напоминает кэш, поскольку структура выплат почти всегда плавная и поэтому не требует существенных подстроек от участников. Основной идеей здесь является фактическое равенство ожидания по фишкам и ожидания по призовым. Интересная динамика может развиваться на баббле или на подходе к финальному столу в очень крупных турнирах, но заметного влияния на общую стратегию она не оказывает.

Правда, не стоит думать, что все элементы стратегии в МТТ абсолютно идентичны таковым для кэш-игр. Например, в кэше вы редко окажетесь всего с десятью блайндами на руках или встретитесь с нитом, который скидывает все свои руки, отчаянно цепляясь за призовую зону. Кроме того, иногда стоит обращать внимание и на структуру турнира - об этом мы поговорим ниже.

Турниры с ребаями

Турниры с ребаями и адд-онами позволяют участникам своими силами раздуть призовой фонд, поскольку у них появляется возможность докупать фишки (в случае вылета или после перерыва, но обе эти опции ограничены по времени). Зачастую турниры с ребаями проходят по следующей схеме.

Бай-ин турнира равен $\$X$ с небольшим рейком (например, $\$100+9$). За эти деньги игроки получают стартовые стэки по N фишек. При этом каждый участник может

сделать «ребай», если его стэк становится меньше или равен N . Таким образом, в самом начале турнира они могут докупить N дополнительных фишек, если заплатят $\$X$. Однако окно, когда они могут делать ребай ограничено по времени - обычно это первые три уровня. Как только блайнды вырастут в четвертый раз, игрокам разрешается купить фишки в последний раз (причем вне зависимости от размера стэка), это называется адд-он. Иногда фишки в рамках адд-она предлагаются со скидкой к бай-ину турнира. Например, если каждый игрок в самом начале нашего турнира получил по 1000 фишек, то адд-он на 1500 может стоить всего $\$100$.

Естественно, здесь стоит задаться вопросом: стоит ли делать ребай? Мы можем проанализировать несколько распространенных ситуаций и поговорить о том, разумно ли вкладывать дополнительные деньги в турнир. Во всех случаях мы будем игнорировать риск банкротства и дисперсию, предполагая, что все игроки имеют достаточный банкролл для конкретного турнира.

Случай 1:

Начало периода ребая. Игрок А теряет весь свой стэк в первой же раздаче. Стоит ли ему докупиться?

Почти наверняка да. Игрок А может рассматривать такую возможность как шанс зарегистрироваться в новом турнире, но уже без рейка. А поскольку он осознанно заплатил за участие в первом турнире (полагая, что имеет преимущество над полем), то и решение сыграть в новом турнире будет рациональным.

Случай 2:

Конец периода ребая. Игрок А нарастил свой стэк до 6000, при стартовой 1000 фишек. В игре остаются 300 участников, и он думает, что его шанс удвоиться против такого поля составляет примерно 54%. Все ожидают, что общий призовой фонд составит $\$90,000$ (скажем, 200 игроков сделают адд-он, увеличив количество фишек в игре до миллиона). У игрока А есть возможность взять адд-он за $\$100$ и получить 1500 фишек. Должен ли он ею воспользоваться? Каким должен быть его стэк, чтобы он мог отказаться от адд-она?

Ожидание игрока А мы можем оценить через формулы Даббл-апа. Если его в его стэке 6000 фишек, то количество даббл-апов до победы составляет:

$$N(6000) = \log_2 1,000,000/6,000 = 7.38$$

$$N(7500) = \log_2 1,000,000/7,500 = 7.06$$

$$E(6000) = 0.54^{7.38} = (0.0105) (90,000) = \$953$$

$$E(7500) = 0.54^{7.06} = (0.0129) (90,000) = \$1,162$$

Поскольку новые 1500 фишек увеличивают его ожидание почти на $\$200$, нашему игроку всегда стоит делать адд-он за $\$100$.

Что касается второго вопроса, нам нужно найти такой размер стэка x , при котором бы игрок А был безразличен к адд-ону:

$$N(\text{без адд-она}) = \log^2 1,000,000/x$$
$$N(\text{с адд-оном}) = \log^2 1,000,000/(x+1500)$$

Мы также знаем, что:

$$E(x) = E(x+1500) - \$100$$
$$E(x) = (90,000) (0.54^{N(\text{без адд-она})})$$
$$E(x+1500) = (90,000)(0.54^{N(\text{с адд-оном})})$$

Из этих уравнений следует вывод: аддон в 1500 за \$100 увеличивает ожидание игрока в турнире до момента, пока у него не окажется половина всех фишек в турнире. Фактически, это значит, что при шансе удвоиться в 54% адд-он всегда будет верным решением.

Даже при C равном 0.51 ему все равно бы стоило брать адд-он с такой скидкой при любом размере стэка. Хотя если бы адд-ин стоил \$150, порог безразличия достигался бы уже при стэке в 8,325 фишек.

Выигрывающий игрок почти во всех без исключения случаях должен использовать адд-оны, если они предоставляются с небольшой скидкой к номиналу. Для приближенных оценок ожидания в таких случаях можно использовать формулы из теории Даббл-апа.

Игра с короткими стэками

За турнирными столами вы нередко увидите игроков, которые всеми силами цепляются за свое место, пока это позволяет структура турнира. Именно поэтому во всех турнирах блайнды постоянно растут. В то же время такая динамика уменьшает относительные стэки игроков до уровней, которые практически не встречаются в кэш-играх. Например, нет ничего необычного в том, что на поздних стадиях турнира по Безлимитному Холдему вам придется работать со стэком всего в 10-15 больших блайндов.

Под «короткими» стэками мы подразумеваем не только те, которые явно уступают стэкам остальных игроков за столом, но также и «короткие» стэки относительно блайндов.

Здесь стоит упомянуть о двух основных типах подстроек. Первая относится к безлимитным турнирам. В какой-то момент, когда ваш стэк становится особенно коротким по отношению к блайндам, вместо оупен-рейза имеет смысл просто идти в олл-ин. Этот порог обычно находится около точки, где любой рейз

привязывает вас к коллу пуша из-за хороших шансов банка (2 к 1 или лучше).

Общее правило следующее: если ваш стэк в 6 раз больше банка до начала торговли на префлопе (анте плюс блайнды), то вы все еще можете делать небольшие рейзы; в противном случае правильной стратегией будет олл-ин с соответствующим диапазоном.

Некоторые читатели вспомнят, что эта рекомендация не сильно отличается от той, что мы давали в главе, посвященной игре «Пуш или Фолд», где стэк примерно в 10 блайндов ($6 \times 1.5 = 9$) оправдывал оупен-пуш на префлопе.

Вторая подстройка касается различий в относительной силе рук. Имея короткий стэк вы должны отдавать предпочтение стартерам с хорошим шоудаун вэлью, а не с потенциальными шансами. Кроме того, в свой диапазон можно добавить и руки с блокерами, поскольку они уменьшают вероятность того, что у ваших оппонентов окажется сильная комбинация для колла на префлопе. Мы уже обсуждали особенности некоторых стартеров в главе 12: например, рука T9s включалась в диапазоны олл-ина даже при относительно глубоких стэках благодаря своему эквити, а Ах уменьшал вероятность колла от старшего туза.

Игра с анте

В стаде, а также на средних и поздних стадиях турниров по Безлимитному Холдему, помимо блайндов каждый из игроков ставит анте. Очевидно, что дополнительные деньги в банке оказывают существенное влияние на стратегию коротких стэков.

Скажем, в турнире по стаду у одного из игроков осталось фишек всего 3 или 4 анте. Когда он заходит в раздачу, обычно против него будут играть только один или два оппонента. Но шансы на его анте составят 8 к 1, а на оставшиеся фишки - 1 к 1. Поэтому в турнирах по стаду игрокам следует более охотно избавляться от плохих рук даже имея очень короткий стэк, поскольку чем дольше они ждут, тем больше становится потенциальный «оверлей».

Эту же подстройку можно использовать и в смешанных турнирах. Если в игре с флопом вам не заходит, а в одной из следующих раздач начнется стад, то имеет смысл немного подождать, даже если ваш стэк стремительно съедают блайнды и анте.

В Безлимитном Холдеме анте создают раздутые банки на префлопе - это значит, что оупен-рейз с намерением забрать мертвые деньги становится гораздо более привлекательным решением. С эксплуатационной точки зрения, вы вполне можете найти людей, которые даже на стадиях с большими анте играют настолько зажато, что рейз с любыми двумя будет прибыльной стратегией.

Например, если при блайндах 200-400 и анте 50 за 9-макс столом ваш рейз с позиции дилера на 1000 фишек выиграет банк один раз из двух, вы можете даже не смотреть в свои карты. Ведь потенциальный выигрыш составит 1050 ровно в 50% случаев, а проигрыш - всего 1000.

Бэкинг в турнирах

В четвертой части мы вскользь затронули тему бэкинг-отношений между игроками. Однако тогда мы рассматривали только кэш-игры, в то время как бэкинг гораздо более популярен в турнирах. Мы бы не хотели оставлять такую обширную область без внимания, поэтому ниже постараемся показать, как можно оценивать подобные договоренности.

Самой распространенной формой турнирного бэкинга является открытое соглашение со следующими условиями:

- Бэкер предоставляет игроку банкролл
- Игрок участвует в оговоренных турнирах
- Прибыль разделяется между бэкером и игроком в определенном соотношении
- Игрок получает возможность выйти из соглашения, если он отыграл в плюс (обычно такое происходит после побед на средних или крупных турнирах)

Поскольку в рассматриваемом соглашении банкролл статичен, ему будет соответствовать риск банкротства в 100%. Вся прибыль разделяется между бэкером и игроком, банкролл не увеличивается за счет выигрышей. Однако это не значит, что все бэкинг-соглашения оборачиваются только убытками.

Мы можем попытаться оценить бэкинг на серию турниров, используя выведенную ранее формулу реального размера поля. Скажем, у нас есть некий игрок А с винрейтом 1 бай-ин за турнир. Игрок А хочет получить деньги от игрока В на 70 турниров. После серии игрок В либо покрывает все убытки, либо делит прибыль с игроком А поровну. Будем считать, что в каждый турнир регистрируется 400 участников.

Теперь, используя модели, рассмотренные в этой главе, мы составим некое распределение результатов нашего игрока, полагая, что имеем дело с семьюдесятью турнирами меньшего размера, где победитель забирает весь призовой фонд. Для этого мы воспользуемся множителем турнирной дисперсии k (уравнение 27.4) для турнира на 400 человек. Получим, что при обычной структуре выплат k было бы равно 72, это реальный размер поля.

Оценить вероятность победы в таком турнире нам поможет биномиальное

распределение. Так как преимущество игрока А составляет 1 бай-ин, то его шансы на победу составляют примерно 1 к 36.

Соответственно, вероятность того, что он выиграет виртуальный турнир N раз, равна:

N	%
0	13.92%
1	27.84%
2	27.44%
3	17.77%
4	8.50%
5	3.21%
6	0.99%
7	0.26%
8	0.06%
9	0.01%
10	0.00%

Конечно же, это не вероятность его победы в реальном турнире на 400 человек - она будет намного меньше. Однако результаты для виртуального турнира (на 72 участника) могут послужить хорошей отправной точкой для анализа.

Составим таблицу интересов бэкера и игрока:

N	$p(N)$	Исход	Доля бэкера	Ожидание
0	13.92%	-70	(70.00)	(9.74)
1	27.84%	2	1.00	0.28
2	27.44%	74	37.00	10.15
3	17.77%	146	73.00	12.97
4	8.50%	218	109.00	9.27
5	3.21%	290	145.00	4.65
6	0.99%	362	181.00	1.80
7	0.26%	434	217.00	0.56
8	0.06%	506	253.00	0.15
9	0.01%	578	289.00	0.03
10	0.00%	650	325.00	0.01
Итого				30.13

Получается, что игрок и бэкер выиграют 70 бай-инов на двоих, однако доля бэкера составит всего 30.13 бай-ина вместо 35. Дело в том, что 4.9 бай-ина он просто «подарит» игроку из-за своего обязательства покрывать убытки. Более того, модель рассмотренного соглашения приписывает бэктеру немного завышенное ожидание, поскольку расчеты с игроком происходят только по

завершении серии турниров.

Мы провели 10,000 симуляций серии по 70 турниров для рассматриваемого игрока. Средняя прибыль бэкера составил примерно 32 бай-ина (по всей видимости, дисперсия в доходах носит систематический характер). С другой стороны, когда мы вводили условие, что игрок может потребовать расчета как только он оказывается в плюсе, доля бэкера падала до 27 бай-инов. Таким образом, возможность рассчитаться до конца серии можно оценить примерно в 5 бай-инов из 70 выданных.

«Честность» бэкингových соглашений - понятие относительное. По большому счету, бэкингové сделки существуют на открытом рынке и только правила этого рынка могут диктовать «честную» цену таких услуг. Однако бэкерам стоит помнить, что чем короче заключаемое соглашение, и чем чаще игрок может потребовать расчет, тем меньше будет его собственная средняя выгода.

Нужно запомнить

-
Анализируя турниры с точки зрения теории игр, не стоит забывать, что каждая раздача в них, по сути, не является игрой с нулевой суммой. Когда два игрока выставляются в олл-ин, ожидание всех остальных участников возрастает. Поэтому часто турнирная стратегия сводится к «игре в слабо».
-
Турнирный бэкинг можно оценивать с помощью формул, которые мы использовали для бэкинга на кэш-игры. Асимметрия результатов делает подобные соглашения очень выгодными для игрока.
-
Если ваш стэк в турнире по Безлимитному Холдему в шесть раз больше банка на префлопе (анте плюс блайнды), вы можете делать оупен-рейзы небольшого размера. В противном случае лучшей стратегией будет олл-ин.
-

Глава 29

Сообразим на троих: Игры с несколькими участниками

На протяжении почти всей книги мы говорили только об играх, в которых участвовали два человека. Причина, по которой мы настолько сильно ограничили область своих интересов, имела чисто практический характер - такие игры проще решать и анализировать. Кроме того, на средних и высоких лимитах большинство банков разыгрываются между двумя игроками. А это, в свою очередь, значит, что винрейты за такими столами зависят не в последнюю очередь от вашей способности анализировать хэдс-ап банки.

Как мы покажем ниже, многопользовательские игры помимо уже знакомых вам оптимальных стратегий зачастую включают в себя и эксплуатационные элементы, которые значительно их усложняют. Нередко случается так, что в подобных играх существует некая точка равновесия, в которой ни один из участников не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке. В то же время это равновесие можно расшатать и заставить оппонентов поменять свою стратегию. Из-за этого подобные игры очень сложно анализировать, ведь по сути единого решения у них нет. Поэтому в большинстве случаев мы будем лишь стараться понять, как можно противостоять различным эксплуатационным стратегиям в рассматриваемых многопользовательских играх.

Поскольку покер является многопользовательской игрой, нам следует хотя бы познакомить читателей с основами теории игр, применяемой в таких ситуациях. Вспомните определение равновесия в случае с игрой с нулевой суммой, рассчитанной на двух участников (глава 10) - предполагалось, что ни один из них не может улучшить свое ожидание, меняя стратегию игр в одностороннем порядке. Как мы отметили в десятой главе, все хэдс-ап игры с нулевой суммой имеют хотя бы одну пару оптимальных стратегий.

Однако в пятидесятых годах математик Джон Нэш доказал, что все игры с конечным числом участников (с нулевой суммой или нет) имеют как минимум одну точку равновесия. Такие точки называются **равновесием Нэша**. Естественно, оптимальная стратегия для хэдс-ап игры будет называться равновесием Нэша. Но обычно мы будем употреблять этот термин только в отношении многопользовательских игр.

Равновесие Нэша - это такой набор стратегий для всех игроков, при котором ни один из них не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

В играх один-на-один с нулевой суммой, если нам и удавалось найти несколько точек равновесия, все они оказывались модификациями одной стратегии лишь с незначительными различиями в виде доминируемых стратегических выборов

(которые, по большому счету, не имеют никакого значения при игре против идеального оппонента). В многопользовательских же играх мы можем обнаружить сразу несколько полноценных равновесий Нэша, каждое с уникальными параметрами.

Для того чтобы продемонстрировать это, давайте вернемся к игре в «слабо» из главы 28:

	Игрок В	
Игрок А	Идти до конца	Свернуть
Идти до конца	$(-10, -10)$	$(1, -1)$
Свернуть	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

Мы можем привести эту игру к нулевой сумме, введя в нее пассивного игрока G, который не может выбирать свою стратегию, однако на него распространяются исходы от противостояния двух основных игроков:

	Игрок В	
Игрок А	Идти до конца	Свернуть
Идти до конца	$(-10, -10, +20)$	$(1, -1, 0)$
Свернуть	$(-1, 1, 0)$	$(0, 0, 0)$

Такой прием можно использовать для любой игры с ненулевой суммой. Как вы можете помнить, в главе 28 мы нашли три точки равновесия для этой игры:

- Игроки А и В сворачивают по 90% раз и идут до конца 10% раз
- Игрок А идет до конца 100% раз, игрок В сворачивает 100% раз
- Игрок В идет до конца 100% раз, игрок А сворачивает 100% раз

Несложно проверить, что при каждой из этих стратегий ни один игрок не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

Поиск равновесия Нэша является важным этапом при анализе игр. Почти во всех ситуациях точка равновесия представляет собой наилучшую стратегию для каждого участника. В хэдс-ап играх стратегии, которые находятся в точке равновесия по Нэшу, являются оптимальными. Однако в многопользовательских играх равновесие Нэша само по себе не описывает сильнейшую стратегию из возможных. Этому существует множество причин, главной из которых является возможность создавать *альянсы*.

Вспомните настольные игры - в них многие люди стараются найти себе союзников для достижения неких общих (предположительно) целей. Получается, что несколько игроков могут «сговориться», чтобы увеличить совместное ожидание за счет других участников. Зачастую существует сразу несколько конфигураций подобных союзов, однако их практически невозможно анализировать с точки

зрения эксплуатационных или оптимальных стратегий.

Мы можем условно разделить альянсы на два вида: «сильные» и «слабые». Они отличаются количеством закрытой информации, которой игроки делятся между собой, а также стремлением максимизировать ожидание группы или ожидание каждого участника в отдельности. «Сильные» альянсы, которые подразумевают обмен секретной информацией и действия, направленные против своих личных интересов (которые, в то же время, играют на руку всей группе), запрещены правилами покера. Например, команда из нескольких игроков может использовать скрытые сигналы для манипуляций с размерами ставок и очередностью экшена. Или два игрока могут договориться об обмене долями в одном турнире, а затем играть друг против друга вполсилы, чтобы выровнять свои стэки и, таким образом, максимизировать совместное ожидание.

Такое поведение разрушает игру, поскольку участники больше не действуют исключительно в личных интересах (в рамках конкретной игры). Несколько сговорившихся игроков могут выкачивать из стола огромное количество денег без особых проблем, хотя сумма их личных ожиданий никогда бы не обеспечила такой прибыли.

Поэтому чаще всего мы будем попросту игнорировать «сильные» альянсы, поскольку они идут вразрез с правилами игры. Однако вам никогда не стоит забывать про их существование.

В то же время «слабые» альянсы не нарушают никаких правил. Напротив, они являются неотъемлемой частью покера. Самым очевидным примером будет исключительно лузовая и пассивная игра на низких лимитах. Зачастую игроки за такими столами имеют как бы негласную договоренность, что все будут играть пассивно на ранних улицах торговли, чтобы получить больше удовольствия от покера - поэтому, скажем, от лимпа с 750 на префлопе не случается ничего страшного. Однако подобная стратегия приводит к катастрофическим последствиям в тайтовых и агрессивных составах, где игроки совсем не разделяют подобную философию. Это и называется «негласным» или «слабым» альянсом.

Некоторым читателям может показаться, что негласные альянсы не играют значимой роли с эксплуатационной точки зрения. В конце концов, если мы можем правильно читать руки и стратегии оппонентов, мы все равно будем выигрывать деньги, вне зависимости от их наклонностей (если только игра специально не заточена против нас). Тем не менее, в некоторых случаях все обстоит ровно наоборот.

Пример 29.1

Давайте рассмотрим следующую вспомогательную игру.

За столом три игрока, каждый из них ставит анте в размере \$10 - перед началом раздачи банк составляет \$30. Всем сдается по одной карте из стандартной колоды, у одного из участников есть баттон, который передается по кругу. В этой игре предусмотрен один раунд торговли: можно поставить \$30, либо сделать чек. Как только один из игроков сделал ставку, остальные могут либо уравнивать, либо сбросить свою руку. На шоудауне все оставшиеся в раздаче участники показывают свои карты. Игроки с А или К на руках делят банк. Если А или К ни у кого нет, то банк поровну делится между всеми игроками, увидевшими шоудаун.

Это достаточно простая и симметричная игра. Однако теперь представьте, что вас в нее пригласили сыграть два друга со следующими условиями: они заранее объявляют стратегии, по которым будут играть, и обещают предоставлять любую информацию (показывать руки, которые они скинули и т.п.), чтобы подтвердить, что они действительно следуют этим стратегиям. Казалось бы, самое время обобщать их до нитки, так что вы садитесь за стол.

Игрок слева от вас говорит:

Я буду чекать со всеми руками и уравнивать только с А или К.

Игрок справа от вас говорит:

Я буду ставить со всеми руками и уравнивать все ставки.

Несложно понять, что каждая из этих стратегий в отдельности - истинный рай для эксплуатации. Так что мы без труда определим точный порядок своих действий против каждого из оппонентов и рассчитаем ожидание. Мы можем свести собственную стратегию к вопросу о том, делать ли колл ставки от игрока справа (назовем его *маньяком*). С нашей же стороны ставка с любой рукой будет фактически эквивалента коллу его бета.

Естественно, если у нас на руках А или К, мы всегда будем делать колл. Однако что делать, если у нас оказалась какая-то другая карта?

Всего в этой игре возможны три сценария:

Ситуация 1: У нас баттон

В этом случае, игрок слева (назовем его *скала*) всегда сделает чек, а его сосед всегда поставит.

Ситуация 2: Баттон у скалы

Маньяк всегда сделает ставку первым.

Ситуация 3: Баттон у маньяка

И мы, и скала сделаем чек, маньяк всегда поставит.

В каждом из этих случаев мы не получаем никакой информации о руках оппонентов, и каждый раз мы должны принять вполне определенное решение.

Когда у нас нет А или К, ни у одного из наших оппонентов их также не окажется $(\frac{43}{51})(\frac{42}{50})$ раз или около 70.8%. В оставшихся 29.2% случаев, у нас будет 0% эквити. Когда ни у одного из оппонентов нет А или К, если мы сделаем колл с пустой рукой, то банк составит \$90 (ставка маньяка плюс наш колл) и мы заберем из него \$45.

$$< \text{Колл} > = (0.708) (45) + (0.292) (0) - \$30 = \$1.87$$

$$< \text{Фолд} > = 0$$

По всей видимости, лучшей стратегией для нас будет колл с пустыми руками, поскольку наше ожидание выше. Посчитаем математическое ожидание для всей игры (здесь «С» значит «скала», «М» - «маньяк», «П» - пустая рука, «Н» - натс, то есть А или К):

Наша рука	Руки оппонентов	Результат (с анте)	Вероятность	Ожидание
А или К	У обоих Н	\$0	0.25%	0\$
А или К	С-Н, М-П	+ \$20	1.86%	+\$0.372
А или К	С-П, М-Н	+ \$5	1.86%	+\$0.093
А или К	У обоих П	+ \$50	11.41%	+\$5.707
Пустая рука	У обоих П	+ \$5	59.93%	+\$2.996
Пустая рука	1 или 2 Н	- \$40	24.69%	-\$9.875
Итого			100%	-\$0.707

Что это? Как мы можем проигрывать, зная, что оба оппонента следуют заведомо слабым стратегиям, а игра полностью симметрична?

Все дело в том, что оба наших оппонента находятся в негласном союзе. Играя именно по таким стратегиям, они фактически действуют только против игрока между ними. При этом они никак не передают друг другу информацию о своих картах или планируемых действиях. Вполне вероятно, хотя мы еще и не можем этого доказать, что похожие ситуации существуют в покере, где за столом находятся всего три игрока.

Интересно, что третий участник в такой игре может решить, кто из его оппонентов выйдет в плюс. Если он будет играть как скала, то маньяк выиграет больше всех. Если же он сам решит играть в стиле маньяка, то игрок-скала окажется в плюсе. В определенном смысле, у вас есть возможность вступить в негласный альянс с одним из друзей, играя по противоположной стратегии. Однако увеличить свое ожидание вы уже никак не сможете.

Естественно, это далеко не единственно возможный вид альянса. Иногда в одной

отдельно взятой раздаче можно обнаружить сразу несколько альянсов, и все они будут развиваться параллельно. В следующем примере мы покажем, что выбор конкретного альянса не всегда должен быть продиктован EV соображениями:

Представьте себе следующую ситуацию в Холдеме (все карты открыты, банк среднего размера):

Игрок А: A♠ A♣

Игрок В: A♥ Q♥

Игрок С: 8♥ 7♥

Доска: 9♥ 6♥ 2♦

Давайте попробуем найти возможные формы альянсов на такой доске.

Предположим, что готовая рука и стрит-флэш дро решают играть сообща. Тогда дро сделает ставку, тузы ответят рейзом - в таком случае натсовое флэш-дро окажется в очень сложной ситуации. У него только пять аутов на терн и прямые шансы банка не позволяют делать колл.

С другой стороны, готовая рука и натсовое флэш-дро могут попытаться получить четыре ставки из стрит-флэш дро (имея между собой 79% эквити): у игрока С (на первый взгляд) восемь аутов, а это значит, что у него есть шансы на колл.

Наконец, два флэш-дро могут сыграть против готовой руки - тогда натсовое дро сделает фолд, поскольку никак не улучшает эквити в таком альянсе, а стрит-флэш дро получает больше чистых аутов и уравнивает одну ставку от тузов.

Мы надеемся, что теперь вам стало ясно, почему так сложно анализировать многопользовательские игры: даже с открытыми картами оптимальная стратегия для всех игроков может оказаться совсем не однозначной из-за возможных альянсов.

Подобными проблемами сегодня занимается новая ветвь математики - теория кооперативных игр, изучающая как раз игры, в которых участники могут объединяться для увеличения своего ожидания. Ниже мы ограничимся лишь краткой справкой, поскольку это не является темой настоящей главы.

Этот раздел теории игр обычно рассматривает игры, где разрешены **внеигровые выплаты**, то есть договоренности между участниками, которые реализуются вне текущей ситуации и служат вознаграждением за вступление в альянсы. В покере такие выплаты могут принимать форму обмена фишками или игры из одного банкролла, хотя многие профессионалы очень неодобрительно относятся к такой практике.

Кроме того, в теории кооперативных игр зачастую фигурирует условие

итеративности. Иными словами, предполагается, что одна и та же игра происходит снова и снова, а участники реагируют на новую информацию, полученную в предыдущем раунде.

Хотя оба этих условия могут встречаться в покере, наиболее подходящим, конечно же, является второе. Важной концепцией для кооперативных игр является вектор Шепли - грубо говоря, это среднее ожидание от всех возможных альянсов, в которых может поучаствовать конкретный игрок.

На этом, пожалуй, стоит закончить краткий экскурс в теорию кооперативных игр - больше информации вы сможете почерпнуть из специализированных статей и книг.

Во второй части этой главы мы обсудим (обратите внимание, что мы специально не употребляем слово «решим») три многопользовательские игры. Первые две из них были придуманы Крисом Фергюссоном и предполагают, что один игрок уже находится в олл-ине.

Если в такой ситуации нет сайд-пота (особенно это касается турниров), то обычно игроки стараются: а) дочекать до вскрытия, таким образом получив шанс выбить игрока в олл-ине; б) не ставить с совсем слабыми руками без блекеров, поскольку в банке нет денег, за которые бы стоило бороться блефами. Но здесь есть нюансы...

Пример 29.2 - Игра без сайд-пота #1

Три игрока: X, Y и Z

Стад, только что сдали ривер

Мы обсудим решение только для одной улицы, хотя непосредственно за столом предшествующий экшен, естественно, имел бы не последнее значение.

X: (??) A♥ A♦ A♣ A♥ (?)

Y: (??) 5♦ 6♦ 7♦ 8♦ (?)

Z: (??) K♥ K♣ K♦ K♠ (?)

Игрок Z в олл-ине, размер банка P ставок

У игроков X и Y еще есть фишки

Игра на полной улице, Лимитный Стад

Поскольку ривер уже сдан, ни игрок X, ни игрок Z никак не могут улучшить свои руки, поэтому игрок Y фактически оказывается ясновидящим и знает, закрылся его стрит-флэш или нет. Игрок X никогда не должен ставить сам, однако частота его коллов обязана сделать оппонента безразличным к блефу. В то же время, игрок Y попросту не может быть «безразличен к блефу», ведь если его стрит-

флэш не закрылся, и он все равно поставит, то даже когда игрок X скинет свои карты, Y проиграет квадсу. А это значит, что игроку X никогда не стоит делать колл.

Равновесие Нэша для этой игры выглядит следующим образом: игрок Y ставит на вэлью со всеми стрит-флэшами, а игрок X всегда скидывает в ответ на любую ставку. При такой стратегии ни один из оппонентов не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

Однако давайте представим, что игрок Y все же изредка блефует. Каждый раз, когда он это делает, игрок X скидывает свои карты, и Z забирает банк. Фактически, игрок Y не получает ничего, только отдает банк игроку Z. Вполне вероятно, что такой поворот событий не понравится игроку X, ведь он бил руку своего оппонента! Тогда он может начать иногда уравнивать ставки, надеясь выровнять ситуацию.

Но в таком случае ожидание игрока Y сразу же возрастет, поскольку теперь игрок X будет отдавать немного денег и его вэлью-бетам. Более того, игроку Y даже не стоит пытаться блефовать оптимальное число раз - достаточно показать пару блефов на шоудауне. Игрок Y никак не может пострадать от действий игрока X, даже если станет играть не по равновесной стратегии.

Этот короткий пример демонстрирует как игрок с инициативой может отклониться от точки равновесия, чтобы заставить своих оппонентов реагировать в неправильном ключе и терять на этом часть своего математического ожидания.

Пример 29.2 - Игра без сайд-пота #2

Три игрока: X, Y и Z.

Рука каждого игрока сдается из распределения $[0, 1]$

Игрок Z поставил анте и оказался в олл-ине, в банке 9 ставок

Мы решим эту игру для фиксированного размера банка. Решение для общего случая выглядит громоздко, и из-за этого мы не сможем доступно объяснить основную идею примера.

У игроков X и Y еще есть фишки

Игра на половине улицы.

Давайте рассмотрим стратегию игрока Y, когда игрок X делает чек втемную. Очевидно, он будет ставить со своими лучшими руками на вэлью, надеясь получить колл от средних рук оппонента. Также он иногда будет блефовать с худшими руками, однако в таком случае ему нужно думать и о руке игрока Z (как мы это показали в прошлом примере).

Можно ли говорить, что и в этой игре человек с инициативой (игрок Y) вынужден ставить только на вэлью? На первый взгляд, такая стратегия может быть эксплуатирована игроком X - ему стоит лишь начать скидывать свои пограничные руки. Значит, игрок Y должен найти некую контрстратегию. Пока ясно только одно - у игрока X будет порог для колла ставок от оппонента.

Обозначим этот порог через x , а порог игрока Y для вэлью-бетов через y_1 . Предположим, что игрок Y решит ставить с руками хуже, чем y_1 (естественно, эти две области будут разделены диапазоном чека). Назовем их «блефами», однако здесь значение этого слова несколько иное - фактически мы говорим о полублефах, поскольку игроку Y нужно еще выиграть у руки Z, чтобы забрать банк.

Игрок X будет уравнивать только когда его ожидание больше нуля. Он никогда не подумает о колле с руками, которые не бьют блефы оппонента, так что порог x точно будет между порогом y_1 и точкой, где начинаются блефы игрока Y (назовем этот диапазон Y_B , а его длину - w).

Интересно, что в этой игре диапазон блефа не будет равен диапазону вэлью-бетов, умноженному на α , так как игрок в олл-ине уменьшает ожидание от успешного блефа.

Ожидание игрока X от колла в пороге x составляет:

Рука Y	Рука Z	Вероятность	<X, колл>
$[0, y_1]$	$[0, 1]$	y_1	- 1
Y_B	$[0, x]$	$w(x)$	+ 1
Y_B	$[x, 1]$	$w(1 - x)$	+ 10

Общее ожидание игрока X от колла в пороговой точке должно быть равно нулю (так как должно соблюдаться условие безразличия к коллу):

$$wx + 10(w(1 - x)) = y_1$$

$$wx + 10w - 10wx = y_1$$

$$w(10 - 9x) = y_1$$

$$w = y_1 / (10 - 9x)$$

На верхней границе диапазона блефа игрока Y (пока будем называть эту точку y) имеем:

Рука X	Рука Z	Вероятность	<Y, блеф>
$[0, x]$	$[0, 1]$	x	- 1
$[x, 1]$	$[0, y]$	$y(1 - x)$	0
$[x, y]$	$[y, 1]$	$(y - x)(1 - y)$	+ 9
$[y, 1]$	$[y, 1]$	$(1 - y)^2$	0

$$\begin{aligned}
x &= 9(y-x)(1-y) \\
x &= 9y - 9x - 9y^2 + 9xy \\
10x &= 9(1+x)y - 9y^2 \\
9y^2 - 9(1+x)y + 10x &= 0 \\
y^2 - (1+x)y + 10x/9 &= 0 \\
y &= (1+x)/2 \pm (\sqrt{(1+x)^2 - 40x/9})/2
\end{aligned}$$

Полученное уравнение квадратично, поскольку игрок Y оказывается безразличным к блефу и чеку в двух точках сразу (верхняя и нижняя границы диапазона блефа соответственно).

Заметим, что уравнение выше полностью описывает весь диапазон для блефа игрока Y - его центр находится в точке $(1+x)/2$, а ширина равна $(\sqrt{(1+x)^2 - 40x/9})/9$

$$w = (\sqrt{(1+x)^2 - 40x/9})/9$$

Составим уравнение для порога y_1 :

Рука X	Рука Z	Вероятность	<Y, вэлью-бет>
[0, y_1]	[0, 1]	y_1	- 1
[y_1 , x]	[0, 1]	$x - y_1$	+ 1
[x, 1]	[0, 1]	$(1 - x)$	0

Это самое легкое из уравнений в нашем примере. Как и раньше, игрок Y должен ставить ровно с половиной диапазона колла игрока X.

$$\begin{aligned}
y_1 &= x - y_1 \\
y_1 &= 1/2 x
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили три уравнения безразличия:

$$\begin{aligned}
w &= y_1 / (10 - 9x) \\
y_1 &= 1/2 x \\
w &= (\sqrt{(1+x)^2 - 40x/9})/9
\end{aligned}$$

Решим систему:

$$\begin{aligned}
w &= x / (20 - 18x) \\
x / (20 - 18x) &= (\sqrt{(1+x)^2 - 40x/9})/9 \\
x &\approx 0.2848
\end{aligned}$$

Зная порог x , мы можем найти оптимальные стратегии для каждого игрока. Так,

центр диапазона блефа у Y будет находиться в точке 0.6424 (его общая длина составит 0.0190), а y_1 окажется примерно в 0.1424.

Как вы могли заметить, коэффициент α для этой игры несколько выше, поскольку есть сдерживающий фактор в виде игрока Z . Чтобы сделать своего оппонента безразличным к выбору действия игрок Y будет ставить на вэлью около 14% рук и блефовать только с 1.9%. Это значит, что его α равна примерно $\frac{1}{10}$. При этом стратегия игрока X уже предполагает не колл с 9/10 рук (как того требует правило, выведенное нами в третьей части книги), а лишь с 28.5%.

Эти диапазоны и составляют равновесие Нэша для рассмотренной ситуации - ни игрок X , ни игрок Y не могут улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.

Теперь мы можем поговорить о сложностях многопользовательских игр более предметно. Давайте представим, что игрок Y решил блефовать чаще, чем того требует равновесная стратегия - теперь его диапазон w составляет 3% рук, вместо 1.9%. Как мы отметили выше, игрок Y был безразличен к блефу на обоих концах Y_B . Тогда любое расширение этого диапазона автоматически уменьшит его ожидание.

Игрок X немного выиграет от более частых блефов своего оппонента. Однако кто по-настоящему сорвет куш, так это игрок Z , ведь все руки, которые игрок Y будет выбивать, находятся между порогом колла x и порогом блефа. Таким образом, каждый раз в ситуации $X > Z > Y$, когда игроку Y удастся выбить сильнейшую руку X , игрок Z с радостью заберет весь банк, который бы иным образом ему не достался. В итоге игрок X теряет больше других, а его ожидание распределяется между игроком Y и игроком Z .

Но он может попытаться улучшить свое положение (не забывая, что игрок Y разрушил равновесие) следующим образом. Скажем, игрок X начинает уравнивать с большим количеством средних рук, то есть сдвигает свой порог x . Теперь он будет чаще оказываться в раздачах, где $X > Z > Y$, но здесь есть и обратная сторона: придется отдавать какие-то деньги вэлью-бетам игрока Y . С точки зрения последнего, широкий диапазон колла игрока X как нельзя кстати - он выигрывает ставку примерно 14.2% раз, проигрывает ставку в 3%, а также около трети от банка в 9 единиц, плюс иногда он успешно выбивает оппонента из банка, когда у игрока Z слабая рука. Все эти факторы дают игроку Y прибыль от участвовавших коллов примерно в 2% от размера ставки. В свою очередь, игрок X отбивает часть этих денег через игрока Z .

Что мы имеем в итоге? Когда игрок Y начинает чаще блефовать, игрок X стремится максимизировать свое ожидание, но больше всех выигрывает от таких подстроек Z . Причем чтобы сделать такой альянс (между Y и Z) еще более прибыльным, игроку Y стоит просто сообщить своим оппонентам, что он собирается ставить на блеф с большим количеством рук, надеясь, что игрок X

решил эксплуатировать такую стратегию. В то же время, игрок X получает возможность образовать альянс с игроком Y против Z, однако ценой такого хода будет передача части своего ожидания игроку Y.

Здесь важно отметить, что блеф в раздачах без сайд-пота является достаточно опасным занятием, поскольку совершенно неясно как воспримут это остальные игроки за столом. Среди возможных последствий есть как репутационные риски (такие ситуации очень похожи на чип-дампинг), так и ущерб вашему имиджу за столом (что может сказаться на успешности блефов в поздней части турнира). Основной целью этого примера является демонстрация неочевидных последствий от действий игроков, участвующих в «защищенном» банке, в частности как ожидание в раздаче может перетекать от одного альянса к другому.

Пример 29.4 - Игра против маньяка-ясновидящего

Три игрока: X, Y и Z

Игрок Z ясновидящий

У игроков X и Y одинаковые руки

Игра на половине улицы

Игрок X и Y могут либо сделать чек или колл/фолд

Игрок Z может поставить 1 единицу

Размер банка 9 единиц

У всех игроков остаются фишки

Как вы могли заметить, мы часто используем размер банка в 9 единиц. Объяснение простое - в этом случае коэффициент a (из уравнения 11.1) равен $1/10$.

Во-первых, мы можем найти равновесие Нэша для этой игры. Из опыта с играми на половине улицы, вы уже можете угадать, что игрок Z будет ставить на вэлью с натсами и какой-то частью блефов, причем в такой пропорции, что два его оппонента окажутся безразличными к выбору действия. Интересно, что у этой игры есть сразу несколько точек равновесия Нэша. Более того, любая стратегия игроков X и Y, которая удовлетворяет следующим условиям, и будет равновесной:

- Игрок Z получает коллы не чаще $9/10$
- Игрок Y никогда не делает оверколл после игрока X

Первое условие достаточно стандартно - оно делает игрока Z безразличным к блефам. Второе касается шансов банка для оверколлера: если игрок X делает колл первым, игрок Y может только поделить банк и получить 5 ставок от своего оверколла в случае блефа со стороны Z. Но так как это случится всего 1 раз из 10, оверколл становится убыточным решением.

Пусть равновесной стратегией будет колл от игрока X в 50% случаев и колл от

игрока Y в 80% случаев (когда X скидывает свои карты).

Как мы уже показали выше, игрок Z может попытаться нарушить равновесие, начав блефовать чаще. Предположим, что он решит изменить соотношение вэлью бетов к блефам с $\frac{1}{10}$ на $\frac{1}{8}$. Теперь игрок X будет эксплуатировать его, делая колл в 100% случаев, вскрывая неоптимальные блефы своего оппонента. К своему сожалению, игрок Y все еще не сможет делать оверколлы из-за шансов банка. И это играет против Z : он теряет ожидание на своих неудавшихся блефах и при этом не выигрывает достаточное количество денег с натсами.

Тем не менее, пусть что-то заставило игрока Z решить, что он должен блефовать еще больше. И он говорит своим оппонентам, что теперь начнет ставить с пустыми руками в три раза чаще, чем это предполагает равновесная стратегия (то есть с коэффициентом $\frac{3}{10}$). Естественно игрок X продолжит уравнивать со всеми руками.

Но давайте посмотрим на эту ситуацию с точки зрения игрока Y : $\frac{3}{13}$ раз, когда игрок Z блефует, игрок Y может выиграть 5 ставок, делая оверколл. Оставшиеся $\frac{10}{13}$ раз он увидит натс и потеряет одну ставку. Значит, у игрока Y теперь есть достаточно шансов банка на оверколл.

Кому такая игра будет более выгодна? Конечно же игроку Z ! Теперь $\frac{10}{13}$ раз, когда он ставит на вэлью, он получит две ставки от колла и оверколла, в то время как потеряет всего одну со всеми своими блефами. Получается, что он выигрывает $\frac{17}{10}$ ставки (вместо $\frac{9}{10}$) каждый раз, когда у него будет вэлью рука.

Итак, если игрок Z следует равновесной стратегии, альянсы не создаются. Но если он начинает блефовать немного чаще, в игре появляется альянс между X и Z против Y . Если же частота его блефов увеличивается еще больше, то уже Y и Z вступают в альянс против X . Фактически, игрок Z может значительно улучшить свое ожидание, блефуя с большим количеством рук, чем того требует равновесная стратегия (при условии, что его оппоненты будут стараться максимизировать свое ожидание).

В этой главе мы рассмотрели лишь несколько многопользовательских игр, однако мы надеемся, что вы поняли основную идею: всегда можно найти равновесие Нэша для заданной игры, однако зачастую один или несколько участников могут нарушить это равновесие, меняя свои стратегии. И если их оппоненты подстраиваются, пытаясь максимизировать свое ожидание (через эксплуатацию неоптимальных стратегий), в игре непременно формируются альянсы, которые вполне могут принести существенную выгоду одному или нескольким участникам. Конечно же, такая ситуация в принципе невозможна в хэдс-ап играх с нулевой суммой, поскольку в них ожидание, приобретенное одним игроком непременно теряется другим.

Нужно запомнить

- Многопользовательские игры гораздо сложнее, чем хэдс-апы, поскольку в них участники могут вступать в альянсы с целью максимизировать общее ожидание. Такие «слабые» альянсы не запрещены правилами игры. Более того, они являются неотъемлемой частью покера.
- Равновесие Нэша - это такой набор стратегий для всех игроков, при котором ни один из них не может улучшить свое ожидание в одностороннем порядке.
- Зачастую в раздаче могут возникнуть сразу несколько альянсов. Каждый игрок, в свою очередь, должен решить к какому из них примкнуть и как переманить на свою сторону других участников.
- Мы разобрали несколько примеров, где один из игроков расшатывал равновесие таким образом, что только он оставался в выигрыше, а его оппоненты могли наказать его за перераспределение ожидания лишь каким-то действием с отрицательным EV.
- Как правило, лучший способ перераспределить равновесие в игре - это начать блефовать гораздо чаще, чем того требует равновесная стратегия.

Глава 30

Складываем пазл: Математика и вы

На страницах этой книги мы рассмотрели огромное множество покерных ситуаций. Например, мы поговорили о вспомогательных играх, из которых пытались извлечь определенные уроки, а затем использовали для решения реальных раздач. Мы даже привели решение для одной часто встречающейся дилеммы как в кэш-играх, так и в турнирах - «Пуш или Фолд» в главе 12.

И хотя мы много рассуждали о теории, все же «Математика Покера» - это книга о том, как играть в покер. В онлайн, в казино, где угодно. Покер, несомненно, является привлекательной игрой не только с денежной, но и с интеллектуальной точки зрения. Поэтому не исключено, что мы бы посвятили его изучению немалое количество времени даже если бы не получали от него столь очевидную финансовую выгоду. Однако в отличие от шахмат или го, мы играем покер преимущественно из-за денег, и поэтому каждая глава этой книги нацелена не столько на удовлетворение нашего интереса в сложных математических пазлах, сколько на совершенствование наших (а теперь уже и ваших) практических навыков.

Поэтому было бы неправильно закончить эту книгу, не обсудив наш подход к покерной стратегии и философии (большая часть которых основана на изложенных в этой книге моделях), в надежде, что он поможет читателю с очень непростой задачей - применением принципов и следствий из теории игр за покерным столом.

Главная проблема, с которой вы столкнетесь, заключается в том, что на сегодняшний день в покере не существует готовых оптимальных стратегий даже для распространенных ситуаций. Более того, в играх с несколькими участниками таких стратегий попросту нет. Поэтому вам стоит сконцентрироваться не на громоздких вычислениях, а на правильной оценке и интерпретации возможных форм оптимальной стратегии для каждой ситуации. Это, в свою очередь, требует абсолютно особого процесса принятия решений, который нужно освоить и научиться применять на практике. Об этом мы и поговорим ниже.

Темами этой главы станут четыре области, тактические и стратегические решения в которых поддаются численному анализу и интерпретации через теорию игр:

- Агрессия
- Баланс
- Стратегия
- Анализ

Каждая из этих областей по-своему важна, однако между ними существует тесная взаимосвязь, которую нельзя игнорировать.

Агрессия

Мантрой всех без исключения покерных авторов в последнее время стала агрессия и пропаганда агрессивных стилей игры. Как часто вы слышали, что только агрессией и ничем иным можно зарабатывать деньги в покере? Однако к нашему удивлению, многие игроки, даже из числа крепких профессионалов, останавливаются в своем развитии на том уровне покерной агрессии, где они чувствуют себя наиболее комфортно. Причем любые стратегии, которые оказываются более пассивными, чем их собственная, они клеймят «слабыми», а более агрессивные – «маниакальными».

Интересно то, что оба автора этой книги не раз подвергались критике за свою чрезмерную агрессию за столами, однако такая стратегия находит множество подтверждений в различных моделях. Когда мы говорили о вспомогательных играх (в частности о тех, что имеют наиболее тесные связи с реальными ситуациями), мы не раз отмечали, насколько агрессивными оказывались оптимальные стратегии. Так, например, в игре «Пуш или Фолд» со стэком в 10 больших блайндов диапазон пуша расширялся до 58.3%. Многие читатели наверняка тогда заметили при себе, что эта стратегия почти наверняка окажется убыточной. Однако в турнирах и кэш-играх мы раз за разом с удовольствием наблюдали, как даже крепкие игроки не могли найти способ эксплуатировать подобные диапазоны, и совершали гораздо больше ошибок, чем против стандартной игры. Как мы определили успешность стратегии? Количество фактически выигранных денег в хэдс-апах различных турниров у нас оказалось значительно больше ожидания по фишкам.

Когда мы рассматривали игру на половине улицы против ясновидящего (пример 20.5), мы показали, как скрытая рука могла часто полублефовать даже находясь далеко позади. В $[0,1]$ хай-лоу игре (пример 18.1) было продемонстрировано, что второй игрок должен ставить с 75% своих рук после чека оппонента. И так далее. Анализируя оптимальные стратегии, мы постоянно сталкиваемся с удивительным фактом: они всегда предполагают очень высокий уровень агрессии. Естественно, в некоторых играх пассивные стратегии оказываются более предпочтительными. Однако это касается в основном ситуаций с небольшими анте и блайндами (по отношению к размерам ставок). В остальных же случаях агрессия является главным ингредиентом оптимальной игры.

Здесь также стоит упомянуть о цене ошибок. Если вдруг окажется, что вы играете чуть более агрессивно, чем требуется, это не будет стоить вам столько же, сколько частые фолды с сильными руками. Когда вы скидываете свои карты, вы отдаете весь банк агрессору, в то время когда вы делаете бет, то рискуете лишь

своей ставкой.

Это правило можно применить во многих формах покера, однако наиболее явно его следствия проявляются в лимитных играх. Игроки, которые предпочитают чаще избавляться от своих рук, когда колл стоит всего одну ставку, совершают гораздо более грубые и эксплуатируемые ошибки, чем их оппоненты, которые иногда ставят с неоправданно широкими диапазонами. Более того, на наш взгляд средние и высокие лимиты кишат людьми, которые только и ждут возможности сделать «сложный фолд». В результате агрессивная стратегия, которая сама по себе может считаться хорошим отпором даже против опытных игроков, одновременно эксплуатирует наиболее распространенные ошибки слабых оппонентов. Это и есть одна из наиболее важных составляющих оптимальной игры: вам не только стоит искать точки безразличия в собственных диапазонах и стремиться к нулевому ожиданию, но также и извлекать вэлью из ошибок других игроков. Без этого никакая стратегия не может считаться оптимальной.

Поэтому стремление к максимальной агрессии - одна из основ нашей покерной философии. Мы часто защищаем блайнды (в играх с флопом) с пограничными руками, а затем ставим оппонентов в затруднительное положение на поздних улицах. Когда перед нами встает непростое решение, или когда нам кажется, что оба варианта наших действий имеют примерно нулевое ожидание, мы часто выбираем более агрессивную линию, просто из принципа. Мы нередко кидаем в банк фишки в ситуациях, где многие просто отдают банк - это особенно хорошо работает в турнирах, где подобная стратегия создает имидж непредсказуемого игрока, с которым мало кто захочет иметь дело на баббле или поздних стадиях. Во всех этих случаях мы стараемся эксплуатировать оппонентов, но не забываем и об опасности ответной эксплуатации.

Баланс

Некоторые неоптимальные стратегии оказываются убыточными просто потому что их легко эксплуатировать. Другие не работают из-за своей пассивности или наоборот, излишней агрессии. В качестве примера представьте себе $[0,1]$ игру на половине улицы: если оба противника играют оптимально, то игрок в позиции поставит с натсами и строго определенным количеством блефов. Теперь давайте подумаем, как выглядят неоптимальные стратегии в подобной игре.

Во-первых, игрок в позиции может начать меньше блефовать, оставив частоту вэлью-бетов на прежнем уровне. Тогда правильным ответом со стороны его оппонента будут более тайтовые коллы, поскольку он уже не получает достаточного количества денег с блефов и при этом все так же проигрывает натсам.

Во-вторых, игрок в позиции может сохранить пропорции своих блефов и вэлью-

бетов (так что они все равно будут находиться в соотношении α), но уменьшить их общее число. Интересно, что в таком случае его оппонент окажется бессилён: здесь нет эксплуатирующей стратегии, поскольку он все еще безразличен к коллу со своими средними руками. Поэтому такая подстройка со стороны второго игрока хоть и неоптимальна, но все равно даёт неэксплуатируемую стратегию. Но есть важный нюанс - его оппонент получает дополнительные деньги от такой игры, поскольку теперь игрок с инициативой не извлекает максимальное вэлью со своими сильными стартерами.

Нельзя забывать, что термин «баланс» может применяться только к стратегиям, но не к отдельным рукам, поскольку мы редко рассматриваем розыгрыш конкретной раздачи в отрыве от всего диапазона. Поэтому для каждой ситуации мы должны создавать определённую стратегию, где каждой руке из диапазона будет соответствовать своя линия. В идеале они будут отвечать следующим критериям:

- Каждая линия предполагает такой набор рук, при котором мы будем получать прибыль от любого ответа оппонента. Представьте, что мы рейзим ставку другого игрока на терне (в Холдеме). Он, в свою очередь, может отреагировать тремя способами: ре-рейз, колл или фолд. Наши натсы, естественно, хотели бы получить экшен, а вместе с ним и стэк оппонента, поэтому мы точно включим их в наш диапазон для рейза. Точно так же просто сильные руки предпочтут получить колл, в то время как с полублефами мы бы хотели увидеть фолд. Мы можем сконструировать диапазон так, чтобы каждый тип рук был представлен в нужной пропорции. Если мы все сделаем правильно, оппонент никак не сможет нас эксплуатировать - все деньги, которые мы потеряем со слабыми руками, будут отбиты с помощью натсов.
- Диапазон для конкретной линии должен быть достаточно диверсифицирован, чтобы предотвратить эксплуатацию со стороны оппонента.
- Каждый класс рук должен разыгрываться по линии, которая обеспечивает ему наибольшее ожидание, настолько часто, насколько это возможно. Помните, как в главе 9 мы обсуждали линии розыгрыша с АА и АК против префлоп рейзера. В то время как с АА разница в ожидании была небольшой, с АК пуш оказался наилучшим решением. Именно поэтому в конечном счете мы предложили идти в олл-ин как с АА, так и АК, поскольку такая стратегия гарантировала максимальное ожидание для второго стартера. Диапазоны следует строить в таком же ключе - в первую очередь думайте о руках, которые получают максимальное вэлью от определенной линии розыгрыша, и уже на их основе стройте сбалансированную стратегию.
- В ситуациях, когда вы ожидаете получить экшен на поздних улицах, не стоит исключать из своего диапазона пассивного розыгрыша как натсы, так и руки, которые могут стать натсами (дро). Несоблюдение этого принципа

открывает для оппонентов огромные возможности по эксплуатации вашей игры на самых дорогих стадиях раздачи.

Как вы уже могли понять, сбалансированные диапазоны в первую очередь предполагают неэксплуатируемость. В сочетании с должным уровнем агрессии, баланс является неотъемлемой частью стратегий, близких к оптимальным.

Оптимальная стратегия всегда агрессивна и идеально сбалансирована. Близкие к оптимальным стратегии представляют собой грубую оценку параметров оптимальной стратегии в условиях недостатка информации.

Если кто-то следует идеально сбалансированной стратегии, его игру невозможно прочесть. Однако на практике очень сложно дать точное определение термину «идеальный баланс». Самый действенный подход к оценке параметров такой стратегии, на наш взгляд, выглядит так: представьте, что вы должны открыто сообщать оппонентам о вашей стратегии каждый раз, когда принимаете какое-либо решение. Как это повлияет на ваши действия? Как ваши оппоненты могут вас эксплуатировать, зная ваш план на раздачу?

Многие игроки привыкли думать, что такая информация представляет огромную ценность, и наша идея кому-то покажется как минимум глупой. Но если вы посмотрите на эту ситуацию в разрезе оптимальных стратегий, то достаточно быстро придете к простому выводу: если ваша стратегия действительно оптимальна, то информированность оппонентов не имеет никакого значения, ведь они будут безразличны к выбору конкретных действий. Так что такое знание поможет им разве что избежать собственных ошибок.

Раскрытие собственной стратегии перед другими игроками заставляет нас задуматься о том, как они могут эксплуатировать различные ее элементы. И такой образ мышления является важной составляющей на пути к сбалансированному покеру.

Стратегия

Сбалансированная игра и агрессия являются составными частями стратегического подхода к покеру. Однако это далеко не все его составляющие.

Мы рекомендуем смотреть на покер не как на игру со множеством точек выбора, а как на игру с небольшим количеством таких точек. Иными словами, в то время как стандартный подход подразумевает поэтапный анализ от решения к решению, от улицы к улице, мы предлагаем задуматься о простом факте: действия на ранних улицах торговли определяют всю стратегию на раздачу.

В качестве примера давайте рассмотрим следующую ситуацию. Турнир по

Безлимитному Холдему, у одного из игроков осталось 3600 фишек, блайнды 200-400. Если он сделает оупен-рейз до 1200 на баттоне, его шансы на колл олл-ина от одного из блайндов составят примерно 2 к 1, и ему придется выставляться фактически с любой рукой. Такой рейз привязывает его к банку и при этом открывает для оппонентов выбор из нескольких стратегических возможностей (фолд, колл или пуш). Поэтому верным решением будет олл-ин вместо оупен-рейза - с точки зрения стратегии это более сильное действие, так как картина раздачи для него никак не меняется, в то время как оппоненты теперь могут ответить только фолдом или коллом.

Старайтесь рассматривать несколько улиц как цельную игровую ситуацию, а не как сумму отдельных решений. Например, иногда мы можем делать колл на терне с планом фолдить или чекать на ривере, если закроется флэш, и коллить или ставить на любой бланковой карте. Таким образом, на ривере в банк всегда зайдут 1-2 ставки, а мы сможем правило рассчитать потенциальные шансы банка, а также цену экшена на следующей улице.

По аналогии с раздачами, стоит как можно чаще стараться разыгрывать свои диапазоны, а не отдельные руки. Причем в отношении диапазонов хорошо действует подход из игры против ясновидящего: ставить на вэлью и блеф в соотношении α , с планом скидывать часть блефов на каждой последующей улице. Правда, в покере не существует чистых блефов, и этот факт очень сильно меняет диапазоны для вэлью-бета на каждой улице. Но основной принцип остается неизменным и правильная игра на каждой улице требует досконального знания своих диапазонов.

Пол Пудит и Крис Фергюссон называют это «чтением собственной руки» (и мы, если честно, жалеем, что не придумали этот термин первыми). Почти все без исключения покерные книги учат определять диапазон оппонента, в то время как с точки зрения теории игр распределение рук ваших оппонентов (за исключением начала раздачи) не имеет ни малейшего значения. Оптимальная стратегия предполагает идеально сбалансированные и агрессивные линии розыгрыша именно для ваших собственных диапазонов. Если оппоненту удастся вас как-то эксплуатировать, то это просто значит, что ваша стратегия не является оптимальной.

Думать о покере в таком ключе непросто, и нет смысла отрицать, что именно из-за этого многие игроки не решаются на перемены в своем образе мышления. И это нормально - покер слишком сложная игра, с огромным количеством внутренних и внешних факторов, влияющих на результат. Наш мозг оказывается бессилен перед таким количеством информации. Именно поэтому мы постоянно ищем компромисс в виде вспомогательных игр и моделей, которые помогают понять более сложные ситуации и представить их не как сумму отдельных решений, а как цельный объект, который мы можем изучить, и в дальнейшем использовать для эксплуатации оппонентов и анализа собственных диапазонов.

Главной целью любого игрока является составление у себя в голове цельной картины не только отдельных раздач, но и игры в целом.

Анализ

Четвертая, и последняя, область, о которой мы поговорим в рамках этой главы, касается использования математики для изучения игры как за, так и вне стола. Мы никогда не устанем говорить о том, насколько обманчивыми могут быть эмпирические данные в покере. С точки зрения теории вероятностей, мы можем говорить с уверенностью лишь о некоторых вещах. Винрейт не одна из них. Мы уже упоминали статистический шум в предыдущих главах, особенно в контексте, что и у сильных игроков случаются плохие недели и даже месяцы. Кроме того, даже когда все складывается вполне неплохо, пара неправильно выбранных точек отсчета или фильтров могут дать вам абсолютно ошибочное представление об уровне вашей игры. А это, в свою очередь, может привести к ненужным подстройкам и неуверенности в том, что вы делаете.

Но еще важнее то, что подавляющее большинство игроков получают знания о покере только из книг или общения со своими более опытными и успешными друзьями. И хотя авторы книг и другие игроки, как правило, дают советы по игре от чистого сердца, такая информация вряд ли окажется ценной, особенно после интерпретации и неминуемого искажения получателем. Неправильное применение различных идей и приемов в своей игре является, пожалуй, одной из самых распространенных ошибок в покере. Даже если вы верно поняли и истолковали совет от другого человека, нет никаких гарантий, что эта информация пришла из достоверного источника или не являлась следствием продолжительного апстрика автора.

Поэтому на наш взгляд самым надежным и объективным подходом к изучению покера и совершенствованию своих навыков является самостоятельный математический анализ игры. Вместо общения с «сильными игроками» мы предлагаем разбирать вспомогательные игры и частные ситуации, чтобы затем обсуждать найденные решения и модели, стараться определить суть рассматриваемой раздачи или действия. В пользу такой точки зрения говорят несколько вещей.

Во-первых, правильно проведенный анализ по заданным предпосылкам никогда не введет вас в заблуждение. Если вы начнете с некоего набора условий, а затем проанализируете ситуацию без ошибок, то всегда получите верный ответ. С другой стороны, его интерпретация и практическое применение требуют определенной осторожности. Но с фундаментальной точки зрения такой подход дает более надежную информацию, нежели чье-то мнение, не в последнюю очередь благодаря тому, что здесь вы вынуждены разбираться в ситуации

самостоятельно и анализировать ее с разных точек зрения.

Во-вторых, математически обоснованные факты невозможно опровергнуть или игнорировать. Если в трех турнирах подряд вы поставили олл-ин на баттоне с T8s, когда у вас оставалась всего пара блайндов, и проиграли все сравнения, у вас не будет соблазна сказать: «Ну, не везет, надо играть тайтово». Несложные расчеты подтвердят, что пуш в такой ситуации - единственно верное решение. Осознание того, что вы все делаете правильно, позволяет забыть про тилт и меньше переживать о витках дисперсии.

Заключение

Эта книга преследовала лишь одну цель - познакомить читателя с основами покерной математики. На каждой из более чем четырех сотен страниц мы решали уравнения и выводили формулы, некоторые из которых вы сможете использовать без какой-либо подготовки. Одни лишь таблицы для игры «Пуш или Фолд» из главы 13 с лихвой окупят стоимость книги для любого игрока, специализирующегося на SNG турнирах. Кроме того, мы продемонстрировали образ покерного мышления, в котором нет места гаданиям о конкретной руке оппонента, а процесс принятия решений основан на диапазонах и балансе. Мы не считаем, что эта книга дает исчерпывающее представление о математике в покере. Более того, на наш взгляд она только предвещает революцию в понимании игры, свидетелями которой мы станем в самом ближайшем будущем.

В одной из первых глав «Математики Покера» мы заявили, что все идеи и формулы в книге сводятся к простому совету: максимизируйте свое ожидание. Мы искренне надеемся, что нам удалось открыть несколько новых смыслов этой фразы и научить вас паре полезных навыков, которые помогут вам выиграть больше денег за покерным столом.